目　　录

第一章　多元样条函数引论

众所周知，样条函数无论在理论上还是在应用中都具有十分重要的意义。鉴于客观事物的多样性和复杂性，开展有关多元样条函数方面的理论研究无疑是极为重要的。60 年代至 70 年代初，G. Birkhoff, H. L. Garabedian 和 Carl de Boor 等研究并建立了一系列关于 Cartesian 乘积型的多元样条理论。Cartesian 乘积型多元样条虽然有一定的应用价值，但有很大的局限性，且在本质上可以看作是一元样条函数的简单推广。

1975 年，本书著者采用函数论与代数几何的方法，建立了任意剖分下多元样条函数的基本理论框架，并提出了所谓的光滑余因子协调法。从这种基本观点出发，多元样条函数的任何问题均可转化为与之等价的代数问题来研究。

设D为二维 Euclid 空间 $\mathbf{R}^2$ 中的给定区域。以 $\mathbf{P}_k$ 记二元 k 次实系数代数多项式集合：

$$\mathbf{P}_k := \left\{ p = \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{k-i} c_{ij} x^i y^j \,\middle|\, c_{ij} \text{ 为实数} \right\}.$$

一个二元多项式 $p \in \mathbf{P}_m$ 称为是不可约多项式，如果除常数和该多项自身外没有其它多项式可整除它（在复域中）。代数曲线

$$\Gamma : l(x,y) = 0,\ l(x,y) \in \mathbf{P}_m$$

称为是不可约代数曲线，如果 $l(x,y)$ 是不可约多项式。显然直线是不可约代数曲线。

今用有限条不可约代数曲线对区域D进行剖分 Δ，于是D被剖分为有限个子区域 $D_1, D_2, \cdots, D_N$，它们被称为D的胞腔。形成每个胞腔边界的线段称为网线，网线的交点称为网点或顶点。若两个网点为同一网线的两端点，则称该两网点是相邻网点。

对区域D施行剖分Δ以后，所有以某一网点V为顶点的胞腔

的并集称为网点 V 的关联区域或星形区域，记为 $\mathrm{St}(V)$。

多元样条函数空间定义为

$$S_k^\mu(\Delta) := \{s \in C^\mu(D) \mid \mathscr{S}|_{D_i} \in \mathrm{P}_k, i = 1, \cdots, N\}.$$

事实上，$s \in S_k^\mu(\Delta)$ 为一个在 D 上具有 μ 阶连续偏导数的分片 k 次多项式函数。

§1. 多元样条函数的基本框架

为建立多元样条函数的基本理论框架，我们需要如下的引理。

引理 1.1[1] 设 $p(x,y) \in \mathrm{P}_k$，若一次多项式

$$l(x,y) = ax + by + c, \quad a^2 + b^2 \neq 0$$

的某 n 个零点 (x_i, y_i) $(i = 1, \cdots, n)$，$n \geqslant k + 1$，也是 $p(x,y)$ 的零点，则 $p(x,y)$ 必可被 $l(x,y)$ 所整除。即存在多项式 $q(x,y) \in \mathrm{P}_{k-1}$，使得

$$p(x,y) = l(x,y) \cdot q(x,y). \tag{1.1}$$

证明 因为 a 与 b 不同时为 0，不妨设 $b \neq 0$。将 $p(x,y)$ 按 y 的降幂次序整理为

$$p(x,y) = a_0(x)y^k + a_1(x)y^{k-1} + \cdots + a_{k-1}(x)y + a_k(x),$$

其中 $a_i(x)$，$i = 0, \cdots, k$ 为 x 的 i 次多项式。用一次多项式 $l(x,y)$ 除 $p(x,y)$，得到

$$p(x,y) = l(x,y) \cdot q(x,y) + r(x), \tag{1.2}$$

其中 $q(x,y) \in \mathrm{P}_{k-1}$，余式 $r(x)$ 为 x 的次数不超过 k 的多项式。按引理所给的条件，可知

$$r(x_i) = 0, i = 1, \cdots, n; n \geqslant k + 1. \tag{1.3}$$

由于 $b \neq 0$，所以 $x_i \neq x_j$ $(i \neq j)$。于是 (1.3) 表明 $r(x)$ 有多于其次数的互异零点，从而 $r(x) \equiv 0$。这就证明了 (1.1) 式成立。 □

引理 1.2[1] 设 $p(x,y) \in \mathrm{P}_k, q(x,y) \in \mathrm{P}_m$，且 $q(x,y)$ 是不可约代数多项式。若 $p(x,y)$ 与 $q(x,y)$ 有多于 km 个公共零点，则 $p(x,y)$ 可被 $q(x,y)$ 所整除。即存在 $r(x,y) \in \mathrm{P}_{k-m}$，使

得 $p(x,y)=q(x,y)\cdot r(x,y)$.

按代数几何中的 Bezout 定理，$p(x,y)$ 与 $q(x,y)$ 只要有多于 $k\cdot m$ 个公共零点，则它们必有公共因子存在。但 $q(x,y)$ 不可约，故 $q(x,y)$ 必为 $p(x,y)$ 的因子。

定理 1.3[1] 设 $z=s(x,y)$ 在两相邻胞腔 D_i 和 D_j 上的表达式分别为

$$z=p_i(x,y) \text{ 和 } z=p_j(x,y),$$

其中 $p_i(x,y),p_j(x,y)\in \mathbf{P}_k$. 为使 $s(x,y)\in C^\mu(\overline{D_i\cup D_j})$，必须且只须存在多项式 $q_{ij}(x,y)\in \mathbf{P}_{k-(\mu+1)d}$，使得

$$p_i(x,y)-p_j(x,y)=[l_{ij}(x,y)]^{\mu+1}\cdot q_{ij}(x,y), \tag{1.4}$$

其中 $\bar{D}_i$ 与 $\bar{D}_j$ 的公共内网线为

$$\Gamma_{ij}: l_{ij}(x,y)=0, \tag{1.5}$$

且不可约代数多项式 $l_{ij}(x,y)\in \mathbf{P}_d$.

证明 设μ为指定的正整数，$0\leqslant\mu\leqslant k\cdot d^{-1}-1$. 按所给的条件，$s(x,y)$ 于 Γ_{ij} 上处处连续. 所以 $\eta(x,y)=p_i(x,y)-p_j(x,y)$ 于 Γ_{ij} 上处处为 0. 由引理 1.2，存在多项式 $q_1(x,y)\in \mathbf{P}_{k-d}$，使得

$$\eta(x,y)=p_i(x,y)-p_j(x,y)=l_{ij}(x,y)\cdot q_1(x,y). \tag{1.6}$$

再根据 $\eta(x,y)$ 于 Γ_{ij} 上一阶偏导数为零的性质，可知

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial q_1}{\partial x}l_{ij}(x,y)+q_1(x,y)\cdot\frac{\partial l_{ij}}{\partial x}\right)\Big|_{\Gamma_{ij}}=0,\\ \left(\frac{\partial q_1}{\partial y}l_{ij}(x,y)+q_1(x,y)\cdot\frac{\partial l_{ij}}{\partial y}\right)\Big|_{\Gamma_{ij}}=0.\end{aligned} \tag{1.7}$$

由 $l_{ij}(x,y)$ 的不可约性，从(1.7)可推得 $q_1(x,y)$ 于 Γ_{ij} 上处处为 0. 再次利用引理 1.2，知存在 $q_2(x,y)\in \mathbf{P}_{k-2d}$，使得

$$q_1(x,y)=l_{ij}(x,y)\cdot q_2(x,y). \tag{1.8}$$

于是

$$\eta(x,y)=p_i(x,y)-p_j(x,y)=[l_{ij}(x,y)]^2\cdot q_2(x,y). \tag{1.9}$$

依此类推，根据 $s(x,y)$ 于 $\overline{D_i\cup D_j}$ 上的 2 阶、3 阶、…、μ 阶偏导数的连续性，最后得到

$$\eta(x,y) = p_i(x,y) - p_j(x,y) = [l_{ij}(x,y)]^{\mu+1} \cdot q_{ij}(x,y), \tag{1.10}$$

其中 $q_{ij}(x,y) \in \mathbf{P}_{k-(\mu+1)d}$. □

由定理 1.3 中 (1.4) 式所定义的多项式因子 $q_{ij}(x, y)$ 称为内网线 $\Gamma_{ij}: l_{ij}(x,y) = 0$ 上的(从 D_j 到 D_i 的)光滑余因子[1]. 说明内网线 Γ_{ij} 上的光滑余因子存在,恒指形如 (1.4) 的等式成立.

作为定理 1.3 的一个直接推论,我们有

推论 1.4[1] 设剖分 Δ 的内网线 $\Gamma_1, \cdots, \Gamma_m$ 的次数分别为 $n_1, \cdots, n_m$. 为使 $S_k^\mu(\Delta)$ 中存在非蜕化 (即真正"分片") 的函数, k 与 μ 必须满足

$$k \geqslant (\mu + 1) \cdot \min_i n_i. \tag{1.11}$$

定理 1.3 表明多元样条函数 $s(x, y) \in S_k^\mu(\Delta)$ 具有一种所谓半解析延拓的性质. 即两相邻胞腔上 $s(x, y)$ 的表达式之间只差一个形如 (1.4) 式右端所示的修正项. 然而定理 1.3 尚不能完全表征多元样条函数的内在性质. 为给出多元样条函数的完整的理论框架,我们还须作进一步的探讨.

记两相邻胞腔 D_i 与 D_j 的公共内网线为 $\Gamma_{ij}: \pm l_{ij}(x,y) = 0$. 虽然 Γ_{ij} 的方程既可写为 $l_{ij}(x, y) = 0$, 又可写为 $-l_{ij}(x, y) = 0$, 但为讨论方便计, 在整个讨论过程中我们将取定它的一种形式. 并且我们规定

$$\Gamma_{ij} = \Gamma_{ji}; \quad l_{ij}(x,y) = l_{ji}(x,y). \tag{1.12}$$

由 (1.4), Γ_{ij} 上的光滑余因子 $q_{ij}(x, y)$, 与 Γ_{ji} 上的光滑余因子 $q_{ji}(x,y)$ 满足关系式

$$q_{ij}(x,y) \equiv -q_{ji}(x,y). \tag{1.13}$$

设 A 为任一给定的内网点. 今按下列顺序将过 A 的所有内网线 $\{\Gamma_{ij}\}$ 所涉及的 i 和 j 进行调整: 使当一动点沿以 A 为心的逆时针方向越过 Γ_{ij} 时,恰好是从 D_j 跨入 D_i.

设 A 为一内网点, 定义 A 点处的"协调条件" (Conformality Condition) 为[1]

$$\Sigma_A[l_{ij}(x,y)]^{\mu+1}\cdot q_{ij}(x,y)\equiv 0, \qquad (1.14)$$

其中 Σ_A 表示对一切以内网点 A 为一端的内网线所求的和，而 $q_{ij}(x,y)$ 为 Γ_{ij} 上的光滑余因子.

设Δ的所有内网点为 $A_1,\cdots,A_M$，则“整体协调条件”(Global Conformality Condition) 为[1]

$$\Sigma_{A_\nu}[l_{ij}(x,y)]^{\mu+1}\cdot q_{ij}(x,y)\equiv 0, \nu=1,\cdots,M, \qquad (1.15)$$

其中相应于内网点 A_ν 的协调条件之 $q_{ij}(x,y)$ 满足(1.14)中所作的规定.

下述定理建立了多元样条的基本理论框架:

定理 1.5[1] 对给定的剖分Δ，多元样条函数 $s(x,y)\in S_k^\mu(\Delta)$ 存在，必须且只须 $s(x,y)$ 在每条内网线上均有一光滑余因子存在，并且满足由(1.15)所示的整体协调条件.

事实上，各内网线上光滑余因子的存在性等价于该分片多项式的 C^μ 光滑连续性. 各内网点处的协调条件被满足，即整体协调条件被满足，又等价于该分片多项式函数在整个区域上的单值性. 所以定理 1.5 成立. 有关细节请读者自行给出(参考文献[1]).

若样条函数 $s(x,y)\in S_k^\mu(\Delta)$ 于某一网点 V 的关联区域 $\mathrm{St}(V)$ 上处处为同一 k 次多项式,则称 $s(x,y)$ 于 $\mathrm{St}(V)$ 处是蜕化的.如果 $s(x,y)$ 在所有胞腔上均为同一个 k 次多项式，则称它是整体蜕化的. 根据定理 1.5, $s(x,y)$ 于 $\mathrm{St}(V)$ 是蜕化的,意指相应于网点 V 的协调条件(1.14)只有零解;而整体蜕化则意味着整体协调条件(1.15)只有零解.

鉴于人们的目的是利用多元样条函数来研究一些理论或实际问题,因而感兴趣的是如何适当选择剖分Δ，次数 k，以及光滑度 μ,使得非蜕化的多元样条函数存在. 定理 1.5 表明,多元样条函数同一元样条函数之间存在着质的差别. 区域 D，剖分Δ,分片多项式的次数 k，以及光滑度 μ 之间的微妙关系，即整体协调条件(1.15)影响和最终决定了多元样条函数. 事实上，定理 1.5 指出，多元样条函数在一定意义上等价于由(1.15)所对应的线性

代数问题：关于光滑余因子中各系数间的一个齐次线性方程组问题。而这一类齐次线性方程组的解的存在性及其性质，自然就成为多元样条函数研究的关键所在。

若区域D的边界 ∂D 由一些不可约代数曲线所组成。今以这些不可约代数曲线作为对整个平面 $\mathbf{R}^2$ 的一些剖分内网线，它们连同原来对D的剖分Δ一起，构成了对 $\mathbf{R}^2$ 的一个剖分$\bar{\Delta}$，称之为整体剖分。此时 $\mathbf{R}^2\setminus D$ 也是 $\bar{\Delta}$ 的一个胞腔。

作为定理 1.5 的一个直接推论，我们有[1]

推论 1.6 对整体剖分 $\bar{\Delta}$，存在 $s(x,y)\in S_k^\mu(\bar{\Delta})$，必须且只须 $s(x,y)$ 于每条网线上均有光滑余因子存在，并且形如(1.15)的整体协调条件于一切网点处均被满足。

不难看出，协调条件保证了 $s(x,y)$ 在Δ 和 $\bar{\Delta}$ 上的单值性。如果区域D不是单连通域，例如D是一个具有 h 个“洞”的复连通域，则定理 5 和推论 6 仍然成立，只须再添加一组附加的“洞协调条件”

$$\Sigma_{H_r}[l_{ij}(x,y)]^{\mu+1}\cdot q_{ij}(x,y)\equiv 0,\ r=1,\cdots,h \quad (1.16)$$

就可以了，其中 Σ_{H_r} 表对过第 r 个洞的一切网线求和，而(1.16)中其它符号的意义同(1.14)、(1.15)。

$\mathbf{R}^2$ 上任一条直线 $\Gamma: l(x,y)\equiv ax+by+c=0$ 显然是一条不可约代数曲线。因此对于一切以直线作为网线的剖分来说，上述的所有结论仍然是成立的。例如

定理 1.7[1] 设 $z=s(x,y)$ 于两相邻胞腔 D_i 与 D_j 上的表达式分别为k次多项式 $z=p_i(x,y)$ 与 $z=p_j(x,y)$。为使 $s(x,y)\in C^\mu(\overline{D_i\cup D_j})$，必须且只须存在多项式 $q_{ij}(x,y)\in\mathbf{P}_{k-\mu-1}$，使得

$$p_i(x,y)-p_j(x,y)=[l_{ij}(x,y)]^{\mu+1}\cdot q_{ij}(x,y), \quad (1.17)$$

其中 $\Gamma_{ij}: l_{ij}(x,y)\equiv a_{ij}x+b_{ij}y+c_{ij}=0$ 为 D_i 与 D_j 的公共内网线。

定理 1.8[1] 对给定直线剖分Δ，样条函数 $s(x,y)\in S_k^\mu(\Delta)$，必须且只须 $s(x,y)$ 于每一条内网线上均有一光滑余因子存在，

并且满足整体协调条件

$$\Sigma_{A_v}[l_i(x,y)]^{\mu+1}\cdot q_i(x,y)\equiv 0, \tag{1.18}$$

其中 A_v 取遍一切内网点 $l_i(x,y)=a_ix+b_iy+c_i=0$ 为过 A_v 的内网线，$q_i(x,y)$ 为 $\mathbf{P}_{k-\mu-1}$ 中与之相应的光滑余因子．

文献[1]中给出的命题表明，若于D的边界 ∂D 上有约束条件，要想对任意三角剖分得到属于 C^1 的二元样条函数，分片多项式的次数一般不低于5，除非对三角剖分加以特殊选择．

若区域D的剖分Δ是这样形成的：其所有网线为一些贯穿区域D的直线切割而成．则称这样的剖分Δ为"贯穿剖分"[1]．鉴于此类贯穿剖分的特殊性，可证得

定理 1.9[1] 若剖分Δ是贯穿剖分，则非蜕化的多元样条函数 $s(x,y)\in S_k^\mu(\Delta), k\geqslant\mu+1$ 恒存在．

设 $\Gamma_i: a_ix+b_iy+c_i=0$ 为任一条形成剖分Δ的直线．定义

$$\Gamma_i^-=\{(x,y)\in D\,|\,a_ix+b_iy+c_i<0\},$$
$$\Gamma_i^+=\{(x,y)\in D\,|\,a_ix+b_iy+c_i>0\}.$$

对于剖分Δ中任一由 Γ_i 派生的网线段 $\Gamma_{ij}\subset\Gamma_i$，如果规定同一个非零多项式 $q_i(x,y)\in\mathbf{P}_{k-\mu-1}$ 作为 Γ_i 的从 Γ_i^- 到 Γ_i^+ 的光滑余因子，则不难看出相应的整体协调条件必然被满足．故定理1.9成立．特别地，我们有

推论 1.10[1] 若Δ为任一矩形剖分，则非蜕化的多元样条函数 $s(x,y)\in S_k^\mu(\Delta), k\geqslant\mu+1$ 恒存在．

设Δ为给定的剖分．对任意事先指定的非负整数 μ，是否存在适当的正整数 k，使得非蜕化的 $s(x,y)\in S_k^\mu(\Delta)$ 存在？答案是肯定的．即有

定理 1.11[1] 任意给定非负整数 μ，无论与区域D进行怎样的剖分Δ，总可以找到适当的正整数 k，使得非蜕化的 $s(x,y)\in S_k^\mu(\Delta)$ 存在．

事实上，对任一剖分 Δ，内网点A处的协调条件形如

$$\Sigma_A[l_i(x,y)]^{\mu+1}\cdot q_i(x,y)\equiv 0, \tag{1.19}$$

其中 $\Gamma_i: l_i(x,y)=0$ 为过 A 的内网线，$q_i(x,y)\in \mathrm{P}_{k-\mu-1}$ 为与之相应的光滑余因子.

由(1.19)决定的是一个关于 $q_i(x,y)$ 各系数的齐次线性方程组. 若以 N 记过 A 点的所有内网线的条数(自然 $N\geqslant 2$)，则该齐次线性方程组未知数的个数为

$$M=\frac{1}{2}N\cdot(k-\mu)(k-\mu+1).$$

因此,只要 k 适当地大,M 就可大于该方程组中方程个数

$$(k+1)(k+2)/2.$$

从而该齐次线性方程组必有非零解存在.

从理论和应用两个角度上看，分片多项式的次数 k 越高，则 $s(x,y)\in S_k^\mu(\Delta)$ 的参数就越多，并且 $s(x,y)$ 的凸凹现象就越严重. 而这些正是人们所不期望的.

所以在多元样条函数的理论和应用问题中的一个重要问题是：对于给定的剖分 Δ 和指定的光滑度 μ，如何选取尽可能低的次数 k，使得非蜕化的 $s(x,y)\in S_k^\mu(\Delta)$ 得以存在？这个问题是一个很复杂的问题. 虽然前面的推论 1.4 从一个侧面部分地回答了此问题，但该问题远非如此简单. 事实上它还与剖分 Δ 本身的内在性质密切相关.

§2. 广义截断多项式与多元样条函数一般表达式[2]

在 §1 定理 1.3 中已指出了多元样条函数的逐片半解析延拓性质. 由此人们不难建立多元样条函数的一般表达式.

设区域 D 被剖分 Δ 分割为如下有限个胞腔

$$D_1, D_2, \cdots, D_N.$$

任意取定其中一个胞腔,例如 D_1 作为"源胞腔"(相当于一条河流的"源头"). 从源胞腔 D_1 出发,画一流向图 $\vec{C}$,使之满足:

1° $\vec{C}$ 流遍所有胞腔 $D_1,\cdots,D_N$ 各一次;

2° $\vec{C}$ 穿过每条内网线的次数不多于 1；

3° $\vec{C}$ 不允许穿过网点。

形象地说，以上所定义的流向图 $\vec{C}$，相当于一条河流，它发源于 D 中的某个胞腔并且流遍一切胞腔.

应该指出，流向图 $\vec{C}$ 允许有分支（相当于河流的支流），即 $\vec{C}$ 可以不是"一笔画".

显然，$\vec{C}$ 的选择不是唯一的. 但这并不影响我们下面的讨论.

流线 $\vec{C}$ 所经过的内网线称为相应于 $\vec{C}$ 的本性内网线，其它内网线称为相应于 $\vec{C}$ 的可去内网线. 显然所谓本性内网线与可去内网线都只是一个相对概念.

设 $\Gamma_{ij}: l_{ij}(x,y)=0$ 为 $\vec{C}$ 的任一条本性内网线. 将从源胞腔出发，沿 $\vec{C}$ 前进时，只有越过 Γ_{ij} 后才能进入的所有闭胞腔的并集记为 $U(\Gamma_{ij}^+)$. 将从源胞腔出发沿 $\vec{C}$ 前进时，在越过 Γ_{ij} 之前所经各闭胞腔的并集记为 $U(\Gamma_{ij}^-)$. 称 $U(\Gamma_{ij}^+)\backslash U(\Gamma_{ij}^-)$ 为网线 Γ_{ij} 的"前方"，记为 $f_r(\Gamma_{ij})$. 它相当于一条河流的下游.

定义 1.12[2] 设 $\Gamma_{ij}: l_{ij}(x, y)=0$ 为相应于流向 $\vec{C}$ 的本性内网线. 多元广义截断多项式定义为

$$[l_{ij}(x, y)]_*^m = \begin{cases}[l_{ij}(x,y)]^m, & 当\ (x,y)\in f_r(\Gamma_{ij}), \\ 0 & ,当\ (x,y)\in D - f_r(\Gamma_{ij}). \end{cases} \tag{1.20}$$

定理 1.13[2] 任一 $s(x,y)\in S_k^\mu(\Delta)$ 均可唯一地表示为

$$s(x,y)=p(x,y)+\Sigma_C[l_{ij}(x,y)]_*^{\mu+1}\cdot q_{ij}(x,y),(x,y)\in D, \tag{1.21}$$

其中 $p(x, y)\in \mathbf{P}_k$ 为 $s(x,y)$ 在源胞腔上的表达式，Σ_C 表示对所有本性内网线求的和，而且沿 $\vec{C}$ 越过 $\Gamma_{ij}: l_{ij}(x,y)=0$ 的光滑余因子为 $q_{ij}(x,y)\in \mathbf{P}_{k-\mu-1}$.

由光滑余因子的定义和定义 12，不难直接证明定理 1.13.

按 (1.21) 给出的任一个函数 $s(x,y)$ 是否一定是 $S_k^\mu(\Delta)$ 中的多元样条函数呢？ 回答是否定的. 事实上，对于任意给定的

$p(x,y)$ 和 $q_{ij}(x,y)$，由(1.21)表示的 $s(x, y)$ 未必满足整体协调条件，即未必能保证单值性.

相应流向图 $\vec{C}$ 的所有可去内网线 $\Gamma_{ij}: l_{ij}(x,y)=0$ 的广义截断多项式定义为 $[l_{ij}(x,y)]_*^{\mu}=0$，$(x,y)\in D$. 则如下定理成立:

定理 1.14[2] 对于给定的剖分Δ与确定的流向图$\vec{C}$，$s(x,y)\in S_k^{\mu}(\Delta)$，必须且只须

$$\begin{aligned} s(x,y)=p(x,y)+\Sigma'_{\vec{C}}[l_{ij}(x,y)]_*^{\mu+1} \\ \cdot q_{ij}(x,y),(x,y)\in D \end{aligned} \tag{1.22}$$

$$\Sigma_{A_\nu}[l_{ij}(x,y)]^{\mu+1}\cdot q_{ij}(x,y)\equiv 0,$$

其中 $\Sigma'_{\vec{C}}$ 为对一切内网线所求的和，$p(x,y)$ 与 $q_{ij}(x,y)$ 的意义同定理 1.13，而 A_ν 取遍所有内网点.

从定理 1.14 出发，文献[1]中已经指出了在矩形剖分Δ下 $S_3^1(\Delta)$ 和 $S_3^2(\Delta)$ 的表达式. 设Δ由下述两簇直线所形成:

$$x=x_1, x=x_2, \cdots, x=x_n,$$

$$y=y_1, y=y_2, \cdots, y=y_m,$$

$$x_1<x_2<\cdots<x_n, y_1<y_2<\cdots<y_m,$$

则有如下推论(请读者根据定理 1.14 自行证明).

推论 1.15 $s(x,y)\in S_3^1(\Delta)$，必须且只须 $s(x,y)$ 可表达为

$$\begin{aligned} s(x,y)=p(x,y)&+\sum_{i=1}^{r}(a_i x+b_i y+c_i)(x_i-x)_+^2 \\ &+\sum_{i=r+1}^{n}(a_i x+b_i y+c_i)(x-x_i)_+^2 \\ &+\sum_{j=1}^{t}(\alpha_j x+\beta_j y+\gamma_j)(y_j-y)_+^2 \\ &+\sum_{j=t+1}^{m}(\alpha_j x+\beta_j y+\gamma_j)(y-y_j)_+^2, \end{aligned} \tag{1.23}$$

其中 $p(x,y)$ 是 $s(x,y)$ 于源胞腔 $D_t=\{(x,y)|x_r\leqslant x\leqslant x_{r+1}, y_t\leqslant y\leqslant y_{t+1}\}$ 上的表达式(3 次多项式).

$s(x,y)\in S_3^2(\Delta)$，必须且只须 $s(x,y)$ 可表达为

$$
\begin{aligned}
s(x,y) = p(x,y) &+ \sum_{i=1}^{r} c_i(x_i - x)_+^3 \\
&+ \sum_{i=r+1}^{n} c_i(x - x_i)_+^3 + \sum_{j=1}^{s} d_j(y_j - y)_+^3 \qquad (1.24)\\
&+ \sum_{j=s+1}^{m} d_j(y - y_j)_+^3,
\end{aligned}
$$

其中 $p(x,y)$ 的意义同(1.23)中所指。

有关多元样条的表现方法在 80 年代后又有了进一步的发展。有关这方面的详细介绍，我们将在下一章中给出。

有了多元样条函数的表达式，人们就可能进一步讨论多元样条的插值理论、最佳逼近、以及各种理论及应用问题。

§3. 多元样条函数插值

设与整体协调条件(1.15)相对应的齐次线代数方程组为

$$BQ = 0, \qquad (1.25)$$

其中 Q 为由各内网线上的光滑余因子的系数依次作为分量所组成的列向量，矩阵 B 中的各元素由 $[l_{ij}(x,y)]^{\mu+1}$ 展开式的系数所组成。

若以 N 记剖分 Δ 中内网线的总数，且第 i 条内网线的次数(即相应不可约代数曲线的次数)为 n_i，则齐次线性方程组(1.25)中未知数的个数为 $\sum_{i=1}^{N}\binom{k-n_i(\mu+1)+2}{2}$ 若记 $\sigma = \operatorname{rank} B$，则按线代数理论，(1.25)解空间的维数为

$$\sum_{i=1}^{N}\binom{k-n_i(\mu+1)+2}{2} - \sigma.$$

再加上"源胞腔"内的自由度 $\binom{k+2}{2}$，即有如下定理

定理 1.16[5]

$$\dim S_k^\mu(\Delta)=\binom{k+2}{2}+\sum_{i=1}^{N}\binom{k-n_i(\mu+1)+2}{2}-\sigma. \tag{1.26}$$

特别地，如果各内网线均为直线段，则有

定理 1.17[1,2]

$$\dim S_k^\mu(\Delta)=\binom{k+2}{2}+N\binom{k-\mu+1}{2}-\sigma. \tag{1.27}$$

其中 N 和 σ 的涵义同定理 1.16，即 N 为内网线总数，σ 为整体协调条件对应的齐线性方程组(1.15)系数矩阵 B 的秩数.

虽然定理 1.16 与定理 1.17 从原则上给出了多元样条函数空间 $S_k^\mu(\Delta)$ 的维数公式，但 σ 的计算是复杂的，有时它还依赖于剖分 Δ 的几何性质. 这些我们将在第二章中讨论.

取定(1.25)的一个基础解系

$$q_1,q_2,\cdots,q_\lambda,$$

其中 $\lambda=\dim S_k^\mu(\Delta)-\binom{k+2}{2}$. 则(1.25)的通解为

$$Q=\alpha_1q_1+\alpha_2q_2+\cdots+\alpha_\lambda q_\lambda,$$

其中 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_\lambda$ 为实数.

引入记号

$$X^k=(x^k,x^{k-1}y,\cdots,xy^{k-1},y^k),$$

并记 $l_1(x,y),\cdots,l_N(x,y)$ 为所有内网线. 由定理 1.14，任一 $s(x,y)\in S_k^\mu(\Delta)$ 均可表示为

$$s(x,y)=p(x,y)+\sum_{i=1}^{N}[l_i(x,y)]_*^{\mu+1}\cdot q_i(x,y), \tag{1.28}$$

其中各 $[l_i(x,y)]_*^{\mu+1}$ 为按同一流向图所定义的广义截断多项式，$q_i(x,y)$ 为内网线 $\Gamma_i:l_i(x,y)=0$ 上的光滑余因子，而 $p(x,y)$ 为源胞腔上的 k 次多项式.

记

$$\omega_1(x,y)=(X^0,X^1,\cdots,X^k),$$

$$\omega_2(x,y)=([l_1(x,y)]_*^{\mu+1}X^0,\cdots,[l_1(x,y)]_*^{\mu+1}\cdot X^{k-(\mu+1)m_1},\cdots,[l_N(x,y)]_*^{\mu+1}X^0,\cdots,[l_N(x,y)]_*^{\mu+1}X^{k-(\mu+1)m_N}),$$

$$\omega(x,y)=\omega_1(x,y)+\omega_2(x,y),$$

则(1.28)可改写为

$$\begin{aligned} s(x,y) &= \omega(x,y)\begin{pmatrix}P\\Q\end{pmatrix}=\omega_1(x,y)P+\omega_2(x,y)Q \\ &= (\omega_1(x,y),\omega_2(x,y)q_1,\cdots,\omega_2(x,y)q_\lambda)\begin{pmatrix}P\\\alpha\end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{1.29}$$

其中 P 为以 $p(x,y)$ 诸系数为分量的向量，而

$$\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_\lambda)^T.$$

为叙述方便计，记 $d=\dim S_k^\mu(\Delta)$. 设 $L_1,\cdots,L_d$ 为线性算子，它们之间不必是互异的. 如恒等算子 $L_is(x,y)\equiv s(x,y)$，各种偏微分算子 $L_is(x,y)\equiv\dfrac{\partial^n}{\partial x^r\partial y^{n-r}}s(x,y)$ 等. L_i 也可为积分线性泛函

$$L_is(x,y)=\iint_D\rho(x,y)s(x,y)dxdy,$$

其中权函数 $\rho(x,y)$ 满足条件

$$\rho(x,y)\geqslant 0,\quad (x,y)\in D,$$

$$\iint_D\rho(x,y)dxdy>0,$$

等等.

对于给定的插值结点组

$$(x_i,y_i),\quad i=1,\cdots,d, \tag{1.30}$$

研究插值问题

$$L_is(x_i,y_i)=z_i,\quad i=1,2,\cdots,d, \tag{1.31}$$

其中 $z_1,z_2,\cdots,z_d$ 为一组给定的实数.

插值问题的确切提法是：如何选择恰当的插值结点组(1.30)，使得对于任意给定的实数组 $z_1,z_2,\cdots,z_d$，满足插值条件(1.31)的

样条函数 $s(x,y)\in S_k^\mu(\Delta)$ 存在且唯一(如此的插值结点组称为是适定的)并进一步给出 $s(x,y)$ 的具体算法.

定义 1.18 设 $s(x,y)\in S_k^\mu(\Delta)$，称由下式界定的点集

$$s(x,y)=0 \tag{1.32}$$

为(平面)分片代数曲线. 它显然是通常代数曲线的一种自然推广.

命题 1.19 设(1.31)中的所有 L_i 为恒等算子 I. 则插值结点组 $(x_i,y_i), i=1,\cdots,d$ 是插值问题(1.31)的适定结点组，必须且只须 $\{(x_i,\ y_i)\}_{i=1}^d$ 不同时位于一条非零分片代数曲线 $s(x,y)=0$ 上,其中 $s(x,y)\in S_k^\mu(\Delta)$.

事实上，结点组 $\{(x_i,y_i)\}_{i=1}^d$ 全部位于一条非零分片代数曲线 $s(x,y)=0$ 上，即等价于相应于(1.31)的齐线性方程组(诸 $L_i=I$)有非零解存在,而这又等价于原始非齐线性方程组(1.31)的解不唯一,即结点组 $\{(x_i,y_i)\}_{i=1}^d$ 是不适定的.

定理 1.20[2] 插值结点组(1.30)是插值问题(1.31)的适定结点组,必须且只须

$$\det\begin{bmatrix} L_1\omega_1(x_1,y_1) & L_1\omega_2(x_1,y_1)q_1 & \cdots & L_1\omega_2(x_1,y_1)q_d \\ L_2\omega_1(x_2,y_2) & L_2\omega_2(x_2,y_2)q_1 & \cdots & L_2\omega_2(x_2,y_2)q_d \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ L_d\omega_1(x_d,y_d) & L_d\omega_2(x_d,y_d)q_1 & \cdots & L_d\omega_2(x_d,y_d)q_d \end{bmatrix}\neq 0. \tag{1.33}$$

必须指出，(1.33)成立与否是与基础解系 $q_1,q_2,\cdots,q_d$ 的选择无关的. 事实上,无论怎样选择另一组基础解系 $q_1',q_2',\cdots,q_d'$,对应于(1.33)中矩阵的后 d 列与原先矩阵的后 d 列是可以相互表示的. 即无论如何选择 $q_1,q_2,\cdots,q_d$，(1.33)中矩阵后 d 列所支架起的空间是不变的. 因而再添上第一列

$$(L_1\omega_1(x_1,y_1),L_2\omega_1(x_2,y_2),\cdots,L_d\omega_1(x_d,y_d))^T$$

后,其相应矩阵的秩数也是不变的.

定理 1.21[2] 若(1.33)成立,则插值问题(1.31)的解 $s(x,y)$ 可从下述行列式方程中解出

$$\begin{vmatrix} s(x,y) & \omega_1(x,y) & \omega_2(x,y)q_1 & \cdots & \omega_2(x,y)q_d \\ z_1 & L_1\omega_1(x_1,y_1) & L_1\omega_2(x_1,y_1)q_1 & \cdots & L_1\omega_2(x_1,y_1)q_d \\ \cdots & & \cdots & & \cdots \\ z_d & L_d\omega_1(x_d,y_d) & L_d\omega_2(x_d,y_d)q_1 & \cdots & L_d\omega_2(x_d,y_d)q_d \end{vmatrix} = 0, \tag{1.34}$$

其中 $q_1,\cdots,q_d$ 为 (1.25) 的任一组基础解系.

在文献 [1] 中,我们还给出了下面两个算例.

例1 设区域D为三角形 123, 其中 1(1,0), 2(0,1),3(−1, −1). 取点 7(0,0), 并连线段 $\overline{7,1}$,$\overline{7,2}$, 和$\overline{7,3}$ 以形成对D的剖分Δ. 即D被剖分为三个三角形胞腔 712,723, 和 731.

采用维数公式(1.27),可求出

$$\dim S_3^1(\Delta) = 12.$$

除了上面四个网点外, 还再取其它八个插值结点: 4(1/2,1/2), 5(2/3,1/3),6(0,1/2),8(−1/3,1/3), 9(1/3,−1/3), 10(−1/2, 0),11(0,−1/2), 和 12(1/3,1/3). 取三角形 237 作为源胞腔,并以一条按逆时针方向绕点 7 流动的流向作为流向图 $\vec{C}$.

由多元样条函数表现定理(定理 1.14), $s(x,y)$ 必可表示为

$$s(x,y) = p(x,y) + (x-y)_*^2 \cdot q_1(x,y) + y_*^2 \cdot q_2(x,y) + x_*^2 \cdot q_3(x,y),$$

其中 $p(x,y)\in \mathbf{P}_3$, $q_i(x,y)\in \mathbf{P}_1$, $i=1,2,3$.

设被插函数为 $z=x^2y^2$, 则以前述 12 个点作为结点的插值样条函数可算得为

$$\begin{aligned} s(x,y) = & -0.092593x - 0.092593x^2 + 0.38889xy \\ & + 0.96295x^3 - 1.6111x^2y + 0.037075y^3 \\ & + (-0.77778x + 0.11111y)\cdot(x-y)_*^2 \\ & + (x - 0.11111y)\cdot y_*^2 + (-0.77778x \\ & + 1.66667y)\cdot x_*^2. \end{aligned}$$

例2 设区域D为一正六边形 123456, 其各顶点坐标分别为

$$1(1,0), \qquad 2\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \qquad 3\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$4(-1,0),\qquad 5\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\quad 6\left(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

分别连接 $\overline{1,4}$, $\overline{2,5}$ 和 $\overline{3,6}$ 线段，则得到D的剖分Δ. 该剖分的内网点为 $0=(0,0)$. 内网线 $\overline{0,i}$ 记为 $\Gamma_i: l_i(x,y)=0$, $i=1,\cdots,6$.

虽然采用维数公式 (1.27),可以算出

$$\dim S_3^1(\Delta)=21,$$

但是我们仅打算考虑 $S_3^1(\Delta)$ 中的一个子空间上的插值问题. 选定 061 作为源胞腔，绕 0 画一条逆时针的流向图 $\vec{C}$, 并强制性地规定 Γ_1 与 Γ_4, Γ_2 与 Γ_5, Γ_3 与 Γ_6 等上的光滑余因子分别两两异号. 自然此时在 0 点处的协调条件被满足.

给定插值条件

$$s(0,0)=1,\ s(i)=\frac{\partial}{\partial x}s(i)=\frac{\partial}{\partial y}s(i)=0,\ i=1,\cdots,6.$$

经计算可得满足以上插值条件的多元样条函数为

$$\begin{aligned}s(x,y)=&1+0.31807\times10^{-5}x-0.23285\times10^{-5}y\\&-3.0000x^2-2.3095xy-4.3335y^2\\&+2.0000x^3+2.3095x^2y+1.9999xy^2\\&-2.3096y^3+\{[l_1(x,y)]_*^2-[l_4(x,y)]_*^2\}\\&\cdot q_1(x,y)+\{[l_2(x,y)]_*^2-[l_5(x,y)]_*^2\}\\&\cdot q_2(x,y)+\{[l_6(x,y)]_*^2-[l_3(x,y)]_*^2\}\\&\cdot q_3(x,y),\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}q_1(x,y)&=0.26182\times10^{-4}x+3.0795y+2.6668,\\q_2(x,y)&=-0.66665x+0.38489y-0.66668,\\q_3(x,y)&=0.66668x+0.38489y-0.66668.\end{aligned}$$

§4. 异度样条与带权样条

前面讨论的多元样条函数，都是以μ阶光滑度来连接各相邻

胞腔的．在许多实际问题，如汽车、造船、航空航天、以及模具等领域中的多数问题里，人们需要的曲面并不是处处都是以同一的光滑度相连接的．再加上，数学理论研究的需要，促使我们要研究所谓异度样条函数．在文献[2]中，我们提出并研究了异度样条函数问题．

采用本章§1中的一切记号．设相应于剖分Δ的内网线为$\Gamma_i: l_i(x,y)=0, i=1,\cdots,N, l_i(x,y)\in \mathrm{P}_{n_i}$为不可约多项式．$\Delta$上的分片$k$次多项式函数$s(x,y)$，如果在诸$\Gamma_i$上具有$\mu_i$阶连续偏导数，则称$s(x,y)$为一异度多元样条函数，记为$s(x,y)\in S_k^{\vec{\mu}}(\Delta)$，其中$\vec{\mu}=(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_N)$.

对于这里所定义的异度样条函数来说，只须作适当的修改(将统一的μ，改为μ_i，$i=1,\cdots,N$等)，则前面的几乎所有的结论照样成立．例如只须将协调条件和整体协调条件((1.14)和(1.15))改为

$$\Sigma_A[l_i(x,y)]^{\mu_i+1}\cdot q_i(x,y)\equiv 0 \qquad (1.14)'$$

和

$$\Sigma_{A_v}[l_i(x,y)]^{\mu_i+1}\cdot q_i(x,y)\equiv 0, v=1,\cdots,M, \qquad (1.15)'$$

其中$q_i(x,y)\in \mathrm{P}_{k-(\mu_i+1)n_i}$，则定理1.5照样成立(其中$\mu$应改为$\vec{\mu}$).

类似地，我们也有

$$\dim S_k^{\vec{\mu}}(\Delta)=\binom{k+2}{2}+\sum_{i=1}^{N}\binom{k-n_i(\mu_i+1)+2}{2}-\sigma, \qquad (1.26)'$$

其中σ为作了相应修改后的齐线性方程组(1.25)的系数矩阵B的秩数．

在数学物理问题中，常要求所求函数满足边界条件

$$u(x,y)|_{\partial D}=\varphi(x,y), \qquad (1.35)$$

其中∂D为D的边界，$\partial D: \zeta(x,y)=0$.

对于任何连续函数$g(t)$，只要$g(0)=0$，则形如$g(\zeta(x,y))p(x,y)+\varphi(x,y)$的函数必自动满足条件(1.35)，其中$p(x,$

$y) \in \mathrm{P}_k$.

考虑形如

$$G(x,y)p_i(x,y)+\varphi(x,y),(x,y)\in D_i \qquad (1.36)$$

的分片函数，其中 $G(x,y),\varphi(x,y)$ 为给定的连续函数，且 $p_i(x,y)\in \mathrm{P}_k$.

设 $G(x,y)\in C^\mu(D)$，且

$$Z(G):=\{(x,y)\in D|G(x,y)=0\}.$$

假定对给定剖分 Δ，每条内网线 Γ_{ij} 上的点集 $\Gamma_{ij}-Z(G)$ 的点数不少于 $k+1$，记为

$$NP\{\Gamma_{ij}-Z(G)\}\geqslant k+1,\forall\Gamma_{ij}. \qquad (1.37)$$

形如(1.36)且于D上具有μ阶连续偏导数的分片函数称为带权样条函数，记为 $GS_k^\mu(\Delta)$，或 $GS_k^\mu(\Delta,\varphi)$.

与§1类似地，我们有

定理 1.21[2] 设 $S(x,y)$ 于相邻两胞腔 D_i,D_j 上的表达式分别为 $P_i(x,y),P_j(x,y)$，则为使 $s(x,y)\in C^\mu(\overline{D_i\cup D_j})$ 必须且只须存在 $q_{ij}(x,y)\in\mathrm{P}_{k-\mu-1}$，使得

$$P_i(x,y)-P_j(x,y)=[l_{ij}(x,y)]^{\mu+1}\cdot G(x,y)\cdot q_{ij}(x,y), \qquad (1.38)$$

其中 $\Gamma_{ij}:l_{ij}(x,y)=0$ 为 D_i 与 D_j 的公共内网线.

相应的协调条件和整体协调条件分别为

$$G(x,y)\Sigma_A[l_{ij}(x,y)]^{\mu+1}\cdot q_{ij}(x,y)\equiv 0 \qquad (1.39)$$

和

$$G(x,y)\Sigma_{A_\nu}[l_{ij}(x,y)]^{\mu+1}\cdot q_{ij}(x,y)\equiv 0,\nu=1,\cdots,M. \qquad (1.40)$$

进而有

定理 1.22[2] $s(x,y)\in GS_k^\mu(\Delta)$，必须且只须对每一内网线，$s(x,y)$ 均有一光滑余因子存在，并且满足整体协调条件(1.40).

在本书第二章中，我们还将介绍一些特定情况下的带权多元样条函数空间.

§5. 多元有理样条函数简介

记

$\mathbf{R}_{m,n}:=\{p(x,y)/q(x,y)\mid p\in\mathbf{P}_m,\ q\in\mathbf{P}_n,$ 且 $q(x,y)\neq 0,$ $(x,y)\in D\}.$

$S^{\mu}_{m,n}(\Delta):=\{R(x,y)\in C^{\mu}(D)\mid R(x,y)|_{D_i}\in\mathbf{R}_{m,n},\forall D_i\}.$

$s(x,y)\in S^{\mu}_{m,n}(\Delta)$ 称为二元有理样条函数. 在文献[2]中，我们曾经讨论了此类多元样条函数的一些性质，并得到一些基本结果。

定理 1.23 设 $R(x,y)$ 于两相邻胞腔 D_i,D_j 上的表达式分别为

$$p_i(x,y)/q_i(x,y),\quad p_j(x,y)/q_j(x,y)\in\mathbf{R}_{m,n}.$$

为使 $R(x,y)\in c^{\mu}(D_i\cup D_j)$，必须且只须存在

$$M_{ij}(x,y)\in\mathbf{P}_{m+n-\mu-1},$$

使得

$$\frac{p_i(x,y)}{q_i(x,y)}-\frac{p_j(x,y)}{q_j(x,y)}=\frac{[l_{ij}(x,y)]^{\mu+1}\cdot M_{ij}(x,y)}{q_i(x,y)\,q_j(x,y)},\qquad(1.41)$$

其中 $\Gamma_{ij}:l_{ij}(x,y)=0$ 为 D_i 与 D_j 的公共内网线。

该定理的证明与定理 1.3 的证明相似. 事实上，充分性是显然的. 为证必要性，按 $R(x,y)$ 的连续性，

$$\begin{aligned}\eta(x,y)&=\frac{p_i(x,y)}{q_i(x,y)}-\frac{p_j(x,y)}{q_j(x,y)}\\&=\frac{p_i(x,y)q_j(x,y)-p_j(x,y)q_i(x,y)}{q_i(x,y)q_j(x,y)}\end{aligned}$$

于 Γ_{ij} 上处处为 0，因而右端分子必于 Γ_{ij} 上处处为零. 由引理 1.1，存在 $M^{(1)}_{ij}(x,y)\in\mathbf{P}_{m+n-1}$，使

$$\eta(x,y)=\frac{[l_{ij}(x,y)]\cdot M^{(1)}_{ij}(x,y)}{q_i(x,y)\,q_j(x,y)}.$$

再按 $R(x,y)$ 于 Γ_{ij} 上有连续的 1 阶偏导数，可推知

$$\eta(x,y)=\frac{[l_{ij}(x,y)]^2M_{ij}^{(2)}(x,y)}{q_i(x,y)\cdot q_j(x,y)},$$

其中 $M_{ij}^{(2)}(x,y)\in \mathbf{P}_{m+n-2}$. 依此类推,即可证明本定理.

称(1.41)中的 $M_{ij}(x,y)$ 为内网线 Γ_{ij} 上的光滑余因子.

在多元有理样条函数研究中的协调条件和整体协调条件分别为

$$\Sigma_A[l_{ij}(x,y)]^{\mu+1}\cdot\frac{M_{ij}(x,y)}{q_i(x,y)q_j(x,y)}=0 \qquad (1.42)$$

和

$$\Sigma_{A_\nu}[l_{ij}(x,y)]^{\mu+1}\cdot\frac{M_{ij}(x,y)}{q_i(x,y)q_j(x,y)}=0,\ \nu=1,\cdots,\bar{M}, \quad (1.43)$$

其中 $\bar{M}$ 为剖分 Δ 的内网点数.

定理 1.24[2] 对于给定的剖分 Δ, 函数 $R(x,y)\in S_{m,n}^{\mu}(\Delta)$, 必须且只须 $R(x,y)$ 在每一内网线上均有光滑余因子存在, 并且整体协调条件(1.43)被满足。

檀结庆在他的博士论文[3]中进一步讨论了多元有理样条函数的一些问题。

§6. n 维样条函数

在文献[4]中,我们曾经讨论了 n 维样条函数的基本框架, 并给出了类似于 §1 和 §2 中的一些结果.

鉴于 Bezout 定理的 n 维推广是困难的, 所以我们的剖分面仅限于超平面.

设 D 为 $\mathbf{R}^n$ 中的一个单连通区域. 用有限块超平面

$$\pi: a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n+b=0$$

对 D 作剖分 Δ. 于是 D 被剖分成有限个胞腔

$$D_1,D_2,\cdots,D_m.$$

任一 D_i 的边界面称为 Δ 的剖分面.

定义 n 元 k 次多项式类

$$\mathbf{P}_k := \left\{ \sum_{0 \leq i_1+\cdots+i_n \leq k} c_{i_1\cdots i_n} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n} \middle| c_{i_1\cdots i_n} \text{ 为实数} \right\}.$$

定义 n 维样条函数

$S_k^\mu(\Delta) := \{S(x_1,\cdots,x_n) \in C^\mu(D) | s(x_1,\cdots,x_n)|_{D_j} \in \mathbf{P}_k,$
$j = 1,\cdots,m\}.$

下面介绍 [4] 中的一些有关结果.

定理 1.25 若多项式 $p(x_1,\cdots,x_n) \in \mathbf{P}_k$ 于超平面

$$\pi: a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + b = 0$$

上处处为 0, 则 $p(x_1, \cdots, x_n)$ 必可被 $l(x_1, \cdots, x_n) = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + b$ 所整除. 即存在 $q(x_1,\cdots x_n) \in \mathbf{P}_{k-1}$, 使

$$p(x_1,\cdots,x_n) = l(x_1,\cdots,x_n) \cdot q(x_1,\cdots,x_n). \qquad (1.44)$$

证明 因 $(a_1, \cdots, a_n)$ 不是零向量, 不妨设 $a_1 \neq 0$, 并将 $p(x_1,\cdots,x_n)$ 按 x_1 的降幂顺序重排为

$$p(x_1,x_2,\cdots,x_n) = p_0(x_2,\cdots,x_n)x_1^k + p_1(x_2,\cdots,x_n)x_1^{k-1} + \cdots + p_{k-1}(x_2,\cdots,x_n)x_1 + p_k(x_2,\cdots,x_n),$$

其中 $p_i(x_2,\cdots,x_n)$ 为 $n-1$ 元 $x_2,\cdots,x_n$ 的 i 次多项式.

今用

$$l(x_1,x_2,\cdots,x_n) = a_1\left(x_1 + \frac{a_2}{a_1}x_2 + \cdots + \frac{a_n}{a_1}x_n + \frac{b}{a_1}\right)$$

对 $p(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 作带余除法,得

$$p(x_1,x_2,\cdots,x_n) = l(x_1,x_2,\cdots,x_n)q(x_1,x_2,\cdots,x_n) + r(x_2,\cdots,x_n),$$

其中 $q(x_1,\cdots,x_n) \in \mathbf{P}_{k-1}$, $r(x_2,\cdots,x_n) \in \mathbf{P}_k(x_2,\cdots,x_n)$. 因为 $a_1 \neq 0$, 所以 $r(x_2, \cdots, x_n)$ 在 π 的投影面上处处为 0. 从而 $r(x_2,\cdots,x_n) \equiv 0$,即 (1.44) 成立. □

同 §1 类似地,我们也有

定理 1.26 设 $s(x_1, \cdots, x_n)$ 于相邻两胞腔 D_i, D_j 上的表达式分别为 $p_i(x_1,\cdots,x_n)$, $p_j(x_1,\cdots,x_n)$. 为使 $s(x_1,\cdots,x_n) \in c^\mu(\overline{D_i \cup D_j})$,必须且只须存在 $q_{ij}(x_1,\cdots,x_n) \in \mathbf{P}_{k-\mu-1}$, 满足关系式

$$p_i(x_1,\cdots,x_n)-p_j(x_1,\cdots,x_n)=[l_{ij}(x_1,\cdots,x_n)]^{\mu+1}$$
$$\cdot q_{ij}(x_1,\cdots,x_n), \tag{1.45}$$

其中 $\pi_{ij}:l_{ij}(x_1,\cdots,x_n)=0$ 为 D_i 和 D_j 的公共内剖面。

(1.45) 中的多项式 $q_{ij}(x_1,\cdots,x_n)$ 称为 π_{ij} 的光滑余因子。我们约定 π_{ij} 与 π_{ji} 取同一表达式 ($l_{ij}=0$ 或 $-l_{ij}=0$)，即约定 $l_{ij}(x_1,\cdots,x_n)\equiv l_{ji}(x_1,\cdots,x_n)$. 所以按 (1.45)，可知

$$q_{ij}(x_1,\cdots,x_n)\equiv -q_{ji}(x_1,\cdots,x_n).$$

为使我们的讨论更为直观，以下仅就 3 维情况来讨论 ($n=3$)。其实对于一般 n 维情况来说相应结果也是成立的。

称两相交剖面的交线为棱. 由一棱所界定的线段之内点均含于D的内部，则称该棱为内棱. 凡以某内棱为其棱的所有胞腔的并集，称为该内棱的关联区域，仍记为 St (·)。

对于内棱 AB 的关联区域 St (AB) 来说，以 $\overrightarrow{BA}$ 为轴、按右手螺旋系可以确定各相关胞腔的一个顺序。自然这个顺序与以 $\overrightarrow{AB}$ 为轴的按右手螺旋系确定的顺序正好是相反的. 为确定起见，在整个讨论中，对于每条内棱，我们只规定一个旋转方向而自始至终不予变更。

对于过 AB 的一切内剖面 $\{\pi_{ij}\}$ 中诸 i, j 的顺序作下述调整：使动点按事先确定的右手螺旋系方向旋转时，它是以从 D_j 跨人 D_i 的方式越过 π_{ij} 的。

内棱 AB 上的协调条件为

$$\Sigma_{AB}[l_{ij}(x,y,z)]^{\mu+1}\cdot q_{ij}(x,y,z)\equiv 0, \tag{1.46}$$

其中 Σ_{AB} 表示对一切以 AB 为其上一直线之内剖面求和，$q_{ij}(x,y,z)$ 是按上述方式调整后的 π_{ij} 所对应的光滑余因子.

定理 1.27[4] 对于给定的剖分 Δ, $u=s(x,y,z)\in S_k^\mu(\Delta)$, 必须且只须 $s(x,y,z)$ 在每块内剖面上皆有一光滑余因子存在，并且于每条内棱的关联区域上满足相应于 (1.46) 的协调条件.

该定理的证明与定理 1.5 的证明是类似的. 类似地，我们可以给出高维样条的表达式. 设D被剖分Δ分成m个胞腔 $D_1,\cdots,$

D_m. 于这 m 个胞腔中任选其一，例如 D_1，作为源胞腔. 从源胞腔 D_1 出发、画一流向图 $\vec{C}$，使之满足：

1° $\vec{C}$ 流遍所有胞腔各 1 次；

2° $\vec{C}$ 只从内剖分面内部穿过，即不允许以穿过棱或网点的方式进入 F-胞腔；

3° $\vec{C}$ 穿过每内剖面的次数顶多为 1.

对于给定的流线 $\vec{C}$ 而言，其所穿过的内剖面称为 $\vec{C}$ 的本性内剖面，另外的内剖面称为 $\vec{C}$ 的可去内剖面.

设 $\pi_{ij}: l_{ij}(x,y,z)=0$ 为 $\vec{C}$ 的任一本性内剖面. 从源胞腔出发、沿流向图 $\vec{C}$ 前进时，将那些只有越过 π_{ij} 以后才能到达的一切闭胞腔的并集记为 $\bigcup(\pi_{ij}^+)$；将 $\vec{C}$ 越过 π_{ij} 之前所经过的各闭胞腔的并集记为 $\bigcup(\pi_{ij}^-)$. 称

$$f_r(\pi_{ij})=\bigcup(\pi_{ij}^+)\backslash\bigcup(\pi_{ij}^-)$$

为 π_{ij} 的"前方".

对 $\vec{C}$ 的任一本性内剖面 $\pi_{ij}: l_{ij}(x,y,z)=0$，广义截断多项式定义为

$$[l_{ij}(x,y,z)]_*^r=\begin{cases}[l_{ij}(x,y,z)]^r, & 当\ (x,y,z)\in f_r(\pi_{ij}),\\ 0, & 当\ (x,y,z)\in D\backslash f_r(\pi_{ij}).\end{cases}$$

高维样条的表现定理可叙述为

定理 1.28[4] $S_k^\mu(\Delta)$ 中的任一高维样条函数 $s(x,y,z)$ 均可唯一地表示为

$$s(x,y,z)=p(x,y,z)+\Sigma_{\vec{C}}[l_{ij}(x,y,z)]_*^{\mu+1}\cdot q_{ij}(x,y,z),\tag{1.47}$$

其中 $p(x,y,z)\in \mathrm{P}_k$ 为 $s(x,y,z)$ 于源胞腔中的表达式，$\Sigma_{\vec{C}}$ 表示对 $\vec{C}$ 的所有本性内剖面求和，并且当 $\vec{C}$ 越过 π_{ij} 时恰好是从 D_j 跨入 D_i，而 $q_{ij}(x,y,z)$ 为 $\pi_{ij}: l_{ij}(x,y,z)=0$ 上的光滑余因子.

进一步，我们还有

定理 1.29[4] 对于给定的剖分 Δ 和确定的流向图 $\vec{C}$，$s(x,y,$

$z) \in S_k^\mu(\Delta)$，必须且只须 $s(x, y, z)$ 可表示为(1.47)式的形式，且在每条内棱上满足相应的协调条件(1.46)。

有了表达式(1.47)和定理1.29，我们可以进一步给出高维样条的插值适定性条件和算法。

第二章　多元样条函数空间

从原则上讲，多元样条函数的所有性质和一切应用、都可以从本书第一章里所指出的基本理论框架引伸出来。前章§2中指出的多元样条函数的表达式、尚不便于直接应用。因为它尚依赖于整体协调条件的解，以确定所有的光滑余因子。而后者的解，有时需要采用特定的方法来实现之。

如所知，多元样条函数空间 $S_k^\mu(\Delta)$ 是一个线性空间。对于各种特定的剖分 Δ，如何找出样条函数空间 $S_k^\mu(\Delta)$ 的便于应用的基函数组，是多元样条函数研究中的关键问题之一。与此相关的问题，是如何事先求出样条函数空间 $S_k^\mu(\Delta)$ 的维数 $\dim S_k^\mu(\Delta)$。本章中讨论的主要问题就是如何确定 $\dim S_k^\mu(\Delta)$，并找出 $S_k^\mu(\Delta)$ 的基函数组来。

§1. 贯穿剖分上的多元样条函数空间

在第一章中我们已经给出了 $\mathbf{R}^2$ 中区域D的贯穿剖分Δ的定义。今以 Δ_c 记D的一个贯穿剖分。设 Δ_c 在D内有L条贯穿线，V个内网点 $A_1,\cdots,A_V$，且恰有 n_i 条贯穿线相交于 A_i 点，$i=1,\cdots,V$。

设$(\alpha_1,\beta_1),\cdots,(\alpha_N,\beta_N)$ 是两两线性独立的数偶，即 $\alpha_i\beta_j\neq\alpha_j\beta_i$ $(i\neq j)$，$i,j=1,\cdots,N$。设一点处的协调条件解空间为

$$V_N:=\left\{(q_1,\cdots,q_N)\left|\sum_{i=1}^N q_i(x,y)(\alpha_i x+\beta_i y)^{\mu+1}\equiv 0,\right.\right.$$

$$\left.q_1,\cdots,q_N\in\mathbf{P}_{k-\mu-1}\right\}. \tag{2.1}$$

L. L. Schumaker[7] 讨论和给出了 $\dim V_N$ 的公式。

因为由(2.1)导出的线性方程组的系数矩阵中的元素是一些二项系数，只要利用消元法和二项系数间的关系式，就不难导出 $\dim V_N$ 的具体公式。引理 2.1 里的公式(2.2)是文献[6]中给出的，它不同于 L. L. Schumaker 的原始形式(文献[7])且便于应用。

引理 2.1

$$\dim V_N = :d_k^\mu(N): = \frac{1}{2}\left(k - \mu - \left[\frac{\mu+1}{N-1}\right]\right)_+ \cdot \left((N-1)k - (N+1)\mu + (N-3) + (N-1)\left[\frac{\mu+1}{N-1}\right]\right). \tag{2.2}$$

定理 2.2[6]

$$\dim S_k^\mu(\Delta_c) = \binom{k+2}{2} + L\binom{k-\mu+1}{2} + \sum_{i=1}^{V} d_k^\mu(n_i), \tag{2.3}$$

其中 L 为贯穿线的条数，$d_k^\mu(n_i)$ 由公式(2.2)所给出，而 n_i 为相交于第 i 个内网点处的贯穿线数，V 为内网点数。

证明 设第 i 个内网点 $A_i = (x_i, y_i)$ 处恰有如下的 n_i 条线相交

$$\alpha_{ij}(x - x_i) + \beta_{ij}(y - y_i) = 0,$$

其中 $\alpha_{ij}\beta_{il} - \alpha_{il}\beta_{ij} \neq 0, 1 \leqslant j < l \leqslant n_i$.

以 $q_j = q_{i,j} \in \mathrm{P}_{k-\mu-1}, j = 1, \cdots, 2n_i$ 记过 A_i 的各内网线的光滑余因子。按 A_i 处的协调条件，有

$$\sum_{j=1}^{n_i} (q_{n_i+j}(x,y) + q_j(x,y))[\alpha_{ij}(x - x_i) + \beta_{ij}(y - y_i)]^{\mu+1} \equiv 0. \tag{2.4}$$

记 $Q_j(x,y): = q_{n_i+j}(x,y) + q_j(x,y)$，则由引理 2.1，方程组

$$\sum_{j=1}^{n_i} Q_j(x,y) \cdot [\alpha_{ij}(x - x_i) + \beta_{ij}(y - y_i)]^{\mu+1} \equiv 0 \tag{2.5}$$

解空间的维数为 $d_k^\mu(n_i)$.

然而从 $Q_i(x,y)$ 的定义不难看出，即使从(2.5)已确定了所有的 $Q_i(x,y)$，多项式 $q_{n_i+i}(x,y)$ 与 $q_i(x,y)$ 中仍有一个多项式是完全自由的. 所以在我们解完了所有内网点处的协调条件(即整体协调条件)后，每条贯穿线中都有一段内网线，相应于其上的光滑余因子是自由的.

综上所述，对于剖分 Δ_c 来说，所有内网线上光滑余因子的真正自由的参数个数为

$$L\binom{k-\mu+1}{2}+\sum_{i=1}^{V} d_k^\mu(n_i).$$

再加上源胞腔上 k 次多项式的自由度 $\binom{k+2}{2}$，即可知(2.3)式成立。 □

从定理 2.2 的证明，可以发现贯穿剖分的一大特点是，各内网点处的协调条件可以彼此独立地求解。因而给理论分析和实际计算带来了许多方便之处。

以下我们将分析并找出样条函数空间 $S_k^\mu(\Delta_c)$ 的一类基函数组。

设 $\Gamma_1,\cdots,\Gamma_L$ 是剖分 Δ_c 的贯穿线，并设 Γ_i 位于直线 v_i: $a_ix+b_iy+c_i=0$ 上，$i=1,\cdots,L$. 因为我们并不要求区域 D 是凸的，所以有可能两条或多条贯穿线位于同一条直线 v_i 上。即 $v_1,\cdots,v_L$ 不必是互异的。

取定如此一个胞腔 D_*，其边界的一部分也是区域 D 的边界 ∂D 的一部分，即所谓沿边的胞腔. 并以 D_* 作为源胞腔，并按下述方式引进本书第一章中所介绍的“流向图”：从 D_* 出发，按右手方向沿 ∂D 运动，并以遇到贯穿线的先后顺序排列所有的贯穿线 $\Gamma_1,\Gamma_2,\cdots,\Gamma_L$. 因为 Γ_i 贯穿 D，且 D 是单连通的，所以它分 D 为两部分 D_i 与 D_i'，其中 $D_*\subset D_i'$. 二元截断多项式 $(\Gamma_i)_*$ (它是前章定义 1.12 的特殊化)定义为([6])

$$(\Gamma_i)_\#(x,y)=\begin{cases}a_ix+b_iy+c_i, & \text{若 } (x,y)\in D_i,\\ 0, & \text{若 } (x,y)\in D_i'\cup\Gamma_i,\end{cases}$$

和

$$(\Gamma_i)_\#^{\mu+1}(x,y)=((\Gamma_i)_\#(x,y))^{\mu+1}.$$

按下列方式顺序排列 Δ_e 的所有内网点：从 Γ_1 的靠 D_* 的一端依次往 Γ_1 的另一端排列 Γ_1 上的所有内网点 $A_{1,1},\cdots,A_{1,m_1};\cdots$；从 D_* 按右手法则首先到达的 Γ_i 的一端逐次往另一端排列 Γ_i 上尚未被前面各步排完的内网点 $A_{i,1},\cdots,A_{i,m_i};\cdots$。因此 $A_{i,j},j=1,\cdots,m_i,i=1,\cdots,L$ 是互异的，且 $m_1+\cdots+m_L=V$。因为 Γ_L 上的所有内网点，必然被前面诸步骤所排完，所以必有 $m_L=0$。

假定相交于 $A_{i,j}$ 的贯穿线为 $\Gamma_{i,j,1},\cdots,\Gamma_{i,j,m(i,j)}$，$m(i,j)$ 为一不小于 2 的整数。显然这些贯穿线只是 $\Gamma_1,\cdots,\Gamma_L$ 中的一部分。考虑于 A_{ij} 处的协调条件

$$\sum_{t=1}^{m(i,j)}q_{i,j,t}(x,y)(a_{i,j,t}x+b_{i,j,t}y+c_{i,j,t})^{\mu+1}\equiv0,\qquad(2.6)$$

其中

$$\gamma_{i,j,t}:a_{i,j,t}x+b_{i,j,t}y+c_{i,j,t}=0$$

是 $\Gamma_{i,j,t}$ 所在的直线及其方程式。设 $A_{i,j}=(x_{ij},y_{ij})$，则上式实际可写成

$$\gamma_{i,j,t}:a_{i,j,t}(x-x_{ij})+b_{i,j,t}(y-y_{ij})=0,$$

此处 $a_{i,j,t}\cdot b_{i,j,s}\neq a_{i,j,s}\cdot b_{i,j,t},1\leqslant t<s\leqslant m(i,j)$。根据引理 2.1，(2.6) 有 $d_k^\mu(m(i,j))$ 个线性无关解

$$(q_{i,j,1,t},\cdots,q_{i,j,m(i,j),t}),\quad t=1,\cdots,d_k^\mu(m(i,j)).\qquad(2.7)$$

过 $A_{i,j}$ 的贯穿线的编序方法是：当我们面对 $A_{i,j}$ 站在源胞腔 D_* 里时，最靠右手的通过 $A_{i,j}$ 的贯穿线为 $\Gamma_{i,j,1}$，然后从它出发、按逆时针方向绕 $A_{i,j}$ 点即依次迂到 $\Gamma_{i,j,2},\cdots,\Gamma_{i,j,m(i,j)}$。

定义函数 $(\Gamma_{i,j,t})_+,1\leqslant t\leqslant m(i,j)$ 如下：

$$(\Gamma_{i,j,1})_+:=(\Gamma_{i,j,1})_\#,$$

而当 $t=2,\cdots,m(i,j)$ 时，

$$(\Gamma_{i,j,t})_+(x,y) := \begin{cases} (\Gamma_{i,j,t})_\#(x,y)\cdot(\Gamma_{i,j,1})_\#(x,y)/ \\ \quad (a_{i,j,1}x+b_{i,j,1}y+c_{i,j,1}),(x,y)\in\gamma_{i,j,1}, \\ 0,\ (x,y)\in\gamma_{i,j,1}. \end{cases}$$

再设

$$(\Gamma_{i,j,t})_+^{\mu+1}(x,y) := ((\Gamma_{i,j,t})_+(x,y))^{\mu+1}.$$

定义二元样条函数

$$S_{i,j,t} = \sum_{s=1}^{m(i,j)} q_{i,j,s,t}(\Gamma_{i,j,s})_+^{\mu+1}, \tag{2.8}$$

其中 $q_{i,j,s,t}\in \mathbf{P}_{k-\mu-1}$ 由(2.7)所确定。

显然，$S_{i,j,t}\in S_k^\mu(\Delta_c)$，$t=1,\cdots,d_k^\mu(m(i,j))$，且 $S_{i,j,t}$ 的支集是从 $\Gamma_{i,j,1}$ 按逆时针方向到 $\Gamma_{i,j,m(i,j)}$ 时所扫过的角域。

定理 2.3[6] 下述二元样条函数组

$$\begin{aligned}\mathscr{B} := \{& x^a y^b, x^c y^d(\Gamma_u)_\#^{\mu+1}(x,y), S_{i,j,t}(x,y) \mid 0\leqslant a+b\leqslant k, \\ & 0\leqslant c+d\leqslant k-\mu-1, u=1,\cdots,L, \\ & t=1,\cdots,d_k^\mu(m(i,j)), j=1,\cdots,m_i, i=1,\cdots,L\}\end{aligned}$$

是样条函数空间 $S_k^\mu(\Delta_c)$ 的基函数组。

证明 设

$$p+\sum_{u=1}^{L} q_u(\Gamma_u)_\#^{\mu+1}+\sum_{i=1}^{L}\sum_{j=1}^{m_i}\sum_{t=1}^{d_k^\mu(m(i,j))} e_{i,j,t}S_{i,j,t}=0, \tag{2.9}$$

此处 $p\in\mathbf{P}_k, q_u\in\mathbf{P}_{k-\mu-1}$，而 $e_{i,j,t}$ 是常数。

为证定理 2.3，只须根据(2.9)式去证明 p，所有 q_u，以及所有 $e_{i,j,t}$ 必恒为 0 即可。按定义，$(\Gamma_u)_\#$ 和 $S_{i,j,t}$ 在源胞腔 D_* 中恒为 0，所以由(2.9)推出 $p=0$。

若 $A_{i,j}$ 与源胞腔 D_* 位于 Γ_1 的同侧，根据 $S_{i,j,t}$ 所具有的支集性质，在所有与 Γ_1 相邻的胞腔中恒有 $S_{i,j,t}(x,y)\equiv 0$。如果 $A_{i,j}$ 与源胞腔 D_* 分别位于 Γ_1 的两侧时，引入变换

$$\hat{S}_{i,j,t}=S_{i,j,t}-\sum_{s=1}^{m(i,j)} q_{i,j,s,t}(\Gamma_{i,j,s})_\#^{\mu+1}. \tag{2.10}$$

显然，当 $A_{i,j}$ 与 D_* 分别位于 Γ_1 的两侧时，在与 Γ_1 相邻的一

切胞腔中恒有 $\hat{S}_{i,j,t}(x,y)\equiv 0$，其中各 $q_{i,j,r,t}$ 与(2.8)中的一致.

对这样一些 $A_{i,j}$，将(2.10)代入(2.9)，则对任一与 Γ_1 相邻的胞腔，均有

$$q_1(\Gamma_1)_*^{\mu+1}+\Sigma'\hat{q}_\mu(\Gamma_u)_*^{\mu+1}+\sum_{j=1}^{m_1}\sum_{t=1}^{d_k^\mu(m(i,j))}e_{1,j,t}S_{1,j,t}\equiv 0, \quad (2.11)$$

其中 $\hat{q}_u$ 是 q_u、或者是 q_u 与诸 $q_{i,j,s,t}$ 的线性组合，这里 $\Gamma_{i,j,s}=\Gamma_u, i\neq 1$；$\Sigma'$ 表示对一切与 Γ_1 相交的 $\Gamma_\mu(u\neq 1)$ 所求的和.

现在限制(2.11)的左端在 Γ_1 的相邻胞腔上取值. 依次考虑以 $A_{1,1},A_{1,2},\cdots,A_{1,m_1}$ 为公共网点的关联区域 $\mathrm{St}(A_{1,1}),\mathrm{St}(A_{1,2}),\cdots,\mathrm{St}(A_{1,m_1})$. 并且在每个关联区域 $\mathrm{St}(A_{1,j})$ 处均按逆时针方向来考虑. 这样，我们所要解的方程组是一个关于 $q_1(x,y)(a_1x+b_1y+c_1)^{\mu+1}$，$\hat{q}_u(x,y)(a_ux+b_\mu y+c_\mu)^{\mu+1}$（如果 Γ_μ 与 Γ_1 相交），和

$$\sum_{t=1}^{d_k^\mu(m(i,j))}e_{1,j,t}\hat{S}_{1,j,t}(x,y), j=1,\cdots,m_1 \qquad (2.12)$$

的方程组. 只须适当地调整该方程组的顺序、并去掉一些相关的方程式，我们可将该方程组的系数矩阵化为一个主对角线上的元素皆为 1 的一个下三角方阵. 从而 $q_1(x,y)\equiv 0$，并且由 (2.12) 给出的函数也皆恒为 0. 由 (2.8)，在 $\mathrm{St}(A_{1,j})$ 的每个胞腔上，有

$$\sum_{t=1}^{d_k^\mu(m(1,j))}e_{1,j,t}\sum_{s=1}^{n}(a_{1,j,s}x+b_{1,j,s}y+c_{1,j,s})^{\mu+1}\cdot q_{1,j,s,t}(x,y)\equiv 0,$$

其中 $\mu=1,\cdots,m(1,j)$. 上述方程组又可化为

$$\sum_{t=1}^{d_k^\mu(m(1,j))}e_{1,j,t}(q_{1,j,1,t},\cdots,q_{1,j,m(1,j),t})=0.$$

因为向量组 (2.7) 线性无关，所以

$$e_{1,j,t}=0, t=1,\cdots,d_k^\mu(m(1,j)).$$

进而上式对 $j=1,\cdots,m_1$ 恒成立. 于是(2.9)化为

$$\sum_{\mu=2}^{L} q_{\mu}(\Gamma_{\mu})_{+}^{\mu+1} + \sum_{i=2}^{L}\sum_{j=1}^{m_i}\sum_{s=1}^{d_k^{\mu}(m(i,j))} e_{i,j,s}s_{i,j,s} \equiv 0.$$

因为 $q_1 \equiv 0$，源胞腔 D_* 可扩张到使 Γ_2 上的某网线成为其边界的一部分。

重复以上证明过程，可推知 $q_2 \equiv 0$，且

$$e_{2,j,s} = 0, s = 1, \cdots, d_k^{\mu}(m(2,j)), j = 1, \cdots, m_2.$$

最终可得到 $q_{\mu} \equiv 0$，且 $e_{i,j,s} = 0$ 对一切 $\mu, s = 1, \cdots, d_k^{\mu}(m(i, j))$，和所有的 i 与 j。 □

称始于内网点、终止于D的边界 ∂D 的线段为D内的射线。在文[6]中，我们称一个剖分为拟贯穿剖分（Quasi-cross-cut），如果该剖分中的每一网线、或者是贯穿线的一部分、或者是D内某射线的一部分。常以 Δ_{qc} 记拟贯穿剖分。

设构成剖分 Δ_{qc} 的贯穿线为 L_1 条，射线为 L_2 条，且 $L_1 + L_2 = L$。如同在贯穿剖分中所作的那样取定 Δ_{qc} 的源胞腔 $D_*: \overline{D}_* \cap \partial D \neq \phi$。

我们按下面的次序为剖分线编号。从 D_* 出发，沿着 ∂D 按顺时针方向行进(即使D始终在我们的右边)，我们将(不重复地)依次遇见剖分线 $\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots, \Gamma_L$。其中遇见的贯穿线依次为 $\Gamma_1^1, \Gamma_2^1, \cdots, \Gamma_{L_1}^1$，射线依次为 $\Gamma_1^2, \Gamma_2^2, \cdots, \Gamma_{L_2}^2$。以下常设 Γ_i 位于直线

$$l_i: a_i x + b_i y + c_i = 0 \tag{2.13}$$

上。

定理 2.4[6] 设 Δ_{qc} 为单连通域D的拟贯穿剖分，它由 L_1 条贯穿线及 L_2 条射线所构成。设 Δ_{qc} 的V个内网点为 $A_1, \cdots, A_V$，且过内网点 A_i 的贯穿线及射线的总条数为 $N_i, i = 1, \cdots, V$。则有如下的维数公式

$$\dim S_k^{\mu}(\Delta_{qc}) = \binom{k+2}{2} + L_1\binom{k-\mu+1}{2} + \sum_{i=1}^{V} d_k^{\mu}(N_i),$$

其中 $d_k^{\mu}(N)$ 由公式(2.2)所给出。

下面导出拟贯穿剖分 Δ_{qc} 下的样条函数空间 $S_k^\mu(\Delta_{qc})$ 的基底。设 Γ_i 为剖分 Δ_{qc} 的任一剖分线。我们从 Γ_i 与 ∂D 的交点 p_i 出发，沿 Γ_i 向 D 内行进，依次遇到的内网点记为 $B_{i,1}, B_{i,2}, \cdots, B_{i,n_i}$。因此 B_{i,n_i} 为 Γ_i 上距 p_i 点最远的内网点。设 B_{i,n_i} 由剖分线 $\Gamma_{i,n_i,1}, \Gamma_{i,n_i,2}, \cdots, \Gamma_{i,n_i,m(i,n_i)}$ 相交而成。我们在 B_{i,n_i} 点将 Γ_i 延长，使与 ∂D 相交。这样将D分为两部分。若源胞腔 D_* 整个地属于这两部分之一，则我们从以 B_{i,n_i} 为顶点，Γ_i 与 $\Gamma_{i,n_i,j}(j=1,2,\cdots,m(i,n_i))$ 为边构成的所有大于或等于 π 且不含有 D_* 的角域中找出最接近于 π 的那一个角域，并记为 M_{i,n_i}。若 D_* 不能整个地属于前述的D的两部分之一，则我们从以 B_{i,n_i} 为顶点，Γ_i 与 $\Gamma_{i,n_i,j}(j=1,2,\cdots,m(i,n_i))$ 为边按逆时针方向构成的所有小于 π 且不含有 D_* 的角域中找出最接近于 π 的那一个角域，并记为 M_{i,n_i}。我们用下式来定义以 M_{i,n_i} 为局部支集的二元样条函数 $(\Gamma_i)_*$:

$$(\Gamma_i)_* = \begin{cases} a_i x + b_i y + c_i, & (x,y) \in M_{i,n_i}, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

显然，当 Γ_i 为贯穿剖分线时，$(\Gamma_i)_*$ 的定义与前面相一致。我们又定义

$$(\Gamma_i)_*^{\mu+1}(x,y) = [(\Gamma_i)_*(x,y)]^{\mu+1}.$$

设剖分 Δ_{qc} 产生了V个内网点。这些点将依下法编号。从 Γ_1 在 ∂D 上的始端出发，沿 Γ_1 向D内行进，我们将依次遇见的内网点分别记为 $A_{1,1}, A_{1,2}, \cdots, A_{1,n_1}$ 一般地，对介于1和L中的每个 i，我们从 Γ_i 在 ∂D 上的始端出发，沿 Γ_i 向D内行进，将依次遇见新的内网点分别记为 $A_{i,1}, A_{i,2}, \cdots, A_{i,n_i}$。注意，为避免重复，我们将在此之前已编过号的内网点去掉了。这样，所有编号的内网点 $A_{i,j}, j=1,2,\cdots,n_i, i=1,2,\cdots,L$ 是不同的，且有

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_L = V.$$

这里 $n_L = 0$，因为 Γ_L 上的内网点总是位于 $\Gamma_i(1 \leqslant i \leqslant L-1)$ 中的某一条上。

设内网点 $A_{i,j}$ 由网线 $\Gamma_{i,j,1}, \Gamma_{i,j,2}, \cdots, \Gamma_{i,j,m(i,j)}$ 交成，考虑

线性方程组

$$\sum_{s=1}^{m(i,j)} q_{i,j;s}(x,y)(a_{i,j;s}x+b_{i,j;s}y+c_{i,j;s})^{\mu+1}=0, \qquad (2.14)$$

其中 $l_{i,j;s}$: $a_{i,j;s}x+b_{i,j;s}y+c_{i,j;s}=0$ 为 $l_1,l_2,\cdots,l_L$ 中的某一条且 $\Gamma_{i,j;s}$ 位于 $l_{i,j;s}$ 上。如设 $A_{i,j}=(x_{i,j},y_{i,j})$，则有

$$l_{i,j;s}: a_{i,j;s}(x-x_{i,j;s})+b_{i,j;s}(y-y_{i,j;s})=0,$$

其中 $a_{i,j;s}b_{i,j;t}\neq a_{i,j;t}b_{i,j;s}, 1\leqslant s<t\leqslant m(i,j)$。方程组(1.14)有 $d_k^\mu(m(i,j))$ 个线性无关解组：

$$\begin{gathered}(q_{i,j;1,t},q_{i,j;2,t},\cdots,q_{i,j;m(i,j),t}^{\mu})\\ t=1,2,\cdots,d_k^\mu(m(i,j)),\end{gathered} \qquad (2.15)$$

现在来说明 $\Gamma_{i,j;s}$ 是如何编号的。围绕着 $A_{i,j}$ 点，我们从 $\Gamma_{i,j;1}$ 按反时针方向可依次遇到网线 $\Gamma_{i,j;2},\cdots,\Gamma_{i,j;m(i,j)}$。并且 $\Gamma_{i,j;1}$ 是这样取的：当我们面对点 $A_{i,j}$ 站在 D^* 中时，最靠近我们右手的通过点 $A_{i,j}$ 的剖分线记为 $\Gamma_{i,j;1}$。

下面来定义函数 $(\Gamma_{i,j;s})_+, 1\leqslant s\leqslant m(i,j)$：

$$(\Gamma_{i,j;1})_+=(\Gamma_{i,j;1})_*,$$

当 $s=2,3,\cdots,m(i,j)$ 有

$$(\Gamma_{i,j;s})_+=(\Gamma_{i,j;s})_*(\Gamma_{i,j;1})_*/(a_{i,j;1}x+b_{i,j;1}y+c_{i,j;1}),$$

其中 $(x,y)\notin l_{i,j;1}$。当 $(x,y)\in l_{i,j;1}$ 时，有 $(\Gamma_{i,j;s})_+=0$。又

$$(\Gamma_{i,j;s})_+^{\mu+1}(x,y)=((\Gamma_{i,j;s})_+(x,y))^{\mu+1}.$$

再定义二元样条函数

$$S_{i,j;t}=\sum_{s=1}^{m(i,j)} q_{i,j;s,t}(\Gamma_{i,j;s})_+^{\mu+1}, \qquad (2.16)$$

其中多项式 $q_{i,j;s,t}\in \mathbf{P}_{k-\mu-1}$ 如(1.15)式所示。显然，

$$\{S_{i,j;s,t}, t=1,2,\cdots,d_k^\mu(m(i,j))\}\subset S_k^\mu(\Delta_{qe},D).$$

如图 2.1，$S_{i,j;t}$ 的支集是从 $\Gamma_{i,j;1}$ 反时针进行到 $\Gamma_{i,j;m(i,j)}$ 的角域。

我们有如下关于样条空间 $S_k^\mu(\Delta_{qe})$ 基底的定理。

定理 2.5[9] 样条空间 $S_k^\mu(\Delta_{qe})$ 的基为如下样条函数的集合：

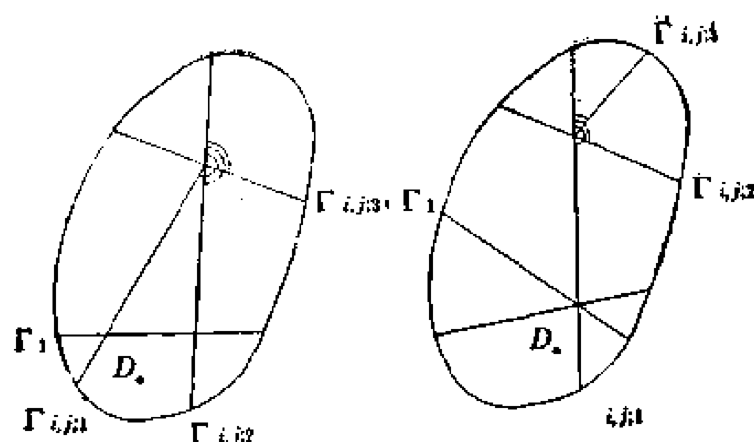


图 2.1

$$C=\{x^a y^b, x^c y^d(\Gamma_*^1)_\#^{\mu+1}(x,y), S_{i,j;t}(x,y): 0\leqslant a+b\leqslant k,$$
$$0\leqslant c+d\leqslant k-\mu-1, \mu=1,2,\cdots,L_1,$$
$$t=1,2,\cdots,d_k^\mu(m(i,j)),$$
$$j=1,2,\cdots,n_i, i=1,2,\cdots,L\}.$$

证明 设

$$p+\sum_{\mu=1}^{L_1} q_\mu(\Gamma_*^1)_\#^{\mu+1}+\sum_{i=1}^{L}\sum_{j=1}^{n_i}\sum_{t=1}^{d_k^\mu(m(i,j))} e_{i,j;t}S_{i,j;t}=0, \quad (2.17)$$

其中 $p\in \mathrm{P}_k, q_\mu\in \mathrm{P}_{k-\mu-1}$. 而 $e_{i,j;t}$ 为常数。 我们只须证明它们皆为零即可,因为 $(\Gamma_*^1)_\#$ 和 $S_{i,j;t}$ 在源胞腔 D_* 内皆为零,故 $p\equiv 0$。 □

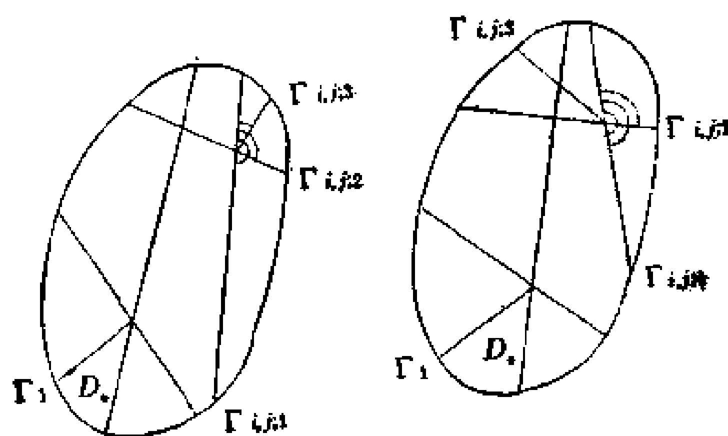


图 2.2

如图 2.2，当 Γ_1 为射线时，只要 $A_{i,j}$ 不在 Γ_1 上，由于 $S_{i,j;s}$ 所具有局部支集的性质，$S_{i,j;s}$ 在所有邻近 Γ_1 的胞腔(即该胞腔的一个顶点或一条边在 Γ_1 上）内处处为零。

若 Γ_1 为贯穿线，当 $A_{i,j}$ 与 D_* 位于 Γ_1 的同一侧时，由于 $S_{i,j;s}$ 所具有的局部支集性，$S_{i,j;s}$ 在所有邻近 Γ_1 的胞腔上处处为零(参见图 2.3)。

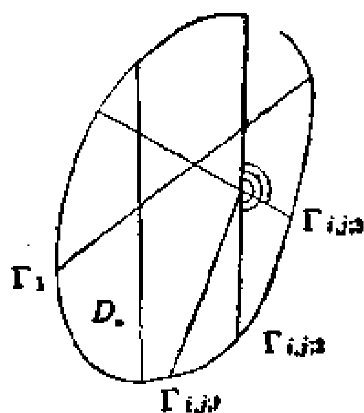


图 2.3

当 $A_{i,j}$ 与 D_* 位于 Γ_1 的两侧时，我们令

$$\hat{S}_{i,j;s}=S_{i,j;s}-\sum_{t=1}^{m(i,j)} q_{i,j;s,t}(\Gamma_{i,j;t})_*^{\mu+1},\tag{2.18}$$

则易见（参见图 2.4）$\hat{S}_{i,j;s}$ 在所有邻近 Γ_1 的胞腔内为零。这里 $q_{i,j;s,t}$ 的意义与(2.16)式中相同。

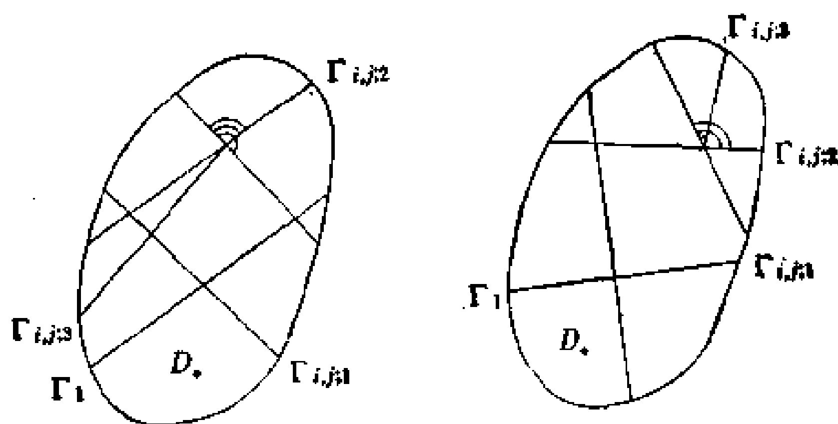


图 2.4

对于前述的 $A_{i,j}$，我们将(2.18)式代入(2.17)式当 $\Gamma_1=\Gamma_1^1$ 时，则对于所有的邻近 Γ_1 的胞腔有

$$\sum_{v=1}^{L_1}\hat{q}_v^1(\Gamma_v^1)_*^{\mu+1}+\sum_{v=1}^{L_2}\hat{q}_v^2(\Gamma_v^2)_*^{\mu+1}+\sum_{j=1}^{n_1}\sum_{s=1}^{d_\mu^1(m(1,j))}c_{1,j;s}S_{1,j;s}=0.\tag{2.19}$$

若 $\Gamma_1 = \Gamma_1^1$，则相应于(2.19)式有

$$q_1(\Gamma_1^1)_{*}^{\mu+1} + \sum_{u=2}^{L_2}{}' \hat{q}_u(\Gamma_u')_{*}^{\mu+1} + \sum_{\nu=1}^{L_1}{}' \hat{q}_\nu^2(\Gamma_\nu^2)_{*}^{\mu+1}$$

$$+ \sum_{j=1}^{n_1} \sum_{t=1}^{d_k^\mu(m(i,j))} e_{1,j;t} S_{1,j;t} = 0, \qquad (2.20)$$

这里 $\hat{q}_u$ 为 q_u 或者 q_u 与 $q_{i,j;s,t}$ 的线性组合，$\Gamma_{i,j;s,t} = \Gamma_u^1$；$\hat{q}_\nu^2$ 为 $q_{i,j;s,t}$ 的线性组合，$\Gamma_{i,j;s,t} = \Gamma_\nu^2$。(2.19)式里的 Σ' 是对所有与 $\Gamma_1 = \Gamma_1^1$ 相交的 Γ_u^1, Γ_ν^2 求和。(2.20)式里的 Σ' 是对所有与 $\Gamma_1 = \Gamma_1^1$ 相交的 $\Gamma_u'(u \neq 1), \Gamma_\nu^2$ 求和。

我们现在限制(2.19),(2.20)式的左边在 Γ_1 的邻近胞腔上取值。先考虑以 $\boldsymbol{A}_{1,1}$ 为公共顶点的胞腔，再考虑以 $\boldsymbol{A}_{1,2}$ 为公共顶点的胞腔，等等。最后考虑以 $\boldsymbol{A}_{1,n}$ 为公共顶点的胞腔，在每一公共顶点处，我们依次顺时针方向考虑各个胞腔.并将(2.19),(2.20)式的左边在这些胞腔上的显式写出。从而得到一组关于

$$\hat{q}_u(x,y)(a_u x + b_u y + C_u)^{\mu+1} \quad \hat{q}_\nu^2(x,y)(a_\nu x + b_\nu y + c_\nu)^{\mu+1}$$

和

$$\sum_{t=1}^{d_k^\mu(m(i,j))} e_{1,j;t} S_{1,j;t}(x,y)$$

$(\Gamma_u', \Gamma_\nu^2, \nu \neq 1$ 与 $\Gamma_1 = \Gamma_1^2$ 相交)的方程，或者得到一组关于

$$q_1(x,y)(a_1 x + b_1 y + c_1)^{\mu+1}, \quad \hat{q}_u(x,y)(a_u x + b_u y + c_u)^{\mu+1},$$
$$\hat{q}_\nu^2(x,y)(a_\nu x + b_\nu y + c_\nu)^{\mu+1}$$

和

$$\sum_{t=1}^{d_k^\mu(m(i,j))} e_{1,j;t} S_{1,j;t}(x,y)$$

$(\Gamma_u', u \neq 1, \Gamma_\nu^2$ 与 $\Gamma_1 = \Gamma_1^1$ 相交)的方程。这些方程组经过适当排列，去掉相关方程，所得方程组的系数矩阵为下三角阵，且主对元皆为 1。因此，对(2.19)式得出的方程组可解得

$$\sum_{t=1}^{d_k^\mu(m(i,j))} e_{1,j;t} S_{1,j;t} = 0; \qquad (2.21)$$

对由(2.20)式得出的方程组可解得

$$q_1 = 0, \quad \sum_{s=1}^{d_k^{\mu}(m(i,j))} e_{1,j;s} S_{1,j;s} = 0. \tag{2.22}$$

下面是两个例子，它们分别对应于(2.19)式和(2.20)式两种情况。

例1 如图 2.5，在(2.19)式中设

$$z_1 = \hat{q}_1^2(a_1x + b_1y + c_1)^{\mu+1}, z_2 = \hat{q}_2(a_2x + b_2y + c_2)^{\mu+1},$$

$$z_3 = \hat{q}_4(a_4x + b_4y + c_4)^{\mu+1}, \ z_4 = \sum_{s=1}^{d_k^{\mu}(3)} e_{1,1;s} S_{1,1;s},$$

则有

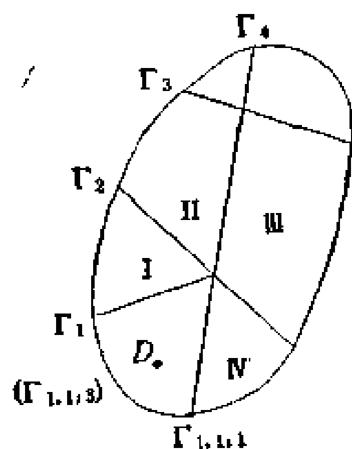


图 2.5

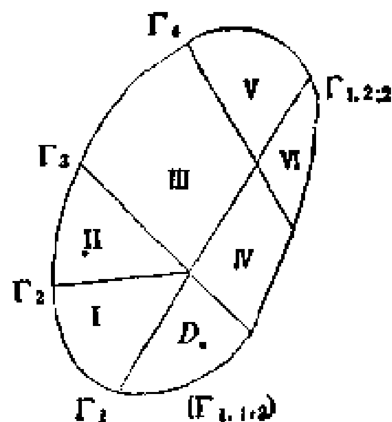


图 2.6

$$\begin{cases} z_1 = 0, & (x,y) \in \text{I}; \\ z_1 + z_2 = 0, & (x,y) \in \text{II}; \\ z_1 + z_2 + z_3 = 0, & (x,y) \in \text{III}; \\ z_1 + z_3 + z_4 = 0, & (x,y) \in \text{IV}. \end{cases}$$

所以 $\quad z_i \equiv 0, \ x = 1,2,3,4.$

例2 如图 2.6，在式(2.20)式中设

$$z_1 = q_1(a_1x + b_1y + c_1)^{\mu+1}, z_2 = \hat{q}_2^2(a_2x + b_2y + c_2)^{\mu+1},$$

$$z_3 = \hat{q}_3(a_3x + b_3y + c_3)^{\mu+1}, z_4 = \hat{q}_4(a_4x + b_4y + c_4)^{\mu+1},$$

$$z_5 = \sum_{s=1}^{d_k^\mu(3)} e_{1,1;s} S_{1,1;s}, \qquad z_6 = \sum_{s=1}^{d_k^\mu(2)} e_{1,2;s} S_{1,2;s}.$$

则有

$$\begin{aligned}
z_1 = 0, &\quad (x,y) \in \mathrm{I};\\
z_1 + z_2 = 0, &\quad (x,y) \in \mathrm{II},\\
z_1 + z_2 + z_3 = 0, &\quad (x,y) \in \mathrm{III};\\
z_2 + z_3 + z_5 = 0, &\quad (x,y) \in \mathrm{IV},\\
z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0, &\quad (x,y) \in \mathrm{V};\\
z_2 + z_3 + z_4 + z_5 + z_6 = 0, &\quad (x,y) \in \mathrm{VI},
\end{aligned}$$

解得

$$z_i = 0, i = 1, 2, \cdots, 6.$$

$$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0.$$

由(2.21),(2.22)和(2.16)式,对环绕 $\boldsymbol{A}_{1,j}$ 点的各胞腔及 $u = 1, 2, \cdots, m(i,j)$ 有

$$\sum_{s=1}^{d_k^\mu(m(1,j))} e_{1,j;s} \sum_{t=1}^{u} (a_{1,j;t}x + b_{1,j;t}y + c_{1,j;t})^{\mu+1} q_{1,j;t,s}(x,y) = 0. \tag{2.23}$$

方程组(2.23)可改写为

$$\sum_{s=1}^{d_k^\mu(m(i,j))} e_{1,j;s}(q_{1,j;1,s}, \cdots, q_{1,j;m(1,j),s}) = 0.$$

由于(2.15)式的线性无关性,我们有

$$e_{1,j;s} = 0, s = 1, 2, \cdots, d_k^\mu(m(1,j)),$$

这一结论显然对 $j = 1, 2, \cdots, n_1$ 皆成立。

这样,在 $\Gamma_1 = \Gamma_1^2$ 和 $\Gamma_1 = \Gamma_1^1$ 时,(2.17)式分别变为

$$\sum_{u=1}^{L_1} q_u (\Gamma_u^1)_{\#}^{\mu+1} + \sum_{i=2}^{L} \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{s=1}^{d_k^\mu(m(i,j))} e_{i,j;s} S_{i,j;s} = 0$$

和

$$\sum_{u=2}^{L_1} q_u (\Gamma_u^1)_{\#}^{\mu+1} + \sum_{i=2}^{L} \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{s=1}^{d_k^\mu(m(i,j))} e_{i,j;s} S_{i,j;s} = 0,$$

不管怎样，我们总可将源胞腔扩张，使其边界上包含有 Γ_2 上的网线段。当 Γ_2 为射线时，仿照前述证明，可证得 $c_{2,j;t}=0$, $t=1,2,\cdots,d_k^\mu(m(2,j))$, $j=1,2,\cdots,n_2$；当 Γ_2 为贯穿线 Γ_2^1 或 Γ_2^2 时，我们可证得 $q_1=0$, $c_{2,j;t}=0$ 或 $q_2=0, c_{2,j;t}=0$, $t=1,2,\cdots,d_k^\mu(m(2,j)), j=1,2,\cdots,n_2$. 这样，我们环绕 D 的边界重复这一过程，可证明 $q_u=0, c_{i,j;t}=0$ 对所有的 u,i,j 及 $t=1,2,\cdots,d_k^\mu(m(i,j))$ 成立。 □

一个二元样条函数 $s(x,y)\in S_k^\mu(\Delta)$ 被称为是 B 样条，如果它在其支集 Jordan 曲线外恒为 0 而在该曲线内取正值。

作为 B 样条存在的必要条件，有

命题 2.6[6] 对于给定剖分 Δ，若 $B(x,y)\in S_k^\mu(\Delta)(0\leqslant\mu\leqslant k-1)$ 是一个以凸多边形 F 为支集的 B 样条。设 A_i 为 F 的任一给定的顶点，过 A_i 的且在 F 内(含 F 边界)的网线数为 N_i，则

$$N_i>(k+1)/(k-\mu). \tag{2.24}$$

命题 2.6 是一条很重要的命题。它指明，为了得到一个具有局部支集的 B 样条函数，在支集的每一个顶点处、网线数的下界为 $(k+1)/(k-\mu)$。

该命题的证明是不难的。事实上，既然 A_i 是 $B(x,y)$ 的支集的顶点，那么在 A_i 处的协调条件相应的线性方程组解空间维数 $d_k^\mu(N_i)$ 应该大于 0，即

$$k-\mu-\left[\frac{\mu+1}{N_i-1}\right]>0. \tag{2.25}$$

因为 $k-\mu$ 是整数，(2.25)等价于

$$k-\mu-\frac{\mu+1}{N_i-1}>0.$$

从而(2.24)成立。 □

王筱沈在他的硕士论文(吉林大学数学系硕士论文，1985)中讨论了拟贯穿剖分上的异度样条函数空间 $S_k^\mu(\Delta_{qc})$ 的维数问题([8])。他证明了

$$\dim S_k^{\mu}(\Delta_{qc}) = \binom{k+2}{2} + \sum_{i=1}^{L} \binom{k-\mu_i+1}{2} + \sum_{\nu=1}^{V} d_k^{\mu_\nu}, \tag{2.26}$$

此处 L 为贯穿线总数，V 为内网点数，$d_k^{\mu_\nu}$ 为第 ν 点处相应于协调条件 (1.14)′ 解空间的维数. 设过第 ν 内网点有 m_ν 条网线，于其中各条网线上的光滑度分别为 $\mu_\nu^1, \cdots, \mu_\nu^{m_\nu}$，且记 $\bar{\mu}_\nu = \min(\mu_\nu^1, \cdots, \mu_\nu^{m_\nu})$. 王筱沈证明了

$$d_k^{\mu_\nu} = \sum_{h=1}^{k-\bar{\mu}_\nu} \left[-\bar{\mu}_\nu - 1 + \sum_{\mu_\nu^i \neq \bar{\mu}_\nu} (k - \mu_\nu^i - h + 1)_+ \right]_+.$$

§2. 矩形剖分与简单贯穿剖分上的样条函数空间

不失一般性，设矩形域 D 是一个开正方形 $\{(x, y) | 0 < x, y < 1\}$，取

$$0 < x_1 < \cdots < x_m < 1, \quad 0 < y_1 < \cdots < y_n < 1,$$

并用直线簇 $x - x_i = 0, i = 1, \cdots, m; y - y_j = 0, j = 1, \cdots, n$ 对 D 作矩形剖分 $\Delta = \Delta_{mn}$. 以 $D_{ij} = [x_i, x_{i+1}; y_j, y_{j+1}]$ 记顶点为 $(x_i, y_j), (x_{i+1}, y_j), (x_{i+1}, y_{j+1})$ 和 (x_i, y_{j+1}) 的胞腔.

设 $A = (x_i, y_j), i = 1, \cdots, m; j = 1, \cdots, n$ 为任一给定的内网点，它所毗邻的 4 个胞腔 $D_{i-1,j-1}, D_{i,j-1}, D_{i,j}$ 和 $D_{i-1,j}$ 分别简记之为 D_1, D_2, D_3 和 D_4. 过 A 的 4 条内网线分别是 $\Gamma_{12}: l_{12}(x, y) = x - x_i = 0$; $\Gamma_{34}: l_{34}(x, y) = x - x_i = 0$; $\Gamma_{23}: l_{23}(x, y) = y - y_j = 0$; 和 $\Gamma_{41}: l_{41}(x, y) = y - y_j = 0$. $s(x, y) \in S_k^{\mu}(\Delta_{mn})$ 的相应于以上 4 网线的光滑余因子为 $q_{12}(x, y)$, $q_{34}(x, y)$, $q_{23}(x, y)$, 和 $q_{41}(x, y) \in \mathrm{P}_{k-\mu-1}$.

根据 A 点处的协调条件，我们有

$$(q_{12} + q_{34})(x - x_i)^{\mu+1} + (q_{23} + q_{41})(y - y_j)^{\mu+1} \equiv 0. \tag{2.27}$$

因为 $(x-x_i)^{\mu+1}$ 与 $(y-y_j)^{\mu+1}$ 是互质的，所以存在 $t_1(x,y)$, $t_2(x,y)\in P_{k-2\mu-2}$, 使得

$$q_{12}+q_{34}=(y-y_j)^{\mu+1}\cdot t_1, q_{23}+q_{41}=(x-x_i)^{\mu+1}\cdot t_2.$$

以之代入(2.27)，即得到

$$[t_1(x,y)+t_2(x,y)](x-x_i)^{\mu+1}\cdot(y-y_j)^{\mu+1}\equiv 0.$$

从而有

$$t_1(x,y)\equiv -t_2(x,y)=:d(x,y)\in P_{k-2\mu-2}.$$

这样我们就找到了光滑余因子间的数量关系式

$$q_{12}(x,y)+q_{34}(x,y)\equiv(y-y_j)^{\mu+1}\cdot d(x,y), \qquad (2.28)$$

和

$$q_{23}(x,y)+q_{41}(x,y)\equiv-(x-x_i)^{\mu+1}\cdot d(x,y).$$

按以上的推导过程，我们还有：若 $\mu>(k-2)/2$，则

$$q_{12}(x,y)+q_{34}(x,y)\equiv q_{23}(x,y)+q_{41}(x,y)\equiv 0. \qquad (2.29)$$

取定胞腔 D_{00} 作为源胞腔，并按下述方式形成流向图 $\vec{C}$：从 D_{00} 流向 D_{ij} 的方式是，该动点依先后顺序流入 $D_{10},\cdots,D_{i0}$，然后再依先后顺序流入 $D_{i1},\cdots,D_{ij}$。

根据第一章定理 1.13，我们有

定理 2.7[10] 任一 $s(x,y)\in S_k^{\mu}(\Delta_{mn})$ 均有如下唯一的表达式 $(0\leqslant\mu<k)$

$$s(x,y)=p(x,y)+\sum_{i=1}^{m}b_i(x,y)(x-x_i)_+^{\mu+1}+\sum_{j=1}^{n}c_j(x,y)(y-y_j)_+^{\mu+1}+\sum_{i=1}^{m}\cdot\sum_{j=1}^{n}d_{ij}(x,y)(x-x_i)_+^{\mu+1}\cdot(y-y_j)_+^{\mu+1}, \qquad (2.30)$$

其中 $p\in P_k$, b_i 和 $c_j\in P_{k-\mu-1}$, $d_{ij}\in P_{k-2\mu-2}$, 并且我们约定

$$P_l=\{0\}, \text{当 } l<0 \text{ 时}. \qquad (2.31)$$

众所周知，当 $X=L_p(D)(1\leqslant p<\infty)$ 和 $X=C(\overline{D})(p=\infty)$ 时，$(\mu+2,\mu+2)$ 阶的笛卡尔乘积样条函数在 X 中是稠密

的。从而下述定理为真([10]):

定理 2.8 若Δ取遍D的所有可能的矩形剖分时，$S_k^\mu(\Delta)$的并集在X内的闭包是整个X的充分必要条件是$\mu \leqslant (k-2)/2$。若$\mu > (k-2)/2$时，则该闭包仅是由所有以下函数组成的空间

$$p(x,y) + q(x,y)\cdot f(x) + r(x,y)\cdot g(y),$$

此处$p(x,y)\in \mathrm{P}_k, q(x,y)\in \mathrm{P}_{k-\mu-1}, r(x,y)\in \mathrm{P}_{k-\mu-1}$。

引入记号

$$0 = x_{-k} = \cdots = x_{-1} = x_0, \quad x_{m+1} = \cdots = x_{m+k+1} = 1,$$

$$0 = y_{-k} = \cdots = y_{-1} = y_0, \quad y_{n+1} = \cdots = y_{n+k+1} = 1.$$

一元规范化B-样条为

$$\begin{aligned} B_i(x) &= B_{i,\mu+2}(x) = (x_i - x_{i-\mu-2})[x_{i-\mu-2},\cdots,x_i] \\ &\quad \cdot(\cdot - x)_+^{\mu+1}, \\ C_j(y) &= C_{j,\mu+2}(y) = (y_j - y_{j-\mu-2})[y_{j-\mu-2},\cdots,y_j] \\ &\quad \cdot(\cdot - y)_+^{\mu+1}, \end{aligned} \tag{2.32}$$

$$i = 1,\cdots,m+\mu+2;\ j = 1,\cdots,n+\mu+2.$$

定理 2.9[10]

$$\dim S_k^\mu(\Delta_{mn}) = \binom{k+2}{2} + (m+n)\binom{k-\mu+1}{2} + mn\binom{k-2\mu}{2}. \tag{2.33}$$

当$\mu \leqslant (k-2)/2$时，$S_k^\mu(\Delta_{mn})$的支架函数为

$$\begin{aligned} \mathscr{B}_1 := \{&x^{k-2\mu-1+a}y^b B_{i,\mu+2}(x), y^{k-2\mu-1+c}x^d C_{j,\mu+2}(y), \\ &x^u y^v B_{p,\mu+2}(x) C_{q,\mu+2}(y)\}, \end{aligned} \tag{2.34}$$

其中$0 \leqslant a+b \leqslant \mu, 0 \leqslant c+d \leqslant \mu; i,p = 1,\cdots,m+\mu+2;$ $j,q = 1,\cdots,n+\mu+2; 0 \leqslant u+v \leqslant k-2\mu-2$。

当$\mu > (k-2)/2$时，$S_k^\mu(\Delta_{mn})$的支架函数为

$$\mathscr{B}_2 := \{x^u y^v, x^a y^b \mathscr{B}_{i,\mu+2}(x), x^c y^d C_{j,\mu+2}(y)\}, \tag{2.35}$$

其中$k-\mu-1 \leqslant u,\ v \leqslant \mu$，且$2k-2\mu-1 \leqslant u+v \leqslant k$，$i = 1,\cdots,m+\mu+2; j = 1,\cdots,n+\mu+2; 0 \leqslant a+b \leqslant k-\mu-1;\ 0 \leqslant c+d \leqslant k-\mu-1$。

以下介绍简单贯穿剖分及其上的样条函数空间。一个贯穿剖分 Δ_c 说是简单贯穿剖分，如果于其中每一个内网点处仅有两条贯穿线相交。常以 Δ_{sc} 记简单贯穿剖分 (Simple cross-cut)。Δ_{sc} 显然是矩形剖分的相当一般化的推广，而且有关后者的所有结论又可完全推广到前者上。下面介绍一些相应的结论。

由本章定理 2.2，有

推论 2.10[10]

$$\dim S_k^\mu(\Delta_{sc}) = \binom{k+2}{2} + L\binom{k-\mu+1}{2} + V\binom{k-2\mu}{2}, \tag{2.36}$$

其中 L 为 Δ_{sc} 中贯穿线总数，V 为内网点数。

在[10]中，我们还证明了

定理 2.11 简单贯穿剖分 Δ_{sc} 上的样条函数空间 $S_k^\mu(\Delta_{sc})$，$0 \leqslant \mu < k$ 的基函数为

$$\begin{aligned}\mathscr{B} := \{& x^a y^b,\ x^c y^d (\Gamma_i)_+^{\mu+1}(x,y),\ x^f y^g (\Gamma_u)_+^{\mu+1}(x,y)(\Gamma_v)_+^{\mu+1}(x,y) \mid \\ & u \neq v,\ \Gamma_u \cap \Gamma_v \cap D \neq \phi,\ 0 \leqslant a+b \leqslant k,\ 0 \leqslant c+d \leqslant \\ & k-\mu-1,\ 0 \leqslant f+g \leqslant k-2\mu-2,\ u, v, i = 1, \cdots, \\ & L\},\end{aligned} \tag{2.37}$$

其中函数 $x^f y^g (\Gamma_u)_+^{\mu+1}(x,y)(\Gamma_v)_+^{\mu+1}(x,y)$ 仅当 $k \geqslant 2\mu+2$ 时才存在。

对于简单贯穿剖分，也有类似于定理 2.8 的结论成立。为叙述此结果，先须引人一些记号。设简单贯穿剖分 Δ_{sc} 中诸贯穿线的法向量集合为 $\{(a_i, b_i)\}_{i=1}^N$，其中 (a_i, b_i) 与 (a_j, b_j) 线性无关 $(i \neq j)$。又以 $C = [c_{ip}]$ 表一矩阵；$\Gamma_{ip}: a_i x + b_i y + c_{ip} = 0$ 为一族直线；且设简单贯穿剖分 $\Delta_{sc} = \Delta(N, C)$ 由贯穿线 $l_{ij} = l_{ipj}, j = 1, \cdots, t_i$，且 $i = 1, \cdots, N$ 所组成，其中每一 l_{ipj} 均为 Γ_{ip} 上的线段。再记

$$\tilde{S}_k^\mu(N) := \bigcup_C S_k^\mu(\Delta(N, C)).$$

定理 2.12[10] $\tilde{S}_k^\mu(N)$ 在 D 的紧致子集上一致收敛拓扑意义下

的闭包是 $C(D)$ 的必要充分条件是 $\mu\leqslant(k-2)/2$。若 $\mu>(k-2)/2$，则 $\tilde{S}_k^\mu(N)$ 的这个闭包是形如下的连续函数空间：
$p(x,y)+q_1(x,y)f_1(a_1x+b_1y)+\cdots+q_N(x,y)f_N(a_Nx+b_Ny)$，
其中 $p\in\mathbf{P}_k,q_1,\cdots,q_N\in\mathbf{P}_{k-\mu-1}$，而 $f_1,\cdots,f_N$ 均为一元连续函数。

自然，如果D是有界域，则上确界模和 L_p 模拓扑可被采用。

下面讨论定理 2.3 中的 $s_{i,j,\nu}(x,y)$ 等的计算问题。

按 $s_{i,j,\nu}(x,y)$ 的定义，关键是计算(2.7)中的 $(q_{i,j,1,t},\cdots,q_{i,j,m(i,j),t}),t=1,\cdots,d_k^t(m(i,j))$，亦即，如何去求解协调条件所界定的方程组(2.6)。细而言之，上述问题可简化为去求解线性方程组

$$\sum_{t=1}^{n}q_t(x,y)(\alpha_tx+\beta_ty)^{\mu+1}\equiv 0,$$

此处 $q_t\in\mathbf{P}_{k-\mu-1}$，且 $\alpha_t\beta_r-\alpha_r\beta_t\neq 0\,(t\neq r)$。显然，$q_t(x,y)$ 可表现为

$$q_t(x,y)=\sum_{0\leqslant i+j\leqslant k-\mu-1}c_{ij}^t(\alpha_tx+\beta_ty)^i(\alpha_{t+1}x+\beta_{t+1}y)^j. \quad (2.38)$$

以此代入上述线性方程组，即得到其等价形式

$$\sum_{t=1}^{n}\sum_{\mu+1\leqslant i+j\leqslant k}c_{i-\mu-1,j}^t\sum_{p=0}^{i}\sum_{q=0}^{j}\binom{i}{i-p}\binom{j}{j-q}\cdot\alpha_t^p\alpha_{t+1}^q\beta_t^{i-p}\beta_{t+1}^{j-q}\cdot x^{p+q}y^{(i+j)-(p+q)}\equiv 0,$$

其中 $c_{ij}^t:=0$，若 $i<0$。令上面各独项式系数分别为0，即诱导出与上式等价的方程组

$$\sum_{t=1}^{n}\sum_{u+v=l}\sum_{i+j=m}\binom{i}{u}\binom{j}{v}\alpha_t^u\beta_t^{i-u}\alpha_{t+1}^v\beta_{t+1}^{j-v}c_{i-\mu-1,j}^t=0, \quad (2.39)$$

对一切 $0\leqslant l\leqslant m$，和 $\mu+1\leqslant m\leqslant k$。

所以原则上讲，求解协调方程组的问题，就是求解形如(2.39)的线性方程组的问题。为使我们的解法更便于理解，现仅就 $n=3$，且 $(\alpha_1,\beta_1)=(0,1)$，$(\alpha_2,\beta_2)=(1,0)$，$(\alpha_3,\beta_3)=(1,1)$ 的情况来介绍([6])。

设 $C_m = [C_{m1}, C_{m2}, C_{m3}]$，此处

$$C_{mt} = [C^t_{m-\mu-1,0}, C^t_{m-\mu-2,1}, \cdots, C^t_{0,m-\mu-1}], t = 1,2,3.$$

考虑系数矩阵

$$A_m = [A_1^{(m)} A_2^{(m)} A_3^{(m)}],$$

其中 $A_1^{(m)}$、$A_2^{(m)}$ 和 $A_3^{(m)}$ 皆为 $(m+1)\times(m-\mu)$ 矩阵：

$$A_1^{(m)} = \begin{bmatrix} C_m \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_m = \left[(-1)^{i+j}\binom{j}{i}\right]_{(m-\mu)\times(m-\mu)},$$

其中 0 是零矩阵，且规定 $\binom{j}{i} := 0$，若 $j < i$；

$$A_2^{(m)} = \begin{bmatrix}
(-1)^m\binom{m}{0} & 0 & 0\cdots\cdots\cdots\cdots 0 \\
(-1)^{m-1}\binom{m}{1} & (-1)^{m-1}\binom{m-1}{0} & 0\cdots\cdots\cdots\cdots 0 \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\
(-1)^{\mu+1}\binom{m}{m-\mu-1} & (-1)^{\mu+1}\binom{m-1}{m-\mu-2} & \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ (-1)^{\mu+1}\binom{\mu+1}{0} \\
(-1)^{\mu}\binom{m}{m-\mu} & (-1)^{\mu}\binom{m-1}{m-\mu-1} & \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ (-1)^{\mu}\binom{\mu+1}{1} \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\
1 & 1 & \cdots\cdots\cdots\cdots 1
\end{bmatrix},$$

$$A_3^{(m)} = \begin{bmatrix} 0 \\ D_m \end{bmatrix},\quad D_m = \begin{bmatrix} 0 & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & 0 \end{bmatrix}_{(m-\mu)\times(m-\mu)}.$$

于是(2.39)可表示为

$$A_m C_m^T = 0,\quad m = \mu + 1, \cdots, k. \tag{2.40}$$

注意到 A_m 是满秩的。重写 $C_m = [C_{m1}, C_{m2}, C_{m3}]$ 为 $[C_{m1}, C'_{m2}, C'_{m3}]$，其中 C'_{m2} 和 C'_{m3} 分别为 $\mu+1$ 和 $2m-3\mu-1$ 维向量.

其中

$$H_m = \begin{bmatrix} (-1)^m\binom{m}{0} & 0 \\ (-1)^{m-1}\binom{m}{1} & (-1)^{m-1}\binom{m-1}{0} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ (-1)^{\mu+r}\binom{m}{m-\mu-r} & (-1)^{\mu+r}\binom{m-1}{m-\mu-r-1} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ (-1)^{\mu+1}\binom{m}{m-\mu-1} & (-1)^{\mu+r}\binom{m-1}{m-\mu-2} \end{bmatrix}$$

$$K_m = \begin{bmatrix} (-1)^{\mu}\binom{m}{m-\mu} & (-1)^{\mu}\binom{m-1}{m-\mu-1} \\ (-1)^{\mu-1}\binom{m}{m-\mu+1} & (-1)^{\mu-1}\binom{m-1}{m-\mu} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ -\binom{m}{m-1} & -\binom{m-1}{m-2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

视整个 C'_{m3} 为参数，然后去求解 C_{m1} 和 C'_{m2}。分别如下两种情况：

(1) $m=2\mu+r, r\geqslant 1$。

此时(2.40)可写为

$$
\begin{aligned}
C_{m1} &= C_m^{-1}(H_m K_m^{-1} R_{m2} - R_{m1})C'_{m3},\\
C'_{m2} &= -K_m^{-1} R_{m2} C'_{m3},
\end{aligned} \tag{2.41}
$$

$$
\left.\begin{matrix}
 & 0 \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots \\
\cdots\cdots & (-1)^{\mu+r}\binom{m-\mu}{0} \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots \\
\cdots\cdots & (-1)^{\mu+1}\binom{m-\mu}{m-2\mu-1}
\end{matrix}\right],
$$

$$
\left.\begin{matrix}
\cdots\cdots & (-1)^{\mu}\binom{m-\mu}{m-2\mu} \\
\cdots\cdots & (-1)^{\mu-1}\binom{m-\mu}{m-2\mu+1} \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots \\
\cdots\cdots & -\binom{m-\mu}{m-\mu-1} \\
\cdots\cdots & 1
\end{matrix}\right],
$$

$$R_{m1}=\begin{bmatrix} & 0 & & 0 \\ (-1)^{m-\mu-1}\binom{m-\mu-1}{0} & \ddots & 0 & \cdots\cdots\cdots \\ \vdots & & \ddots & \\ (-1)^{\mu+1}\binom{m-\mu-1}{m-2\mu-2} & \cdots\cdots & & (-1)^{\mu+1} \end{bmatrix}$$

且

$$R_{m2}=\begin{bmatrix} (-1)^{\mu}\binom{m-\mu-1}{m-2\mu-1} & \cdots\cdots & (-1)^{\mu}\binom{\mu+1}{1} \\ (-1)^{\mu-1}\binom{m-\mu-1}{m-2\mu} & \cdots\cdots & (-1)^{\mu-1}\binom{\mu+1}{2} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ -\binom{m-\mu-1}{m-\mu-2} & \cdots\cdots & -\binom{\mu+1}{\mu} \\ 1 & \cdots\cdots & 1 \end{bmatrix}$$

这里 R_{m1} 和 R_{m2} 分别为 $(m-\mu)\times(2m-3\mu-1)$ 和 $(\mu+1)\times(2m-3\mu-1)$ 矩阵。

显然

$$C_m^{-1}=\left[\binom{j}{i}\right]_{(m-\mu)\times(m-\mu)}.$$

剩下的只须来求 K_m 的逆 K_m^{-1}。引入记号

$$p(x)=\sum_{i=0}^{\mu}d_ix^{m-i}:=x^{m-\mu}q(x),$$

$$\begin{bmatrix} & & 0 & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ & & & \iddots & & \\ \binom{\mu+1}{0} & 0 & \cdots & 0\ 1\ 0 & \cdots\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} & & & 1 \\ 0 & & \iddots & \\ & \iddots & & 0 \\ 1 & & 0 & \end{bmatrix},$$

则有

$$\begin{bmatrix} ((-1)^{\mu}/\mu!)p^{(\mu)}(1) \\ \vdots \\ -p'(1) \\ p(1) \end{bmatrix} = K_{m}\begin{bmatrix} d_0 \\ \vdots \\ d_{\mu-1} \\ d_{\mu} \end{bmatrix}, \qquad (2.42)$$

$$q^{(\nu)}(1) = \sum_{i=0}^{\nu}\binom{\nu}{i}(-1)^{\nu-i}(m-\mu)$$
$$\cdots(m-\mu+\nu-i-1)p^{(i)}(1).$$

记

$$
U_m = \begin{bmatrix}
\mu! & 0 & 0 & & & & \\
\mu(\mu-1)\cdots 2 & (\mu-1)! & 0 & & \mathbf{0} & & \\
\mu(\mu-1)\cdots 3 & (\mu-1)\cdots 2 & (\mu-2)! & \ddots & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & & \\
\mu(\mu-1) & (\mu-1)(\mu-2) & (\mu-2)(\mu-3) & \cdots & 2! & 0 & 0 \\
\mu & \mu-1 & \mu-2 & \cdots\cdots & 2 & 1! & 0 \\
1 & 1 & 1 & \cdots\cdots & 1 & 1 & 0!
\end{bmatrix},
$$

$$
T_m = \begin{bmatrix}
(-1)^{\mu}\mu! & (-1)^{\mu}(m-\mu)\binom{\mu}{\mu-1}(\mu-1)! & \cdots & (-1)^{\mu}(m-\mu)\cdots(m-2)\binom{\mu}{1}1!, & (-1)^{\mu}(m-\mu)\cdots(m-1) \\
 & (-1)^{\mu-1}(\mu-1)! & \cdots\cdots & (-1)^{\mu-1}(m-\mu)\cdots(m-3)\binom{\mu-1}{1}1!, & (-1)^{\mu-1}(m-\mu)\cdots(m-2) \\
 & & \ddots & & \vdots \\
 & & 2! & 2(m-\mu) & (m-\mu)(m-\mu+1) \\
 & & & -1! & -(m-\mu) \\
 & \mathbf{0} & & & 0!
\end{bmatrix}.
$$

则我们有

$$\begin{bmatrix} q^{(\mu)}(1) \\ \vdots \\ q(1) \end{bmatrix} = U_m \begin{bmatrix} d_0 \\ \vdots \\ d_\mu \end{bmatrix} = T_m \begin{bmatrix} (-1)^\mu p^{(\mu)}(1)/\mu! \\ \vdots \\ p(1) \end{bmatrix}.$$

所以

$$K_m^{-1} = U_m^{-1} T_m,$$

其中 $U_m^{-1} = [\mu_{ij}]$，而

$$\mu_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{若 } 0 \leqslant i < j \leqslant \mu, \\ (-1)^{i-j}/(i-j)!(\mu-i)!, & \text{若 } 0 \leqslant j \leqslant i \leqslant \mu. \end{cases}$$

(II) $m \leqslant 2\mu$.

因若 $m+1 \geqslant 3(m-\mu)$，则 $C_m = 0$。故我们仅讨论 $(3\mu+1)/2 < m \leqslant 2\mu$ 的情况。重写(2.40)为

$$C_{m1} = C_m^{-1} F_m E_m^{-1} V_m C'_{m3}, \quad C'_{m2} = -E_m^{-1} V_m C_{m3}, \tag{2.43}$$

其中

$$F_m = \begin{bmatrix} (-1)^m \binom{m}{0} & & & & \\ (-1)^{m-1}\binom{m}{1} & (-1)^{m-1}\binom{m-1}{0} & \ddots & & 0 \\ \cdots & \cdots & & & \\ (-1)^{\mu+1}\binom{m}{m-\mu-1} & (-1)^{\mu+1}\binom{m-1}{m-\mu-2} & \cdots & (-1)^{\mu+1}\binom{\mu+1}{0} & 0\cdots 0 \end{bmatrix}$$

是 $(m-\mu)\times(\mu+1)$ 矩阵，

$$V_m = \begin{bmatrix} V_{m1} \\ V_{m2} \\ V_{m3} \end{bmatrix},$$

$V_{m1} = V_{m3}$ 是 $(2\mu - m + 1) \times (2m - 3\mu - 1)$ 零矩阵，而

$$V_{m2} = \begin{bmatrix} 0 & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & 0 \end{bmatrix}_{(2m-3\mu-1)\times(2m-3\mu-1)},$$

$$E_m = \begin{bmatrix}
(-1)^{\mu}\binom{m}{\mu} & (-1)^{\mu}\binom{m-1}{\mu} & \cdots & (-1)^{\mu}\binom{\mu+1}{\mu} & & & \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & 0 & \\
(-1)^{m}\binom{m}{2\mu-m} & (-1)^{m}\binom{m-1}{2\mu-m} & \cdots & (-1)^{m}\binom{\mu+1}{2\mu-m} & 0 & \cdots\cdots 0 & 1 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \iddots & \iddots \\
-\binom{m}{1} & -\binom{m-1}{1} & \cdots & -\binom{\mu+1}{1} & 0 & \iddots & 0 \\
1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & & 1
\end{bmatrix}.$$

因为 $C_m^{-1} = \left[\binom{j}{i}\right]$ 为已知，所以只须往求矩阵 E_m 的逆。把 E_m 写作

$$E_m = \begin{bmatrix} E_{m1} & 0 \\ E_{m2} & E_{m3} \end{bmatrix},$$

其中

$$E_{m3} = \begin{bmatrix} & & & 1 \\ & 0 & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & 0 & \\ 1 & & & \end{bmatrix}.$$

显然 $E_{m3}^{-1} = E_{m3}$，所以

$$E_m^{-1} = \begin{bmatrix} E_{m1}^{-1} & 0 \\ -E_{m3}E_{m2}E_{m1}^{-1} & E_{m3} \end{bmatrix}.$$

于是只须往求 E_{m1}^{-1}。这可采用求逆矩阵的加边法来完成。事实上，若

$$G_n = \begin{bmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1,n-1} & g_{1n} \\ g_{n-1,1} & \cdots & g_{n-1,n-1} & g_{n-1,n} \\ g_{n1} & \cdots & g_{n-1,n} & g_{nn} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} G_{n-1} & u_n \\ v_n & g_{nn} \end{bmatrix},$$

则其逆矩阵为

$$G_n^{-1} = \begin{bmatrix} G_{n-1}^{-1} + \dfrac{1}{\alpha_n} G_{n-1}^{-1}u_nv_nG_{n-1}^{-1} & \dfrac{1}{\alpha_n} G_{n-1}^{-1}u_n \\ \dfrac{-1}{\alpha_n} v_nG_{n-1}^{-1} & \dfrac{1}{\alpha_n} \end{bmatrix},$$

其中 $\alpha_n = g_{nn} - v_nG_{n-1}^{-1}u_n$。

总而言之，对于满足 $(3\mu + 1)/2 < m \leqslant k$ 的任何 m，我们可用(2.41)(如果 $m > 2\mu$)，或(2.43)(如果 $m \leqslant 2\mu$)来求 $C_m = [C_{m1}, C_{m2}, C_{m3}] = [C_{m1}, C'_{m1}, C'_{m3}]$，其时 $d_k^\mu(3)$ 个向量 $[C'_{[(3\mu+1)/2]+1,3}, \cdots, C'_{k,3}]$ 依次取为 $[1,0,\cdots,0]$，$[0,1,0,\cdots,0]$，$\cdots$，$[0,\cdots,0,1]$。当然，如果 $m \leqslant (3\mu + 1)/2$，则 $C_m = 0$。这样一来，对于满足 $\mu + 1 \leqslant m \leqslant k$ 的一切 m，C_m 均被确定。换言之，形如(2.39)的方程组($n = 3$，且 $(\alpha_1,\beta_1) = (0,1)$，$(\alpha_2,\beta_2) = (1,0)$，$(\alpha_3,\beta_3) = (1,1)$)的解已经求得。

以下仅就 $\mu \leqslant 4$ 的诸情况，具体给出 K_m^{-1} 和 E_m^{-1}。

当 $\mu=0$ 和 $\mu=1$ 时，情形（II）不会发生。而 $\mu=0$ 时，K_m 是一纯量 1，因而它的逆也是 1。$\mu=1$ 时，

$$K_m=\begin{bmatrix}-m & -(m-1)\\ 1 & 1\end{bmatrix},$$

因而

$$K_m^{-1}=\begin{bmatrix}-1 & 1-m\\ 1 & m\end{bmatrix}.$$

当 $\mu=2$ 时，情形（II）仅在 $m=4$ 时出现，而此时

$$E_4=\begin{bmatrix}6 & 3\\ -4 & -3\end{bmatrix},\quad E_4^{-1}=\begin{bmatrix}1/2 & 1/2\\ -2/3 & -1\end{bmatrix}.$$

对于 $\mu=2$ 和 $m\geqslant 5$，我们有

$$K_m^{-1}=\begin{bmatrix}1 & m-2 & (m-1)(m-2)/2\\ -2 & -(2m-3) & -m(m-2)\\ 1 & m-1 & m(m-1)/2\end{bmatrix}.$$

当 $\mu=3$ 时，情形（II）仅当 $m=6$ 时出现，其时

$$E_6=\begin{bmatrix}-20 & -10 & -4 & 0\\ 15 & 10 & 6 & 0\\ -6 & -5 & -4 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix},$$

而

$$E_6^{-1}=\begin{bmatrix}-1/2 & -1 & -1 & 0\\ 6/5 & 14/5 & 3 & 0\\ -3/4 & -2 & -5/2 & 0\\ 1/20 & 1/5 & 1/2 & 1\end{bmatrix}.$$

对于 $\mu=3$ 和 $m\geqslant 7$，

$$K_m^{-1}=\begin{bmatrix}-1 & -(m-3) & -(m-3)(m-2)/2\\ 3 & 3m-8 & (m-3)(3m-4)/2\\ -3 & -3m+7 & -(m-1)(3m-8)/2\\ 1 & m-2 & (m-1)(m-2)/2\end{bmatrix}$$

$$
\left.\begin{matrix}
-(m-3)(m-2)(m-1)/6 \\
m(m-3)(m-2)/2 \\
-m(m-3)(m-1)/2 \\
m(m-2)(m-1)/6
\end{matrix}\right].
$$

当 $\mu=4$ 时,非平凡解仅当 $m\geqslant 7$ 时存在,而情形（II）仅当 $m=7,8$ 才出现。其时,我们有

$$
E_7=\begin{bmatrix}
35 & 15 & 5 & 0 & 0 \\
-35 & -20 & -10 & 0 & 0 \\
21 & 15 & 10 & 0 & 0 \\
-7 & -6 & -5 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 0
\end{bmatrix},
$$

$$
E_7^{-1}=\begin{bmatrix}
2/7 & 3/7 & 2/7 & 0 & 0 \\
-4/5 & -7/5 & -1 & 0 & 0 \\
3/5 & 6/5 & 1 & 0 & 0 \\
-3/35 & -8/35 & -2/7 & 0 & 1 \\
1/5 & 3/5 & 1 & 1 & 0
\end{bmatrix},
$$

$$
E_8=\begin{bmatrix}
70 & 35 & 15 & 5 & 0 \\
-56 & -35 & -20 & -10 & 0 \\
28 & 21 & 15 & 10 & 0 \\
-8 & -7 & -6 & -5 & 0 \\
1 & 1 & & 1 & 1
\end{bmatrix},
$$

$$
E_8^{-1}=\begin{bmatrix}
1/2 & 3/2 & 5/2 & 5/2 & 0 \\
-12/7 & -39/7 & -68/7 & -10 & 0 \\
2 & 7 & 13 & 14 & 0 \\
-4/5 & -3 & -6 & -7 & 0 \\
1/70 & 1/14 & 3/14 & 1/2 & 1
\end{bmatrix}.
$$

当 $\mu=4$,且 $m\geqslant 9$ 时,我们有

$$
K_m^{-1}=\begin{bmatrix}
1 & m-4 & \dfrac{(m-4)(m-3)}{2} & \dfrac{(m-4)(m-3)(m-2)}{6} & \dfrac{(m-4)\cdots m}{24\,m} \\
-4 & -4m+15 & -(m-4)(2m-5) & -\dfrac{(m-4)(m-3)(4m-5)}{6} & -\dfrac{(m-4)\cdots m}{6(m-1)} \\
6 & 6m-21 & 3(m-4)(m-2)+1 & \dfrac{(m-4)(m-1)(2m-5)}{2} & \dfrac{(m-4)\cdots m}{4(m-2)} \\
-4 & -4m+13 & -(m-2)(2m-7) & -\dfrac{(m-2)(m-1)(4m-15)}{6} & -\dfrac{(m-4)\cdots m}{6(m-3)} \\
1 & m-3 & \dfrac{(m-3)(m-2)}{2} & \dfrac{(m-3)(m-2)(m-1)}{6} & \dfrac{(m-4)\cdots m}{24\,(m-4)}
\end{bmatrix}.
$$

§ 3. 1-型三角剖分上的样条函数空间

所谓1-型三角剖分，乃是在矩形剖分的基础上、连接各个矩形胞腔的斜率为正的对角线所形成的三角剖分。不难理解，如果原来的矩形剖分是均匀的，则由此产生的1-型三角剖分就是一类特殊类型的贯穿剖分。在本节中，我们主要讨论这种均匀的1-型三角剖分．不失一般性，设D是一个矩形区域

$$D=[0,m]\otimes[0,n],$$

其中m和n均为正整数，一般L型区域均可化为若干矩形来处理，

1-型三角剖分常记为

$$\Delta_{mn}^{(1)}: x = i,\ y = j,\ x - y = h,$$

其中 $i = 1, \cdots, m-1, j = 1, \cdots, n-1$, 且 $h = -n+1, \cdots, m-1$. 作为本章定理 2.2 的直接推论,有

推论 2.13[6]

$$\dim S_k^\mu(\Delta_{mn}^{(1)}) = \binom{k+2}{2} + (2m+2n-3)\binom{k-\mu+1}{2} + (m-1)(n-1)\cdot(k-\mu-[(\mu+1)/2])_+\cdot(k-2\mu+[(\mu+1)/2]). \tag{2.44}$$

如同本章命题 2.6 所指出的那样,要想在剖分 $\Delta_{mn}^{(1)}$ 上构造具局部支集的样条函数,必须有

$$k > (3\mu+1)/2. \tag{2.45}$$

从应用的角度考虑,对于给定的光滑度 μ,人们总是希望构造分片多项式次数尽可能低的、具有局部支集的样条函数. 按 (2.45),它们是

$$S_1^0(\Delta_{mn}^{(1)}), S_3^1(\Delta_{mn}^{(1)}), S_4^2(\Delta_{mn}^{(1)}), S_6^3(\Delta_{mn}^{(1)}), \cdots.$$

样条函数空间 $S_1^0(\Delta_{mn}^{(1)})$ 是熟知的. 事实上,对于任意给定的三角剖分 Δ, $S_1^0(\Delta)$ 中的最小局部支集样条,是一个以网点为心的关联区域(星形区域)上的锥形函数,其锥顶位于该网点的上方,而支集为该关联区域. 在有限元理论中,这已是众所周知的了.

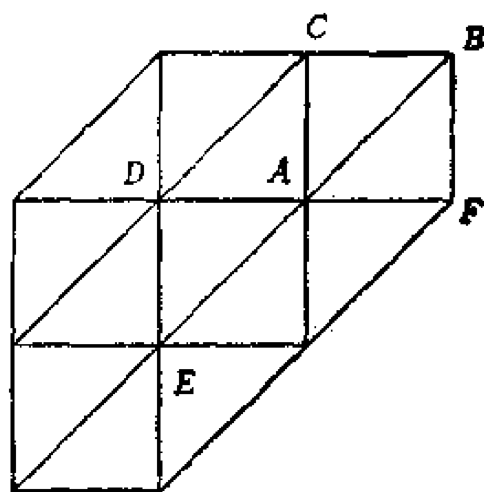


图 2.7

下面讨论 $S_3^1(\Delta_{mn}^{(1)})$ 中的局部支集样条函数.

P. O. Fredrickson[11] 曾经构造了空间 $S_3^1(\Delta_{mn}^{(1)})$ 中一类具有最小局部支集的样条函数, 今用 B^1 记 Fredrickson

的局部支集样条，其支集如图 2.7 所示。用面积坐标来表示该样条是方便的。在以 A, B 和 C 为顶点的三角形上，线性多项式 a 由条件 $a(A)=1, a(B)=a(C)=0$ 所确定；类似地可确定线性多项式 b 和 c。显然 $a+b+c=1$，且可用 a, b, c 中的任意两个作为独立变量来表示任何多项式。采用面积坐标，样条函数 B^1 可表示为

$$Q_{ABF}=a^3,$$

$$Q_{ABC}=a^2(a+3c),$$

$$Q_{ADC}=3(a+d)^2-2(a^3+d^3)-3ad(a+d),$$

$$Q_{ADE}=1+3(a+d)-3(a^2+d^2)-3ad(a+d),$$

其中 $Q_{ABF}, Q_{ABC}, Q_{ADC}$，和 Q_{ADE} 分别为"隅角"，"边"，"内部"，和"中心"三角形处 B^1 的表达式。

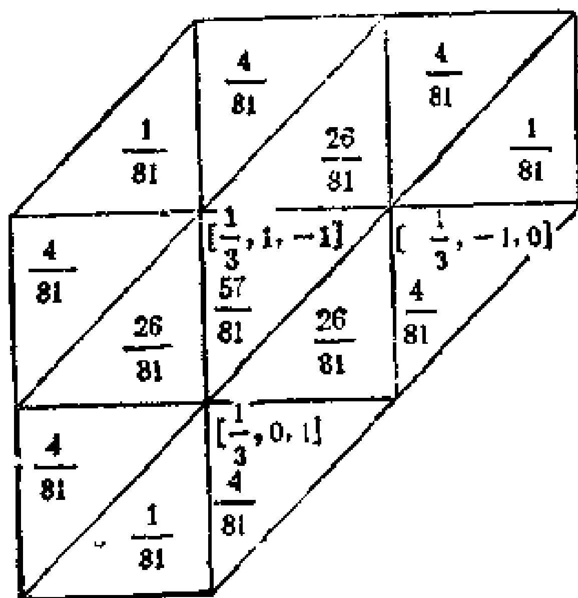


图 2.8

在图 2.8 中，我们给出了 B^1 的另一形式的表达式。

鉴于定义在三角形内的任一二元 3 次多项式都可由该多项式在 3 个顶点处的函数值、2 个 1 阶偏导数值、以及其在三角形几何中心处的函数值所唯一确定。所以在图 2.8 中，我们正是采用这种方式来表示该局部支集上的样条函数的。即在三个内网点处的有序数组分别表示在该点处的 B^1，D_xB^1, D_yB^1 值，而各三角形内所写的数为 B^1 在该三角形几何中心处的值。

按维数公式(2.44)，可知

$$\dim S_3^1(\Delta_{mn}^{(1)})=2(m+2)(n+2)-5. \qquad (2.46)$$

因为(2.46)中含有 $2mn$ 项，所以只借助于 B^1 的平移、不可能生

成 $S_3^1(\Delta_{mn}^{(2)})$ 全体。为了弥补此缺陷，在[13]和[14]中，我们引入了另一类具局部支集的样条函数

$$B^2(x,y)=B^1(-x,-y).$$

B^2 和 B^1 都是 $S_3^1(\Delta_{mn}^{(2)})$ 中具有最小局部支集的样条函数，常称之为 B 样条。精确言之，它们可称为基本样条函数 (Fundamental spline, [13, 14])。下面我们将证明，B^1、B^2 及其平移所得的样条函数集合还是空间 $S_3^1(\Delta_{mn}^{(2)})$ 的一个生成集合。进而我们将指出如何从中选出空间 $S_3^1(\Delta_{mn}^{(2)})$ 的基函数来。为此考虑

$$B_{ij}^p(x,y):=B^p(x-i,y-j),\ p=1,2,$$

并定义如下的下标集合

$$\Omega_p:=\{(i,j)\mid B_{ij}^p \text{ 在}D\text{上不恒为 }0\},$$

$$\Omega_p(i_1,j_1;\cdots;i_q,j_q)=\Omega_p\backslash\{(i_1,j_1),\cdots,(i_q,j_q)\}.$$

显然 $\Omega_1\cup\Omega_2$ 的基数是 $2(m+2)(n+2)-2$，它比空间 $S_3^1(\Delta_{mn}^{(2)})$ 的维数 $2(m+2)(n+2)-5$ 要多 3。所以集合

$$\mathscr{B}=\{B_{ij}^1\mid(i,j)\in\Omega_1\}\cup\{B_{ij}^2\mid(i,j)\in\Omega_2\}$$

是线性相关的。虽然如此，以下我们将指出，$\mathscr{B}$ 是空间 $S_3^1(\Delta_{mn}^{(2)})$ 的一个生成集：

定理 2.14[14]

$$S_3^1(\Delta_{mn}^{(2)})=\text{span}\{\mathscr{B}\}.$$

事实上，我们可以证明更强的结果：集合

$$\mathscr{B}_1=\{B_{ij}^1,B_{st}^2\mid(i,j)\in\Omega_1(m,n+1),$$
$$(s,t)\in\Omega_2(m+1,n;m+1,n-1)\}$$

在区域 D 上是线性无关的。

记

$$F(x,y)=\sum_{(i,j)\in\Omega_1}c_{ij}B_{ij}^1(x,y)+\sum_{(i,j)\in\Omega_2}d_{ij}B_{ij}^2(x,y),$$

此处 $c_{m,n+1}=d_{m+1,n}=d_{m+1,n-1}=0$，此即意味着作 $\mathscr{B}_1$ 中所有样条函数的线性组合，则我们的目的是在

$$F(x,y)=0,\ \forall(x,y)\in D$$

的假定下，往证 $F(x,y)$ 中的所有系数均为 0。设 $D_{ij}=[i,i+$

$i]\otimes[j-1,j]$，且假定于 D_{ij} 上 $F(x,y)\equiv 0$。利用下述诸方程

$$\begin{aligned}F(i,j)&=F(i,j-1)=F(i+1,j-1)=F(i+1,j)\\&=D_xF(i,j)=D_xF(i,j-1)=D_xF(i+1,j-1)\\&=D_xF(i+1,j)=D_yF(i,j)=D_yF(i,j-1)\\&=D_yF(i+1,j-1)=D_yF(i+1,j)\\&=F\left(i+\frac{1}{3},j-\frac{1}{3}\right)=F\left(i+\frac{2}{3},j-\frac{2}{3}\right)=0,\end{aligned}$$

及由图 2.8 所给出的值，可建立下述线性关系

$$\begin{bmatrix}c_{i-1,j-1}\\c_{i-1,j}\\c_{i,j-1}\\c_{i+1,j-1}\\d_{i,j-2}\\d_{i,j-1}\\d_{i,j}\\d_{i+1,j-2}\\d_{i+1,j-1}\\d_{i+1,j}\\d_{i+2,j-1}\\c_{i+1,j}\\c_{i,j}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6&-9&4\\-3&-5&3\\-6&-8&3\\-6&-7&2\\7&2&-4\\4&6&-3\\1&2&-2\\7&9&-3\\4&5&-2\\1&1&-1\\4&4&-1\\-3&-3&1\\-3&-4&2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}d_{i+2,j}\\c_{i+1,j+1}\\c_{i,j+1}\end{bmatrix}.$$

因为假定于整个 D 上，$F(x,y)\equiv 0$，所以上式对 $i=0,\cdots,m-1;j=1,\cdots,n$ 皆成立。从而有

$$c_{m-i,n-j+1}=(3i+1)c_{m,n+1}-(i+j)d_{m+1,n-1}+(4i+j)d_{m+1,n},$$
$$d_{m+1-i,n-j}=-3ic_{m,n+1}+(i+j)d_{m+1,n-1}-(4i+j-1)d_{m+1,n},$$

此处 $(m-i,n-j+1)\in\Omega_1$，$(m+1-i,n-j)\in\Omega_2$。

因为 $c_{m,n+1}=d_{m+1,n-1}=d_{m+1,n}=0$，从上式可推知所有的 c_{ij} 和 d_{ij} 也必为 0。即 $\mathscr{B}_1$ 在 D 上是线性无关的。鉴于 $\mathscr{B}_1$ 的基数与空间 $S_3^1(\Delta_{mn}^{(1)})$ 的维数相同，所以 $\mathscr{B}_1$ 是 $S_3^1(\Delta_{mn}^{(1)})$ 的一组基函数。 □

定义变差缩减 (Variation diminishing) 算子

$$(V^p f)(x,y)=\sum_{(i,j)\in\Omega_p} f(i,j)B^p_{ij}(x,y),\quad p=1,2. \qquad (2.47)$$

命题 2.15[14] 对一切 $f\in \mathbf{P}_1$, $p=1$, 2, 均有如下恒等式成立:

$$V^p(f)(x,y)\equiv f(x,y). \qquad (2.48)$$

显然,只须证明(2.48)式对 1, x 和 y 皆成立即可. 为此,又只须证明在每个三角形胞腔上相应的恒等式成立. 按前面对图 2.8 所作的说明,只须往证 $V^p(f)$ 与 f 在三角形顶点处的函数值, 两个 1 阶偏导数值,以及三角形几何中心处的函数值分别相同即可. 事实上,我们可以利用图 2.8 中给出的值, 不难(但要细心)证明它们. 详细证明留给读者自己去完成.

根据(2.48)式,我们有

$$\sum_{(i,j)\in\Omega_1} B^1_{ij}(x,y)-\sum_{(i,j)\in\Omega_2} B^2_{ij}(x,y)\equiv 0, \qquad (2.49)$$

$$\sum_{(i,j)\in\Omega_1}\left(i+\frac{1}{3}\right)B^1_{ij}(x,y) - \sum_{(i,j)\in\Omega_2}\left(i-\frac{1}{3}\right)B^2_{ij}(x,y)\equiv 0, \qquad (2.50)$$

$$\sum_{(i,j)\in\Omega_1}\left(j-\frac{1}{3}\right)B^1_{ij}(x,y) - \sum_{(i,j)\in\Omega_2}\left(j+\frac{1}{3}\right)B^2_{ij}(x,y)\equiv 0. \qquad (2.51)$$

引入记号

$$\mathscr{B}^1(i_1,j_1;i_2,j_2;i_3,j_3) = \{B^1_{ij},B^2_{st}\mid (i,j)\in\Omega_1(i_1,j_1;i_2,j_2;i_3,j_3),(s,t)\in\Omega_2\},$$

$$\mathscr{B}^2(i_1,j_1;i_2,j_2;i_3,j_3) = \{B^1_{ij},B^2_{st}\mid (i,j)\in\Omega_1,(s,t)\in\Omega_2(i_1,j_1;i_2,j_2;i_3,j_3)\},$$

$$\mathscr{B}^1(i_1,j_1;i_2,j_2;i_3,j_3) = \{B^1_{ij},B^2_{st}\mid (i,j)\in\Omega_1(i_1,j_1;i_2,j_2),(s,t)\in\Omega_2(i_3,j_3)\},$$

$\mathscr{B}^2(i_1,j_1;i_2,j_2;i_3,j_3)$

$$= \{B^1_{ij}, B^2_{st} \mid (i,j) \in \Omega_1(i_1,j_1), (s,t) \in \Omega_2(i_2,j_2;i_3,j_3)\}.$$

下面的定理指出了如何具体地选取 $S^1_3(\Delta^{(1)}_{mn})$ 中的具局部支集的基函数组。

定理 2.16[14] $\mathscr{B}^p(i_1,j_1;i_2,j_2;i_3,j_3)(p=1,2)$ 是 $S^1_3(\Delta^{(1)}_{mn})$ 的基函数，必须且只须 $(i_1,j_1),(i_2,j_2)$ 和 (i_3,j_3) 3 点不共线；

$\mathscr{B}^1(i_1,j_1;i_2,j_2;i_3,j_3)$ 是 $S^1_3(\Delta^{(1)}_{mn})$ 的基函数，必须且只须 $(i_1,j_1),(i_2,j_2)$ 和 $\left(i_3-\frac{2}{3}, j_3+\frac{2}{3}\right)$ 不共线；

$\mathscr{B}^2(i_1,j_1;i_2,j_2;i_3,j_3)$ 是 $S^1_3(\Delta^{(1)}_{mn})$ 的基函数，必须且只须 $\left(i_1+\frac{2}{3}, j_1-\frac{2}{3}\right)$, (i_2,j_2) 和 (i_3,j_3) 不共线。

证明 仅就 $p=1$ 的情况来证明第一个结论。其它结论的证明是类似的，请读者自己去证明。

先证必要性。 假定 $\mathscr{B}^1(i_1,j_1;i_2,j_2;i_3,j_3)$ 是 $S^1_3(\Delta^{(1)}_{mn})$的基函数。如果 $(i_1,j_1),(i_2,j_2)$ 和 (i_3,j_3) 共线。设

$$\sum_{(i,j)\in\Omega_1} c_{ij}B^1_{ij}(x,y) + \sum_{(i,j)\in\Omega_2} d_{ij}B^2_{ij}(x,y) = 0,(x,y)\in D. \quad (2.52)$$

按定理 2.14 的证明，上式等价于 (2.46) 式。若令 $c_{i_1,j_1}=c_{i_2,j_2}=c_{i_3,j_3}=0$，其中 $(i_2-i_1)(j_3-j_1)=(i_3-i_1)(j_2-j_1)$，而 $(m-i,n-j+1)=(i_1,j_1),(i_2,j_2),(i_3,j_3)$，则不难推知(2.46)有非平凡解。从而 $\mathscr{B}^1(i_1,j_1;i_2,j_2;i_3,j_3)$ 是一个线性相关集合，此与假定矛盾。必要性得证。

另一方面，若 $(i_1,j_1),(i_2,j_2)$ 与 (i_3,j_3) 不共线，亦即

$$\begin{vmatrix} 1 & i_1 & j_1 \\ 1 & i_2 & j_2 \\ 1 & i_3 & j_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

它又等价于

$$\begin{vmatrix} 1 & i_1+\frac{1}{3} & j_1-\frac{1}{3} \\ 1 & i_2+\frac{1}{3} & j_2-\frac{1}{3} \\ 1 & i_3+\frac{1}{3} & j_3-\frac{1}{3} \end{vmatrix} \neq 0.$$

根据(2.49)—(2.51)，$B^1_{i_1,j_1}, B^1_{i_2,j_2}$ 和 $B^1_{i_3,j_3}$ 可用 $\mathscr{B}$ 中其它的样条函数线性表示。因为 $\mathscr{B}$ 是 $S^1_3(\Delta^{(1)}_{mn})$ 的生成集合，是故 $\mathscr{B}^1(i_1, j_1; i_2, j_2; i_3, j_3)$ 也是 $S^1_3(\Delta^{(1)}_{mn})$ 的生成集合。又因 $\mathscr{B}^1(i_1, j_1; i_2, j_2; i_3, j_3)$的基数恰为 $\dim S^1_3(\Delta^{(1)}_{mn})$，所以它是 $S^1_3(\Delta^{(1)}_{mn})$ 的基函数。充分性得证。 □

以下我们讨论 $S^2_4(\Delta^{(1)}_{mn})$ 空间的基函数问题。如所知，P. O. Fredrickson[11] 曾经指出了如图 2.9 所示支集上的样条函数 $B \in S^2_4(\Delta^{(1)}_{mn})$。采用面积坐标，$B$ 的表达式为

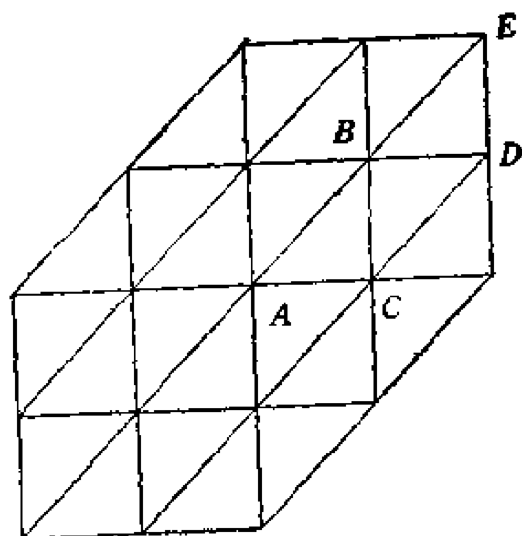
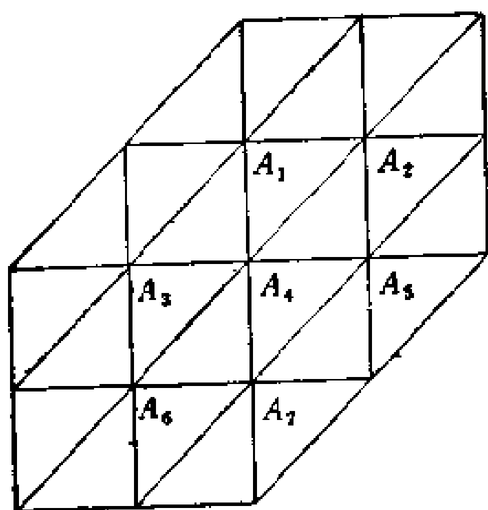


图 2.9

$$R_{BDE} = b^3(b+2d),$$
$$R_{BCD} = 2(b+c)^3 - (b^4+c^4) - 2(b^3c+bc^3),$$
$$R_{ABC} = 6 - 12(b^2+bc+c^2) + 8(b^3+c^3) + 12(b^2c+bc^2) - (b^4+c^4) - 2(b^3c+bc^3).$$

虽然一个 2 元 4 次多项式只有 15 个独立参数，但是为讨论方便。我们用每个三角形胞腔三顶点上的函数值。1 阶和 2 阶偏导数值数组 $\left(1, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$ 来表征该 4 次多项式。自然我们已经要求（或假定）这 18 个条件是相容的，且恰有 15 个独立参数，它们唯一确定该多项式。图 2.10 指出了按此方式表现的 $B(x,y)$。



A_1: $\left(\frac{1}{12}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{3}, 0, -\frac{1}{2}, 1\right)$

A_2: $\left(\frac{1}{12}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, 0, \frac{1}{2}, 0\right)$

A_3: $\left(\frac{1}{12}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{6}, 1, -\frac{1}{2}, 0\right)$

A_4: $\left(\frac{1}{2}, 0, 0, -2, 1, -2\right)$

A_5: $\left(\frac{1}{12}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, 1, -\frac{1}{2}, 0\right)$

A_6: $\left(\frac{1}{12}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, 0, \frac{1}{2}, 0\right)$

A_7: $\left(\frac{1}{12}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, 0, -\frac{1}{2}, 1\right)$

图 2.10

定义

$$B_{ij}(x, y) := B(x - i, y - j)$$

与下标集合

$$\Omega := \{(i, j) \mid B_{ij} \text{ 于} D \text{ 上不恒为 } 0\}.$$

显然 Ω 的基数是 $(m+3)(n+3)-2$，且

$$\Omega = \{(i, j) \neq (-1, n+1), (m+1, -1) \mid \\ i = -1, \cdots, m+1; j = -1, \cdots, n+1\}.$$

由本章推论 2.13，可知

$$\dim S_4^2(\Delta_{mn}^{(1)}) = (m+5)(n+5) - 18.$$

它大于 Ω 的基数 $(m+3)(n+3)-2$。所以 $\{B_{ij} \mid (i, j) \in \Omega\}$ 不足以生成整个空间 $S_4^2(\Delta_{mn}^{(1)})$。

在 [14] 中，我们证明了，$S_4^2(\Delta_{mn}^{(1)})$ 中所有具局部支集的样条函数只能生成 $S_4^2(\Delta_{mn}^{(1)})$ 的真子空间。为此，先给出

定理 2.17[14]

$$\mathscr{B} := \{B_{ij}, (x-p)_+^4, (y-q)_+^4, (x-y-r)_+^4 \mid (i, j) \in \Omega, \\ p = 0, \cdots, m-1; q = 0, \cdots, n-1; r = -n, \cdots, m-1\}$$

是空间 $S_4^2(\Delta_{mn}^{(1)})$ 的一组基函数。

证明 因为 $\mathscr{B}$ 的基数同 $\dim S_4^2(\Delta_{mn}^{(1)})$ 相等，所以为证本定

理，只须证明 $\mathscr{B}$ 中的函数确实组成一个线性无关集即可。设

$$F(x, y) := \sum_{(i,j)\in\Omega} b_{ij}B_{ij} + \sum_{i=0}^{m-1} c_i(x-i)_+^4 + \sum_{j=0}^{n-1} d_j(y-j)_+^4 + \sum_{t=-n}^{m-1} a_t(x-y-t)_+^4$$

于 $[0,1]\otimes[n-1,n]$ 上恒为 0.

鉴于一个 4 次多项式在三角形上恒等于 0 的充分必要条件是该多项式，以及它的 1 阶和 2 阶偏导数皆于三角形三个顶点处等于 0。 遵此，我们先在 $[0,1]\otimes[n-1,n]$ 的四个顶点 $(0,n-1),(1,n-1),(1,n)$ 和 $(0,n)$ 处求解方程组

$$F(p, q) = \frac{\partial}{\partial x} F(p,q) = \frac{\partial}{\partial y} F(p,q) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} F(p,q) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F(p,q) = \frac{\partial^2}{\partial y^2} F(p,q) = 0.$$

利用图 2.10 中所示的值，不难推出

$$c_0 = 0,\ d_0 = 0,\ a_{-n} = 0,$$
$$b_{ij} = 0, i = -1,0,1,2; j = n-2, n-1, n, n+1,$$
$$(i,j) \neq (-1, n+1).$$

沿对角线上的小矩形 $[j,j+1]\otimes[n-j-1,n-j], j = 1,\cdots,p-1$, $p = \min(m,n)$，逐次重复上述过程；然后再依次在矩形 $[p,p+1]\otimes[0,1],\cdots,[m-1,m]\otimes[0,1]$ 上（如果 $p=n$），或者依次在矩形 $[m-1,m]\otimes[n-p-1,n-p],\cdots,[m-1,m]\otimes[0,1]$ 上（如果 $p=m$）重复上述过程，即可推知所有的 c_i,d_j 和 a_t 均为 0。同样地，我们可以证明所有的 b_{ij} 也为 0。

□

定理 2.17 虽然给出了样条空间 $S_4^3(\Delta_{mn}^{(2)})$ 的一组基函数 $\mathscr{B}$，但是其中的截断多项式 $(x-p)_+^4,(y-q)_+^4,(x-y-r)_+^4$ 等却不是具局部支集的样条函数，因而在数值计算中将会带来诸多不便。例如，插值问题所对应的线性方程组之系数矩阵，就将不具备稀疏和带状等优良性质。鉴于此，人们自然会提出如下的问题：能

否找到其它的具局部支集的某些样条函数，它们与 $B_{ij}(x,y),(i,j)\in\Omega$ 一起作成 $S_4^2(\Delta_{mn}^{(1)})$ 的一组基函数？ 该问题的答案是否定的(参见文[14])。下面讨论这个问题。

对于 $\mathbf{R}^2$ 上的剖分 $\Delta: x=i, y=i, x-y-i=0, i=\cdots,-1,0,1,\cdots$，定义一类特定的二元样条空间

$$\mathrm{loc}\, S_4^2(\Delta,\mathbf{R}^2):=\{s\in C^2(\mathbf{R}^2)\,|\,\text{于}\Delta\text{的任一胞腔上}, s\in\mathbf{P}_4,\ \text{且于某包含}D\text{的有界集以外}\ s\equiv 0\}.$$

显然，

$$lS_4^2(\Delta_{mn}^{(1)}):=\mathrm{span}\,\{B_{ij}\,|\,(i,j)\in\Omega\}$$

是 $\mathrm{loc}\, S_4^2(\Delta,\mathbf{R}^2)$ 中的一个子空间，且它的维数恰为 Ω 的基数

$$(m+3)(n+3)-2.$$

设 a,b,c,d 均为整数，且 $b-a, d-c\geqslant 4$，$E=[a,b]\otimes[c,d]$。定义

$$\mathrm{loc}\, S_4^2(\Delta,E):=\{s\in \mathrm{loc}\, S_4^2(\Delta,\mathbf{R}^2)\,|\,s\ \text{的支集位于}\ E\ \text{内}\},$$

则应用定理 2.17，不难证明如下的命题([14])。

命题 2.18

$$\dim \mathrm{loc}\, S_4^2(\Delta,E)=(b-a-3)(d-c-3),$$

且 $\mathrm{loc}\, S_4^2(\Delta,E)$ 的基函数为

$$\mathscr{C}:=\{B_{ij}\,|\,i=a+2,\cdots,b-2;\,j=c+2,\cdots,d-2\}.$$

以上结论表明，在剖分 Δ 下，我们除了 $lS_4^2(\Delta_{mn}^{(1)})$ 外，再也找不到其它的具局部支集的样条函数，它们可用以取代 $\mathscr{B}$ 中的截断多项式了。亦即业已证明了

定理 2.19[14] 空间 $S_4^2(\Delta_{mn}^{(1)})$ 不存在仅由具局部支集的样条函数组成的基函数。

这是多元样条函数与一元样条函数之间的本质差别之一。事实上，对于一元样条函数来说，任一样条函数都是 B-样条的线性组合(参考 C. de Boor [16])。

对于前面提到过的剖分 Δ，我们也可同定义 $S_4^2(\Delta,\mathbf{R}^2)$ 那样来定义 $S_k^\mu(\Delta,\mathbf{R}^2)$：

$$S_k^\mu(\Delta,\mathbf{R}^2):=\{s\in C^\mu(\mathbf{R}^2)\,|\,\text{于}\Delta\text{的任一胞腔上}\ s\in\mathbf{P}_k\}.$$

如果 d 是满足 $d>(3\mu+1)/2$ 的最小整数，则记

$$S^{\mu}:=S_d^{\mu}:=S_d^{\mu}(\Delta,\mathbf{R}^2).$$

亦即 $S^0=S_1^0$, $S^1=S_3^1$, $S^2=S_4^2$, $S^3=S_6^3$, $\cdots$, $S^{2r-1}=S_{3r}^{2r-1}$, $S^{2r}=S_{3r+1}^{2r}$, $\cdots$.

利用第一章中所介绍的协调条件，容易指出 S^1 中的 B^1 和 B^2 皆具备最小支集的性质. S^2 中的 B 亦具备最小支集性质. 到底应该如何界定一个具局部支集样条函数的支集最小性呢？我们在文[14]中给出了它的确切定义。

对于给定的剖分 Δ，所有以 Δ 网线为边的多边形 Jordan 曲线的集合记为 Γ. 曲线 $\gamma\in\Gamma$ 称为 $s\in S^{\mu}$ 的局部支集曲线，如果 s 于曲线 γ 的外部处处为 0. 此时我们称由 γ 所界定的区域为 s 的局部支集. 对于 $\gamma_1,\gamma_2\in\Gamma$，如果 $\gamma_1\neq\gamma_2$，则可以定义"大小"关系"$\prec$". 说 $\gamma_1\prec\gamma_2$，如果 γ_1 所范围的区域可以装入 γ_2 所范围的区域内.

$\gamma\in\Gamma$ 称作 S^{μ} 的最小支集曲线，如果任一曲线 $\gamma'\prec\gamma,\gamma'\in\Gamma$ 都不是 S^{μ} 中任一非平凡样条函数的局部支集曲线. 由 S^{μ} 的最小支集曲线所范围的区域称为 S^{μ} 的最小支集.

定义[14] 非平凡的 $B\in S^{\mu}$ 说是 S^{μ} 的一个基本样条（Fundamental spline），如果 B 的支集是 S^{μ} 的最小支集.

两条曲线 γ_1 和 γ_2 说是叠合的，如果其中一条可由另一条经平移而得到. 所以 Γ 中的曲线可以按此种叠合关系分为若干等价类，且同一等价类中的曲线看作是相同的.

如果两个基本样条函数具有相同的最小支集曲线，并且其中一个为另一个的常数倍，则称它们是等价的. 此时，我们把它们看作是同一个基本样条函数，而不予以区分.

以 $n(\mu)$ 记 S^{μ} 的最小支集曲线数. 上面我们实际上已经证明了

命题 2.20 $n(0)=1$, $n(1)=2$, $n(2)=1$, 且 S^0,S^1,S^2 的最小支集曲线 $\gamma^0,\gamma_1^1,\gamma_2^1,\gamma_2$ 分别由图 2.11 中的 (a),(b), (c),(d) 所给出：

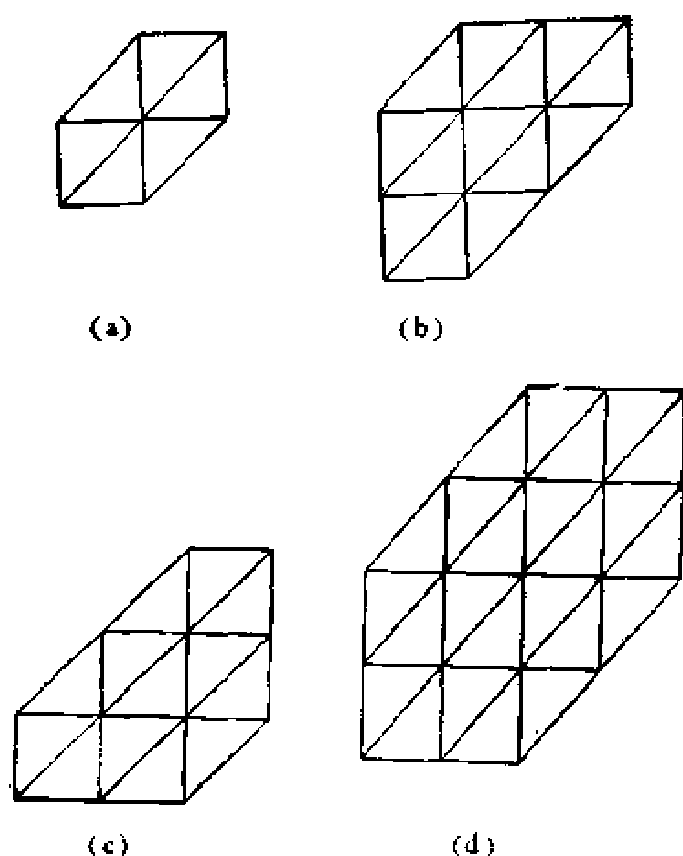


图 2.11

在上述各支集上仅有唯一的基本样条函数存在。而且 $S^\mu(\mu=0,1,2)$ 中的所有基本样条函数是 S^μ 中所有具局部支集样条函数的生成集。

文[14]中还指出了下述猜想：

$$n(\mu)=\begin{cases}1, & \text{当}\ \mu\ \text{为偶数},\\ 2, & \text{当}\ \mu\ \text{为奇数}.\end{cases}$$

C. de Boor 与 K. Höllig[17] 曾经采用箱样条（box spline）方法，将定理 2.14 与定理 2.17 推广到一般 μ 的情况。尤其值得指出的是，他们证明了，虽然当 μ 为偶数时，S^μ 的基函数组中含有一些截断多项式，但是如果人们置这些具非局部支集的基函数予不顾，而只采用具局部支集样条基函数生成的子空间去逼近光滑函数时，其逼近阶竟与采用整个样条空间逼近时的逼近阶是相同的。

张绍良[18] 采用线性泛函

$$\lambda_{ij}^1(f)=2f\left(\frac{3i+1}{3m},\frac{3j-1}{3n}\right)-\frac{1}{3}\left[f\left(\frac{i}{m},\frac{j}{n}\right)\right.$$
$$\left.+f\left(\frac{i}{m},\frac{j-1}{n}\right)+f\left(\frac{i+1}{m},\frac{j}{n}\right)\right],$$
$$\lambda_{ij}^2(f)=2f\left(\frac{3i-1}{3m},\frac{3j+1}{3n}\right)-\frac{1}{3}\left[f\left(\frac{i}{m},\frac{j}{n}\right)\right.$$
$$\left.+f\left(\frac{i}{m},\frac{j+1}{n}\right)+f\left(\frac{i-1}{m},\frac{j}{n}\right)\right]$$

来替代(2.47)中的 $f(i,j)$ 值而引入了线性算子

$$W_{mn}(f):=\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{2}\sum_{(i,j)\in\Omega_p}\lambda_{ij}^p(f)B_{ij}^p(x,y),$$

(参考 S. L. Zhang, R. H. Wang, 和 Yoshio Oyanagi, Bivariate Cubic splines and operators on type-1 triangulation)。并指出了:

1° 如果 $f\in C^2(K)$, 则

$$\|f-W_{mn}(f)\|_K\leqslant 8\delta_{mn}^2\max\left[\omega_K(f_{11};\delta_{mn})+\omega_K(f_{12};\delta_{mn})\right.$$
$$\left.+\omega_K(f_{22};\delta_{mn})\right];$$

2° 如果 $f\in C^3(K)$, 则

$$\|f-W_{mn}(f)\|_K\leqslant\frac{2}{3}\delta_{mn}^3\cdot\|D^3f\|_K,$$

其中紧集 K 为包含 D 的开集的闭包, $f\in C(K)$ 的连续模定义为

$$\omega_K(f;\delta)=\sup\{|f(x,y)-f(u,v)|\,|(x,y),(u,v)\in K,$$
$$|(x,y)-(u,v)|<\delta\},$$
$$\delta_{mn}=\max\left(\frac{1}{m},\ \frac{1}{n}\right),$$

而

$$D^3f(x,y)((u_1,u_2),(v_1,v_2),(\omega_1,\omega_2)):=\sum_{i,j,k=1}^{2}f_{ijk}(x,y)u_iv_jw_k.$$

文[15]中讨论了一个由三簇平行直线所形成的剖分, 在什么

条件下可以转化为1-型三角剖分. 在[15]中,我们称D的一个贯穿剖分Δ是第1型贯穿三角剖分,如果Δ的任一贯穿线平行于3条互不平行的直线 $a_1x+b_1y=0$, $a_2x+b_2y=0$, $a_3x+b_3y=0$ 中的一条,且Δ的任一内网点处均恰有3条贯穿线通过.

不难证明([15]),若Δ是如上定义的第1型贯穿三角剖分,则存在正数 η_1 与 $(x_0,y_0)\in D$,使得Δ的每条贯穿线必位于下列直线的某条上:

$$a_1(x-x_0)+b_1(y-y_0)+j\eta_1=0,$$
$$a_2(x-x_0)+b_2(y-y_0)+j\eta_2=0,$$
$$a_3(x-x_0)+b_3(y-y_0)+j\eta_3=0,$$

$j=\cdots,-1,0,1,\cdots$, 其中 η_2 与 η_3 满足

$$(a_2b_3-a_3b_2)\eta_1=(a_1b_3-a_3b_1)\eta_2=(a_1b_2-a_2b_1)\eta_3.$$

所以任一第1-型贯穿三角剖分均可通过线性变换

$$\begin{cases}a_1(x-x_0)+b_1(y-y_0)=-\frac{1}{2}\eta_1x'-\frac{\sqrt{3}}{6}\eta_1y',\\ a_2(x-x_0)+b_2(y-y_0)=-\frac{1}{2}\eta_2x'+\frac{\sqrt{3}}{6}\eta_2y',\end{cases}$$

而变为所有胞腔均为正三角形的贯穿三角剖分.

文[15]中还指出了一类全对称的 $S_3^1(\Delta)$ 中的B样条,并讨论了它们的性质.

孙家昶[19] 还讨论了可三向剖分域上 S_3^1 空间的B样条对偶基与拟插值问题.

§4. 2-型三角剖分上的样条函数空间

如所知,许多区域、包括所谓 L-型区域及其各种组合,均可约化为若干矩形区域来处理. 本节中将要讨论的2-型三角剖分,乃是在矩形剖分的基础上,连接其中各小矩形胞腔的两条对角线而形成的三角剖分. 显然,如果原始矩形剖分是均匀的,则由此而诱导出的2-型三角剖分就是一种贯穿剖分.

本节仅讨论均匀的 2-型三角剖分，非均匀的 2-型三角剖分将在下节中讨论。

不失一般性，可设D是如下的单位正方形域

$$D = [0,1]\otimes[0,1].$$

2-型三角剖分 $\Delta_{mn}^{(2)}$ 由下述剖分线所构成：

$$mx - i = 0,\ ny - i = 0,$$

$$ny - mx - i = 0,\ ny + mx - i = 0,$$

其中 $i = \cdots,-1,0,1,\cdots$.

因为 $\Delta_{mn}^{(2)}$ 是一种贯穿剖分，所以按本章 §1 中的维数公式(2.3)，我们有[6]

$$\dim S_k^\mu(\Delta_{mn}^{(2)}) = \binom{k+2}{2} + (3m+3n-4)\binom{k-\mu+1}{2} + mn\binom{k-2\mu}{2} + (m-1)(n-1) \cdot d_k^\mu(4), \tag{2.53}$$

其中

$$d_k^\mu(4) = \frac{1}{2}\left(k-\mu-\left[\frac{\mu+1}{3}\right]\right)_+ \cdot\left(3k-5\mu+3\left[\frac{\mu+1}{3}\right]+1\right).$$

根据公式(2.24)，要想在剖分 $\Delta_{mn}^{(2)}$ 上构造具有局部支集的样条函数，其分片多项式的次数k与光滑度μ之间必须满足不等式

$$k > (4\mu+1)/3.$$

为μ给定时，人们总是希望寻求尽可能小的k，即最有兴趣的样条空间应该是

$$S_1^0(\Delta_{mn}^{(2)}),S_2^1(\Delta_{mn}^{(2)}),S_3^2(\Delta_{mn}^{(2)}),\cdots.$$

空间 $S_1^0(\Delta_{mn}^{(2)})$ 是熟知的，此处将不讨论它们. 首先，我们讨论样条空间 $S_2^1(\Delta_{mn}^{(2)})$ 的局部支集样条（B-样条）基函数问题([20]).

先介绍 P. Zwart([21]) 的一个局部支集 S_2^1 样条函数 $B(x,y)$，其支集为由图 2.12 所示的区域 Q：以原点为心，以(3/2,1/2),

$(1/2, 3/2)$，$(-1/2, 3/2)$，$(-3/2, 1/2)$，$(-3/2, -1/2)$，$(-1/2, -3/2)$，$(1/2, -3/2)$和$(3/2, -1/2)$为顶点的八边形，该八边形被剖分成 25 个胞腔．这 25 个胞腔的编号如图 2.12 中所示．

对各 $\lambda = 1, \cdots, 25$，考虑多项式

$$p_1(x, y) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2,$$

$$p_2(x, y) = \frac{5}{8} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y^2,$$

$$p_6(x, y) = \left(\frac{7}{8} - x + \frac{1}{4}x^2\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x\right)y - \frac{1}{4}y^2,$$

$$p_7(x, y) = \frac{9}{8} - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}x^2,$$

$$p_9(x, y) = \left(1 - x + \frac{x^2}{4}\right) + \left(-1 + \frac{x}{2}\right)y + \frac{1}{4}y^2,$$

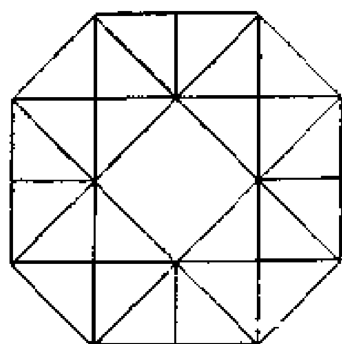


图 2.12

其它多项式可以从上述多项式按对称性原则而得到．

设 $B(x,y)$ 是定义在 R^2 上的函数，它在 Q 之外为零，在编号为 i 的胞腔上为 $p_i(x,y)$，$i = 1, 2, \cdots, 25$．易见 $B(x,y) \in C^1(R^2)$，且在 Q 内恒正．因此 $B(x,y)$ 是关于图 2.12 所示剖分的二元 B 样条．利用网点上的协调条件，可以证明 $B(x,y)$是由关于直线 $x = 0, y = 0, x + y = 0, x - y = 0$ 的对称性及规范条件 $B(0,0) = 1/2$ 唯一决定的．采用光滑余因子协调方法可以指出，$B(x,y)$ 的支集已达到最小的可能．

设

$$B_{ij}(x,y) = B\left(mx - i + \frac{1}{2}, ny - j + \frac{1}{2}\right), \qquad (2.54)$$

则集合

$$A = \{B_{ij}: i = 0, \cdots, m+1, j = 0, \cdots, n+1\}$$

是 $S_2^1(\Delta_{mn}^{(2)})$ 的子集．注意到A的每一个元是 $S_2^1(\Delta_{mn}^{(2)})$ 的非平凡

元，且 A 中元素的个数为 $(m+2)(n+2)$。然而 $S_2^1(\Delta_{mn}^{(2)})$ 的维数为 $mn+2m+2n+3$。所以 A 必定是线性相关集。我们将会看到 A 的代数支架是整个空间 $S_2^1(\Delta_{mn}^{(2)})$，并且对 A 中的元成立着下述线性相关式：

$$\sum_{i=0}^{m+1}\sum_{j=0}^{n+1}(-1)^{i+j}B_{ij}=0. \tag{2.55}$$

另外，我们只要从 A 中消去任一元，余下部分则可作为 $S_2^1(\Delta_{mn}^{(2)})$ 的一组基。在本章 § 5 中，我们将介绍一种比较简捷的方法来证明这些结论。此处我们介绍文[19]中所用的方法，因为它具有某种典型性。考虑函数

$$F(x,y)=\sum_{i=0}^{m+1}\sum_{j=0}^{n+1}a_{ij}B_{ij}(x,y).$$

我们假定 F 在 R 中 $\Delta_{mn}^{(2)}$ 的网点上为零，即有

$$F\left(\frac{r}{m},\frac{s}{n}\right)=0,\ F\left(\frac{p}{m}+\frac{1}{2m},\ \frac{q}{n}+\frac{1}{2n}\right)=0, \tag{2.56}$$

$r=0,1,\cdots,m$; $s=0,1,\cdots,n$; $p=0,1,\cdots,m-1$; $q=0,1,\cdots,n-1$。由此得到关于 a_{ij} 的方程组 (2.56)，其系数矩阵 M 是 $[(n+1)(m+1)+mn]\times[(m+2)(n+2)]$ 矩阵。设有 $(m+1)\times(m+2)$ 的矩阵 A 及 $m\times(m+2)$ 的矩阵 C,D：

$$A=\begin{bmatrix}2&2&0&0&\cdots&0\\0&2&2&0&\cdots&0\\&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\\0&\cdots&\cdots&0&2&2\end{bmatrix},$$

$$C=\begin{bmatrix}1&4&1&0&0&\cdots&0\\0&1&4&1&0&\cdots&0\\&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&&\\0&\cdots&\cdots&0&1&4&1\end{bmatrix},$$

$$D=\begin{bmatrix}0&1&0&0&\cdots&0\\0&0&1&0&\cdots&0\\&\cdots&\cdots&\cdots&&\\0&\cdots&\cdots&0&1&0\end{bmatrix}.$$

通过适当地安排行和列，M（或M的常数倍）可以写成

$$M=\begin{bmatrix} A & A & & & & & \\ D & C & D & & & & \\ & A & A & & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & & \\ & & & A & A & & \\ & & & D & C & D & \\ & & & & A & A & \end{bmatrix},$$

其中有分块子矩阵的 $2n+1$ 行和$2n+1$ 列，M中未标出的元均为零。下面研究M的零空间的维数。设 $\boldsymbol{X}_1,\cdots,\boldsymbol{X}_{n+2}$ 为 $\boldsymbol{R}^{m+2}$ 中的列向量，并满足

$$M[\boldsymbol{X}_1^T,\cdots,\boldsymbol{X}_{n+2}^T]^T=\boldsymbol{0},$$

其中 T 表示矩阵的转置。因此得到线性方程组：

$$\left.\begin{array}{l} A(\boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{X}_2)=\boldsymbol{0},\cdots,A(\boldsymbol{X}_{n+1}+\boldsymbol{X}_{n+2})=\boldsymbol{0}, \\ D(\boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{X}_3)+C\boldsymbol{X}_2=\boldsymbol{0},\cdots,D(\boldsymbol{X}_n+\boldsymbol{X}_{n+2})+C\boldsymbol{X}_{n+1}=\boldsymbol{0} \end{array}\right\},\tag{2.57}$$

我们注意到存在非零向量 $\boldsymbol{X}_0=(1,-1,\cdots,(-1)^{m+1})^T$，使

$$\boldsymbol{X}_i+\boldsymbol{X}_{i+1}=t_i\boldsymbol{X}_0,\quad i=1,\cdots,n+1,$$

其中 $t_1,\cdots,t_{n+1}$ 为常数。

记 $\boldsymbol{X}_*=[1,-1,\cdots,(-1)^{m-1}]^T$，且

$$E=C-2D=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

则原始方程组 $M[\boldsymbol{X}_1^T,\cdots,\boldsymbol{X}_{n+2}^T]^T=0$ 可简化为

$$E\boldsymbol{X}_{n+2}=\alpha\boldsymbol{X}_*,\tag{2.58}$$

其中 $\alpha=-(t_{n+1}+t_n)=(t_n+t_{n-1})=\cdots=(-1)^n(t_2+t_1)$ 是参数。由于 t_{n+1} 也是一参数，矩阵E的秩数为 m，故 $M[\boldsymbol{X}_1^T,\cdots,\boldsymbol{X}_{n+2}^T]^T=0$ 的解空间的维数是 4。这样，要证明A的支架的维数是 $(m+2)(n+2)-1=mn+2m+2n+3$，则需要一

个辅助线性方程组．为此，考虑插值条件

$$\frac{\partial F}{\partial x}\left(\frac{r}{m},\ \frac{s}{n}\right)=0,\quad \frac{\partial F}{\partial x}\left(\frac{p}{m}+\frac{1}{2m},\ \frac{q}{n}+\frac{1}{2n}\right)=0,$$

$r=0,1,\cdots,m$; $s=0,1,\cdots,n$; $p=0,1,\cdots,m-1$; $q=0$ $1,\cdots n-1$．将此条件代入(2.56)式，得到关于 a_{ij} 的线性方程组，其系数矩阵是 $[(n+1)(m+1)+mn]\times[(m+2)(n+2)]$ 矩阵：

$$M_x=\begin{bmatrix} G & G & & & & \\ & H & & & & \\ & G & G & & & \\ & & H & & & \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & & & G & G & \\ & & & & H & \\ & & & & G & G \end{bmatrix},$$

其中 G 和 H 分别是 $(m+1)\times(m+2)$ 和 $m\times(m+2)$ 的矩阵：

$$G=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \\ 0 & \cdots\cdots & 0 & -1 & 1 & \end{bmatrix},$$

$$H=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & & \\ 0 & \cdots & & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

于是，线性方程组 $M_x[X_1^T,\cdots,X_{n+2}^T]^T=0$ 等价于方程组

$$\left.\begin{aligned} &G(X_1+X_2)=0,\cdots,G(X_{n+1}+X_{n+2})=0,\\ &HX_2=0,\cdots,HX_{n+1}=0. \end{aligned}\right\}\tag{2.59}$$

我们要求 $(X_1,\cdots,X_{n+2})$ 同时是方程(2.57)和(2.59)的解．由 $GX_1\neq 0$ 推得 $t_1=\cdots=t_{n+1}=0$，故 $\alpha=0$，且方程(2.58)化

为

$$EX_{n+2}=0. \tag{2.60}$$

另外，由于 $X_{n+2}=-X_{n+1}$，从方程(2.59)后一式得

$$HX_{n+2}=0. \tag{2.61}$$

方程(2.60)和(2.61)的解为 X_0 的常数倍，所以，我们有 $X_1=-X_2=X_3=\cdots=(-1)^{n+1}X_{n+2}=\beta X_0$，$\beta$ 为常数。亦即我们获得下述结果([19])。

定理 2.21 由(2.54)式定义的属于集合 A 的二元 B 样条函数满足关系式(2.55)。对于任何 i_0,j_0，$0\leqslant i_0\leqslant m+1$，$0\leqslant j_0\leqslant n+1$，集合

$$A_{i_0j_0}=\{B_{ij}\in A:(i,j)\neq(i_0,j_0)\}$$

为 $S_2^1(\Delta_{mn}^{(2)})$ 的一组基。

顺便指出，在上述证明中，可以用关于 y 的偏导数来代替关于 x 的偏导数。

设 A 为 $S_2^1(\Delta_{mn}^{(2)})$ 中定义如前的二元 B 样条集合，对于 $B_{ij}\in A$ 有恒等式

$$\sum_{ij}(-1)^{i+j}B_{ij}\equiv 0.$$

我们约定关于 i,j 求和，分别是从 0 到 $m+1$ 和 0 到 $n+1$。上式在 D 中处处成立。我们将证明 B_{ij} 也形成一单位分解。

引理 2.22

$$\sum_{ij}B_{ij}\equiv 1.$$

为了证明引理，我们要知道 $B(x,y)$ 在网点和网线中点处的值如下：

$$\left.\begin{array}{l}
B(0,0)=\dfrac{1}{2},\ B\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{4},\ \ B(1,0)=\dfrac{1}{8},\\[2mm]
B\left(\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{7}{16},\ B\left(\dfrac{1}{2},0\right)=\dfrac{3}{8},\ B\left(\dfrac{3}{4},\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{7}{32},\\[2mm]
B\left(1,\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{16},\ B\left(\dfrac{3}{4},\dfrac{3}{4}\right)=\dfrac{1}{16},\ B\left(\dfrac{5}{4},\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{1}{32},
\end{array}\right\}\tag{2.62}$$

其它值或者是零，或者可由对称性从上述值获得。B_{ij} 相应的值可由(2.54)式得到。因为在 $\Delta_{mn}^{(2)}$ 的每个三角形胞腔内 $\sum_{ij} B_{ij} \in \mathbf{P}_2$，所以 $\sum_{ij} B_{ij}$ 在该胞腔内的表达式可由它在这个三角形三个顶点及三边中点的值唯一确定。而这些值全都为1。 □

考虑如下的二元变差缩减样条算子 $V_{mn}: C(\Omega) \to S_2^1(\Delta_{mn}^{(2)})$：

$$V_{mn}(f) = \sum_{ij} f(x_i, y_j) B_{ij},$$

其中 Ω 是一包含 R 的开集，$(x_i, y_j) = ((2i-1)/2m, (2j-1)/2n)$ 是 B_{ij} 的支集的中心。引理 2.22 指出 V_{mn} 保持所有常数。我们还有下面更一般的结果([19])。

定理 2.23 $V_{mn}(f) = f$，其中 $f = 1, x, y$ 及 xy。

由对称性及引理 2.22，我们只须对 $f(x, y) = x$ 及 xy 验证定理即可。由于 V_{mn} 是线性算子，我们仅需在三角形胞腔

$$D_{ij} = \left[\left(\frac{i}{m}, \frac{j}{n}\right), \left(\frac{i}{m}, \frac{j-1}{n}\right), \left(\frac{2i-1}{2m}, \frac{2j-1}{2n}\right)\right] \quad (2.63)$$

上进行验证。这里，(2.63)式右端方括号内标出的是 D_{ij} 的三个顶点。对 $f(x,y) = x$，由(2.62)式得出 $V_{mn}(f)$ 在点

$((2i-1)/2m, (2j-1)/2n), (i/m, (2j-1)/2n), (i/m, j/n),$
$((4i-1)/4m, (4j-1)/4n)$

上的值分别为 $(2i-1)/2m, i/m, i/m$ 和 $(4i-1)/4m$。类似地，当 $f(x,y) = xy$ 时，$V_{mn}(f)$ 在相应点处的值分别为 $(2i-1) \times (2j-1)/4mn$，$i(2j-1)/2mn$，ij/mn 和 $(4i-1)(4j-1)/16mn$。当 $f(x,y) = x$ 和 xy 时，$V_{mn}(f)$ 于 D_{ij} 其它顶点和三边中点上的值均可由上述值按对称性算出来。所以当 $f(x,y) = x, xy$ 时，$V_{mn}(f) = f$ 在 D_{ij} 上(进而在 D 上)成立。 □

容易证明，当 $f(x,y) = x^2$ 或 y^2 时，$V_{mn}(f) \neq f$。为了保持 $\mathbf{P}_1$ 中的一切多项式，我们还需另外的线性算子。我们定义算子 $W_{mn}: C(\Omega) \to S_2^1(\Delta_{mn}^{(2)})$：

$$W_{mn}(f)=\sum_{ij}\lambda_{ij}(f)B_{ij},$$

其中

$$\lambda_{ij}(f)=2f\left(\frac{2i-1}{2m},\frac{2j-1}{2n}\right)-\frac{1}{4}\left[f\left(\frac{i}{m},\frac{j}{n}\right)+f\left(\frac{i-1}{m},\frac{j}{n}\right)\right.$$
$$\left.+f\left(\frac{i-1}{m},\frac{j-1}{n}\right)+f\left(\frac{i}{m},\frac{j-1}{n}\right)\right].$$

注意上式中线性泛函 λ_{ij} 依赖于函数 f 在 B_{ij} 的支集内 5 个网点上的值. 我们有下述的

定理 2.24 对任何 $f\in\mathbf{P}_2$ 有

$$W_{mn}(f)=f.$$

由定理 2.23, 易知对 $f(x,y)=1,x,y$ 及 xy 有 $W_{mn}(f)=f$. 所以由对称性, 我们仅需试证等式 $f=x^2$ 成立即可. 如同定理 2.23 的证明, 我们来计算 $W_{mn}(f)$ 在点 $((2i-1)/2m,(2j-1)/2n)$, $(i/m,(2j-1)/2n)$, $(i/m,j/n)$ 及 $((4i-1)/4m,(4j-1)/4n)$ 上的值. 对 $f(x,y)=x^2$, 有

$$\lambda_{i+1,j}(f)=(i^2+i)/m^2,$$
$$\lambda_{ij}(f)=(i^2-i)/m^2,$$
$$\lambda_{i-1,j}(f)=(i^2-3i+2)/m^2,$$

i 为任意.

于是 $W_{mn}(f)$ 在上述 4 点上的值分别为

$(2i-1)^2/4m^2, i^2/m^2, i^2/m^2$ 和 $(4i-1)^2/16m^2$. 比较 $W_{mn}(f)$ 及 f 的值, 不难完成定理 2.24 的证明. □

对于 $f(x,y)=1,x,y,x^2$ 及 y^2 应用定理 2.24, 我们有下述恒等式, 它同一元样条函数中的 Marsden 恒等式是类似的.

推论 2.25 设 $(x_i, y_j)=((2i-1)/2m, (2j-1)/2n)$ 及 $\varphi_{ij}(u,v)=[(u+v)-(x_i+y_j)][(u-v)-(x_i-y_j)]$, 则对一切 $(x,y)\in R$ 和 $(u,v)\in R^2$ 有

$$\sum_{ij}\varphi_{ij}(u,v)B_{ij}(x,y)=[(u+v)-(x+y)]$$

$\times [(u-v)-(x-y)]$.

类似地，我们还可以得到下述等式.

推论 2.26 设 $(x_i, y_j) = ((2i-1)/2m, (2j-1)/2n)$，则对一切 $(x,y)\in R$，有

$$\sum_{ij} x_i^2 B_{ij}(x,y) = x^2 + \frac{1}{4m^2}$$

和

$$\sum_{ij} y_j^2 B_{ij}(x,y) = y^2 + \frac{1}{4n^2}.$$

下面，我们考虑对三次多项式建立的二元 B 样条恒等式. 我们将应用这些恒等式来建立一些渐近公式，它们类似于 Вороновской 针对 Bernstein 多项式所建立的公式.

定理 2.27 设 $f(x,y) = x^3$ 及 $g(x,y) = y^3$，则对一切 m，n 及任何 $(x,y)\in R^2$ 有

$$W_{mn}(f)(x,y) = \frac{3}{2}\frac{x^2}{m} - \frac{1}{2}\frac{x}{m^2} + \frac{3}{m}\sum_{i=1}^{m}\left(x-\frac{i}{m}\right)_+^3, \quad (2.64)$$

$$W_{mn}(q)(x,y) = \frac{3}{2}\frac{y^2}{n} - \frac{1}{2}\frac{y}{n^2} + \frac{3}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(y-\frac{j}{n}\right)_+^3. \quad (2.65)$$

有意思的是，$W_{mn}(f)(x,y)$ 及 $W_{mn}(g)(x,y)$ 均为一元样条. 为了证明(2.64)式，我们首先由 $W_{mn}(f)$ 在三角形胞腔 $\left[\left(\frac{1}{m},\frac{1}{n}\right), \left(\frac{1}{m},0\right), \left(\frac{1}{2m},\frac{1}{2n}\right)\right]$ 和 $\left[\left(\frac{1}{2m},\frac{1}{2n}\right), (0,0), \left(0,\frac{1}{n}\right)\right]$ 的顶点及各边中点上的值，来求 $W_{mn}(f)$ 在相应胞腔上的表达式. 利用网点 $(1/2m, 1/2n)$ 上的协调条件，可证明围绕该网点的所有光滑余因子皆为零. 因为多项式 $W_{mn}(f)$ 在环绕网点的 4 个胞腔中与 y 和 j 无关，所以通过所有水平网线的光滑余因子也恒为零. 于是，对 $0\leqslant x\leqslant 1/m$ 和 $0\leqslant y\leqslant 1$ 有 $W_{mn}(f)(x,y) = 3x^2/2m - x/2m^2$，类似可得 $W_{mn}(f)(x,y) = 3x^2/2m - x/2m^2 + 3(x-1/m)/m$ 对 $1/m\leqslant x\leqslant 2/m$ 和 $0\leqslant y\leqslant 1$ 成立. 这就是说直线

$x=1/m$ 的光滑余因子是常数函数 $3/m$。直线 $x=i/m, i=2, \cdots, m-1$ 的光滑余因子也为 $3/m$。这样便得到恒等式(2.64)。而(2.65)式可由对称性得出。 □

注意到 $f-W_{mn}(f)$ 和 $g-W_{mn}(g)$ 是分别以 $1/m$ 和 $1/n$ 为周期的，我们有

推论 2.28 设 $f(x,y)=x^3$ 和 $g(x,y)=y^3$，则当 $0\leqslant x\leqslant 1/m$，$0\leqslant y\leqslant 1/n$ 时，有

$$(f-W_{mn}(f))\left(x+\frac{i}{m}\right)=(f-W_{mn}(f))(x),$$

$$(g-W_{mn}(g))\left(y+\frac{j}{m}\right)=(g-W_{mn}(g))(y),$$

$i=1,\cdots,m-1$，$j=1,\cdots,n-1$。

为了给出关于 x^2y 和 xy^2 的二元 B 样条恒等式，我们考虑以 $(i/m,j/n),((i-1)/m,j/n),((i-1)/m,(j-1)/n)$ 及 $(i/m,(j-1)/n)$ 为顶点的矩形。矩形被分成 4 个三角形胞腔，按反时针方向依次记为 D_{ij},E_{ij},F_{ij} 和 G_{ij}，其中 D_{ij} 定义如(2.63)式。

定理 2.29 设 $h(x,y)=x^2y$，且 $P_{ij:1},P_{ij:2},P_{ij:3}$ $P_{ij:4}$ 分别是 $W_{mn}(h)$ 在胞腔 $D_{ij},E_{ij},F_{ij},G_{ij}$ 上的表示，则有

$$m^2nP_{ij:1}(x,y)=\left(j-\frac{1}{2}\right)(mx-i)^2+i(2mx-i)ny,$$

$$\begin{aligned}m^2nP_{ij:2}(x,y)=&\left(j-\frac{1}{2}\right)(mx-i)^2+\frac{1}{2}(mx-i+j)^2\\&+[i(2mx-i)-(mx-i+j)]ny\\&+\frac{1}{2}(ny)^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}m^2nP_{ij:3}(x,y)=&\left(j-\frac{1}{2}\right)(mx-i+1)^2+(i-1)\\&\cdot(2mx-i+1)ny,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}m^2nP_{ij:4}(x,y)=&(j-1)\left[i^2-i-\frac{1}{2}(j-1)+(1-2i)\right.\\&\left.\cdot mx+(mx)^2\right]+[-i^2+i+(j-1)\end{aligned}$$

$$-(1-2i)mx]ny-\frac{1}{2}(ny)^2,$$

$i=1,\cdots,m,\ j=1,\cdots,n-1.$

如同以前的做法，求出 $W_{mn}(h)$ 在网点及网线段中点的值，便可完成定理 2.29 证明。 □

利用对称性,对单项式 xy^2 可建立起相应的恒等式.

在下述意义下，$h-W_{mn}(h)$ 也是以 $1/m$ 和 $1/n$ 为周期的。

推论 2.30 设 $h(x,y)=x^2y$，则对所有 $x,y:0\leqslant x\leqslant 1/m$，$0\leqslant y\leqslant 1/n$，有

$$(h-W_{mn}(h))\left(x+\frac{i}{m},y+\frac{j}{n}\right)=(h-W_{mn}(f))(x,y),$$

$i=1,\cdots,m-1,j=1,\cdots,n-1.$

我们还可建立

推论 2.31 设 $h(x,y)=x^2y$，且 $P_{ij:1},\cdots,P_{ij:4}$ 分别是 $W_{mn}(h)$ 在 D_{ij},E_{ij},F_{ij} 及 G_{ij} 上的表达式,则对一切 (x,y) 有

$$P_{ij:3}(x,y)=P_{i-1,j:1}(x,y),$$

$$P_{ij:4}(x,y)-P_{i,j-1:2}(x,y)=-\frac{n}{m^2}\left[y-\frac{j-1}{n}\right]^2.$$

因为二元 B-样条的集合 A 生成整个 $S_2^1(\Delta_{mn}^{(2)})$，所以可用 B-样条级数 $\sum_{ij}\alpha_{ij}B_{ij}$ 逼近 $S_2^1(\Delta_{mn}^{(2)})$。此处仅讨论一致逼近和逐点逼近。

我们首先研究二元变差缩减样条的一致逼近。有序对 (x,y) 的 Euclid 范数为

$$|(x,y)|=(x^2+y^2)^{1/2}.$$

又设 $K\subset R^2$ 为紧集,而 $f\in C(K)$ 的连续模记为

$$\omega_K(f;\delta)=\sup\{|f(x,y)-f(u,v)|:(x,y),(u,v)\in K,$$
$$|(x,y)-(u,v)|<\delta\}.$$

另设

$$\delta_{mn}=\max\left[\frac{1}{m},\frac{1}{n}\right],$$

$$\delta'_{mn}=\frac{1}{2mn}\max\left[\sqrt{9m^2+n^2},\sqrt{m^2+9n^2}\right].$$

设紧集K为包含D的开集Ω的闭包。对充分大的m和n，例如$m,n\geqslant N_0$，B样条B_{ij}支集的中心位于K的内部，$\|\cdot\|_D$为在D上的上确界。

定理 2.32 设$f\in C(K)$，则对所有$m,n\geqslant N_0$，有

$$\|f-V_{mn}(f)\|_D\leqslant\omega_K(f,\delta'_{mn}).\tag{2.66}$$

若$f\in C^1(D)$，则有

$$\|f-V_{mn}(f)\|_D\leqslant\delta_{mn}\max\left[\omega_D(f_1,\delta_{mn}/2),\omega_D(f_2,\delta_{mn}/2)\right].\tag{2.67}$$

若$f\in C^2(D)$，则有

$$\|f-V_{mn}(f)\|_D\leqslant\frac{1}{4}\delta^2_{mn}\|D^2f\|.\tag{2.68}$$

以下f_1和f_2分别表示f关于第一和第二变量的偏导数，线性变换$D^2f(x,y):R^2\times R^2\to R$定义为:

$$\begin{aligned}&D^2f(x,y)((u_1,u_2),(v_1,v_2))\\&\quad=f_{11}(x,y)u_1v_1+f_{12}(x,y)u_1v_2+f_{21}(x,y)u_2v_1+f_{22}(x,y)u_2v_2,\end{aligned}$$

其中f_{11}为f_1对第一个变量的偏导数，等等，而$\|D^2f\|$表示$D^2f(x,y)$的范数在D上的最大值。

注意到δ'_{mn}为B_{ij}支集的"半径",由引理 2.22 易导出(2.66)式。

设$f\in C^1(D)$,F为$\Delta^{(2)}_{mn}$的三角形胞腔的闭包,使得

$$\|f-V_{mn}(f)\|_D=\|f-V_{mn}(f)\|_F.$$

又设(x_0,y_0)为点$\left(i/m,\left(j-\frac{1}{2}\right)/n\right)$或$\left(\left(i-\frac{1}{2}\right)/m,j/n\right)$，则由中值定理可得

$$\begin{aligned}f(x,y)=p_1(x,y)&+(f_1(u,v)-f_1(x_0,y_0))(x-x_0)\\&+(f_2(u,v)-f_2(x_0,y_0))(y-y_0),\end{aligned}\tag{2.69}$$

其中 $(u,v)=t(x,y)+(1-t)(x_0,y_0), 0\leqslant t\leqslant 1$,

$$p_1(x,y)=f(x_0,y_0)+f_1(x_0,y_0)(x-x_0)+f_2(x_0,y_0)(y-y_0). \tag{2.70}$$

由定理 2.23 及 $\|V_{mn}\|=1$，我们有

$$\|f-V_{mn}(f)\|_F\leqslant\|f-p_1\|_F+\|V_{mn}(f-p_1)\|_F$$
$$\leqslant 2\|f-p_1\|_F.$$

所以从(2.69)式即得(2.67)式。

若 $f\in C^2(D)$，由 Taylor 公式有

$$f(x,y)=p_1(x,y)+\frac{1}{2}D^2f(u,v)(x-x_0,y-y_0)^2,$$

其中 $(u,v)=t(x,y)+(1-t)(x_0,y_0), t\in[0,1]$ 且

$$(x-x_0,y-y_0)^2=((x-x_0,y-y_0),(x-x_0,y-y_0)).$$

这样，不难建立(2.68)式。 □

对于线性二元样条算子 W_{mn} 的逼近，我们可作下述改进。

定理 2.33 设 $f\in C(K)$，且 $m,n\geqslant N_0$，当 $f\in C^2(D)$ 时，有

$$\|f-W_{mn}(f)\|_D\leqslant\frac{1}{2}\delta_{mn}^2\max[\omega_D(f_{11},\delta_{mn}/2),$$
$$2\omega_D(f_{12},\delta_{mn}/2),\omega_D(f_{22},\delta_{mn}/2)]; \tag{2.71}$$

当 $f\in C^3(D)$ 时，

$$\|f-W_{mn}(f)\|_D\leqslant\frac{1}{12}\delta_{mn}^3\|D^3f\|. \tag{2.72}$$

这里线性变换 $D^3f(x,y):R^2\times R^2\to R$ 定义为

$$D^3f(x,y)((u_1,u_2),(v_1,v_2),(w_1,w_2))$$
$$=\sum_{i,j,k=1}^{2}f_{ijk}(x,y)u_iv_jw_k,$$

且 $\|D^3f(x,y)\|$ 为 $D^3f(x,y)$ 的范数在D上的最大值。

为证明(2.71)式，由 Taylor 公式

$$f(x,y)=p_1(x,y)+\frac{1}{2}\{(f_{11}(u,v)-f_{11}(x_0,y_0))(x-x_0)^2$$

$$+ 2(f_{12}(u,v) - f_{12}(x_0,y_0))(x - x_0)(y - y_0)$$
$$+ (f_{22}(u,v) - f_{22}(x_0,y_0))(y - y_0)\}, \qquad (2.73)$$

这里 $p_1(x,y)$ 由(2.70)式给出。由定理 2.24 及 $\|W_{mn}\| = 3$，我们有

$$\|f - W_{mn}(f)\|_F \leqslant 4\|f - p_2\|_F.$$

又因为 $1/mn \leqslant \delta_{mn}^2$，所以从(2.73)式即得(2.71)式。

当 $f \in C^3(D)$ 时，由 Taylor 公式有

$$f(x,y) = p_2(x,y) + \frac{1}{6} D^3 f(u,v)(x - x_0, y - y_0)^3,$$

$(u,v) = t(x,y) + (1-t)(x_0,y_0), 0 \leqslant t \leqslant 1$，所以(2.72)式成立。 □

下面我们给出类似于 Вороновская 就 Bernstein 多项式所给出的逼近阶的渐近公式。从所得到的结果可以看出(2.68)和(2.72)式的逼近阶都是不可改进的。

定理 2.34 设 $f(x,y) \in C^2(D)$，记 $n = t_m m$，又假定当 $m \to \infty$ 时，有 $t_m \to t, 0 < t < \infty$，则对任何 $(x,y) \in D$，当 $m \to \infty$ 时，有

$$m^2(V_{mn}(f) - f)(x,y) \to \frac{1}{8}\left(f_{11}(x,y) + \frac{1}{t^2} f_{22}(x,y)\right). \qquad (2.74)$$

对任何 $(x,y) \in D$，我们有

$$f\left(\frac{i}{m}, \frac{j}{n}\right) - f(x,y) = f_1(x,y)\left(\frac{i}{m} - x\right) + f_2(x,y)\left(\frac{j}{n} - y\right)$$
$$+ \frac{1}{2} f_{11}(x,y)\left(\frac{i}{m} - x\right)^2 + f_{12}(x,y)\left(\frac{i}{m} - x\right)$$
$$\cdot \left(\frac{j}{n} - y\right) + \frac{1}{2} f_{22}(x,y)\left(\frac{j}{n} - y\right)^2 + O(1/m^2),$$

其中 $O(1/m^2)$ 依赖于 (x,y) (因为 $t_m \to t, 0 < t < \infty$)。所以由定理 2.23 及推论 2.26 可得(2.74)式。 □

设

$$g(x) = -x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x,$$

又设 $Q(x,y)$ 是D上的二元 C^1 样条函数，它在4个三角形胞腔 $\left[(1,1),\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),(1,0)\right]$，$\left[(1,1),(0,1),\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right]$，$\left[\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),(0,1),(0,0)\right]$ 及 $\left[\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),(0,0),(1,0)\right]$ 上的表达式分别为

$$
\begin{cases}
q_1(x,y)=-x^2y+\dfrac{1}{2}(x-1)(x+4y-1),\\
q_2(x,y)=-x^2y+\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{2}(x+y-1)^2,\\
q_3(x,y)=-x^2y+\dfrac{1}{2}x^2,\\
q_4(x,y)=-x^2y+\left(x-\dfrac{1}{2}y\right)y.
\end{cases}
$$

定理2.35 设 $f\in C^3(D)$，记 $n=t_m m$，且当 $m\to\infty$ 时，$t_m\to t, 0<t<\infty$，则对任意 $(x,y)\in D$，当m沿所有子列趋近于∞时，$m^3(W_{mn}(f)-f)(x,y)$ 的所有极限点的集合 $L_f(x,y;t)$ 可以依据 x,y 的各种情况表示如下：

1）设x和y都是无理数，则

$$
\begin{aligned}
L_f(x,y;t)=\Big\{&\frac{1}{6}f_{111}(x,y)q(x_1)+\frac{1}{2t}f_{112}(x,y)Q(x_2,y_2)\\
&+\frac{1}{2t^2}f_{122}(x,y)Q(y_1,x_3)\\
&+\frac{1}{6t^3}f_{222}(x,y)q(y_1):x_1,x_2,x_3,\\
&y_1,y_2,y_3\in[0,1]\Big\}
\end{aligned}
$$

2）设x为无理数，$y=r/s$ 是有理数，且 $0\leqslant r\leqslant s$，r、s 互质，则

$$
\begin{aligned}
L_f(x,y;t)=\Big\{&\frac{1}{6}f_{111}(x,y)q(x_1)+\frac{1}{2t}f_{112}(x,y)Q\left(x_2,\frac{j_1}{s}\right)\\
&+\frac{1}{2t^2}f_{122}(x,y)Q\left(\frac{j_2}{s},x_3\right)+\frac{1}{6t^3}f_{222}(x,y)
\end{aligned}
$$

$$\cdot q\left(\frac{j_3}{s}\right): x_1, x_2, x_3 \in [0,1] \text{ 且 } j_1, j_2, j_3 = 0, \cdots, s\Big\}.$$

3）设 y 为无理数，$x = u/v$ 为有理数，且 $0 \leqslant u \leqslant v$，$u$、$v$ 互质，则

$$L_f(x, y; t) = \Big\{\frac{1}{6} f_{111}(x,y) q\left(\frac{i_1}{v}\right) + \frac{1}{2t} f_{112}(x,y) Q\left(\frac{i_2}{v}, y_1\right) + \frac{1}{2t^2} f_{122}(x,y) Q\left(y_2, \frac{i_3}{u}\right) + \frac{1}{6t^3} f_{222}(x,y) \cdot q(y_3): y_1, y_2, y_3 \in [0,1] \text{ 且 } i_1, i_2, i_3 = 0, \cdots, v\Big\}.$$

4）设 $x = u/v$，$y = r/s$ 都是有理数，且 $0 \leqslant u \leqslant v$，$0 \leqslant r \leqslant s$，$(u,v) = 1$，$(r,s) = 1$，则

$$L_f(x, y; t) = \Big\{\frac{1}{6} f_{111}(x,y) q\left(\frac{i_1}{v}\right) + \frac{1}{2t} f_{112}(x,y) Q\left(\frac{i_2}{v}, \frac{j_2}{s}\right) + \frac{1}{2t^2} f_{122}(x,y) Q\left(\frac{j_3}{s}, \frac{i_3}{v}\right) + \frac{1}{6t^3} f_{222}(x,y) \cdot q\left(\frac{j_1}{s}\right): i_1, i_2, i_3 = 0, \cdots, v; j_1, j_2, j_3 = 0, \cdots, s\Big\}.$$

顺便指出，当 $x, y \in [0,1]$ 均为无理数时，集 $L_f(x,y;t)$ 是很大的。事实上 $q(x)$ 和 $Q(x,y)$ 的值域分别为区间 $[-\sqrt{3}/36, \sqrt{3}/36]$ 和 $[-2, 1/54]$。

为叙述方便，改设 $D = [0, m] \otimes [0, n]$，$\Delta_{mn}^{(2)}$ 的剖分线为 $x - j = 0$，$y - j = 0$，$x - y - j = 0$ 和 $x + y - j = 0$，$j = \cdots, -1, 0, 1, \cdots$。P. Sablonniere[31] 构造了 $S_4^2(\Delta_{mn}^{(2)})$ 的两个具有形如图 2.12 与图 2.13 的最小支集函数。遗憾的是，由这两函数及其平移所生成的子空间中，竟然不包含常数函数。当然也就不足以成为 $S_4^2(\Delta_{mn}^{(2)})$ 的基函数了。为弥补此不足，文[32]中构造了 $S_4^2(\Delta_{mn}^{(2)})$ 中另一个具局部支集的样条函数，它以图 2.14 所示的区域为支集。

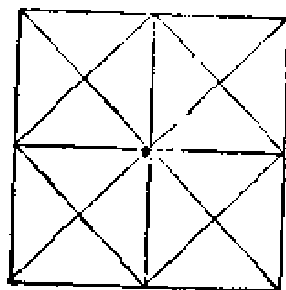


图 2.13

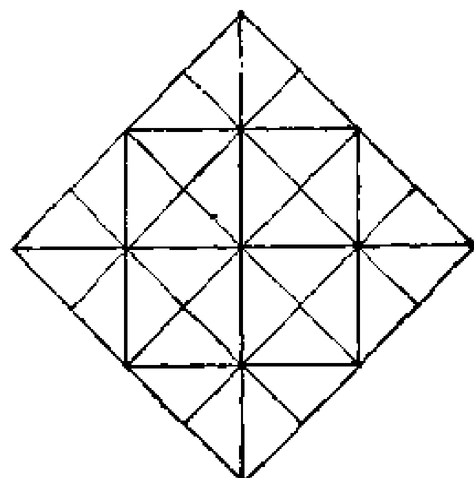


图 2.14

设 $A(x,y)$ 为 $S_4^1(\Delta_{mn}^{(2)})$ 中一以图 2.12 为支集，且满足 $A(1/2, 1/2) = 5/12$ 的函数；$B(x, y)$ 为 $S_4^1(\Delta_{mn}^{(2)})$ 中一以图 2.13 为支集，且满足 $B(0,0) = 1/6$ 的函数；$C(x,y)$ 为 $S_4^1(\Delta_{mn}^{(2)})$ 中一以图 2.14 为支集，且满足 $C(0,0) = 1/3$ 的函数。

按本章 §1 中所指出的维数公式，有

$$\dim S_4^1(\Delta_{mn}^{(2)}) = 3mn + 6m + 6n + 6.$$

若记

$$A_i = A_i(\cdot) = A(\cdot - i),$$
$$B_i = B_i(\cdot) = B(\cdot - i),$$
$$C_i = C_i(\cdot) = C(\cdot - i),$$

其中 $i \in \mathbf{Z}^2$. 则易知在 D 上不恒为零的 A_i, B_i 和 C_i 的个数为 $3mn + 6m + 6n + 10$. 从而它们必线性相关. 使 A_i, B_i, C_i 于 D 上不恒为 0 的指标集分别是

$$E := \{i = (\alpha,\beta): -1 \leqslant \alpha \leqslant m, -1 \leqslant \beta \leqslant n\},$$
$$F := \{i = (\alpha,\beta): 0 \leqslant \alpha \leqslant m, 0 \leqslant \beta \leqslant n\},$$
$$G := \{i = (\alpha,\beta): i \neq (-1,-1), (m+1,-1), (-1,n+1), (m+1,n+1), -1 \leqslant \alpha \leqslant m, -1 \leqslant \beta \leqslant n\}.$$

定理 2.36[32] 任取 (α_*,β_*), $0 \leqslant \alpha_* \leqslant m$, $0 \leqslant \beta_* \leqslant n$, 并记

$$G_1 = G \backslash \{(\alpha_*,\beta_*), (\alpha_*,\beta_* + 1), (\alpha_*,\beta_* - 1), (\alpha_* - 1,\beta_*)\},$$

$$G_2 = G\backslash\{(\alpha_0,\beta_0),(\alpha_0,\beta_0+1),(\alpha_0,\beta_0-1),(\alpha_0+1,\beta_0)\},$$
$$G_3 = G\backslash\{(\alpha_0,\beta_0),(\alpha_0+1,\beta_0),(\alpha_0-1,\beta_0),(\alpha_0,\beta_0+1)\},$$
$$G_4 = G\backslash\{(\alpha_0,\beta_0),(\alpha_0+1,\beta_0),(\alpha_0-1,\beta_0),(\alpha_0,\beta_0-1)\}.$$

则下面 4 个集合中的任何一个都是 $S_4^2(\Delta_{mn}^{(2)})$ 的基函数:

$$B_l = \{A_i, B_j, C_k: i\in E, j\in F, k\in G_l\}, l=1,2,3,4.$$

为证定理,只要注意到,B_l 中元素的个数恰为 $\dim S_4^2(\Delta_{mn}^{(2)})$,所以只须证明它们是线性无关的即可。这不难用类似于前面的方法来证明。特留给读者自己来完成。 □

进而,可以证明如下的单位分解定理成立:对一切 $x\in D$,恒有

$$\sum_{i\in E} A(x-i) + \sum_{i\in F} B(x-i) + \sum_{i\in G} C(x-i) = 1.$$

需要指出的是,A, B 和 C 中的任一个函数及其平移均不单独具备单位分解性质。

关于如下构造的线性正算子

$$(Lf)(x) := \sum_{i\in E} f(i+(1/2,1/2))A(x-i)$$
$$+ \sum_{i\in F} f(i)B(x-i) + \sum_{i\in G} f(i)C(x-i),$$

可以证明对一切 $f\in \mathbf{P}_1$,均有

$$(Lf)(x) \equiv f(x), x\in D.$$

同以前的讨论类似地,如果我们不限制 L 为正线性算子,则可构造出精确保持 3 次多项式的算子,因而它将具有 4 阶逼近度.若再用到网点处的偏导数值,相信还可构造出保持 4 次多项式的算子来。

§5. 某些非均匀三角剖分上的样条函数空间

所谓非均匀的 1-型和 2-型三角剖分,乃指用以生成这些剖分的原始矩形剖分

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{m+1} = b,$$
$$c = y_0 < y_1 < \cdots < y_{n+1} = d$$

是非均匀的，即，若记

$$h_i = x_i - x_{i-1}, \quad k_j = y_j - y_{j-1},$$

则诸 h_i 未必相等，诸 k_j 亦未必相等。

采用光滑余因子协调法，可以证明形如图 2.15 的支集上的 $S_3^1(\Delta_{mn}^{(1)})$ 中 B 样条的存在是有条件的。

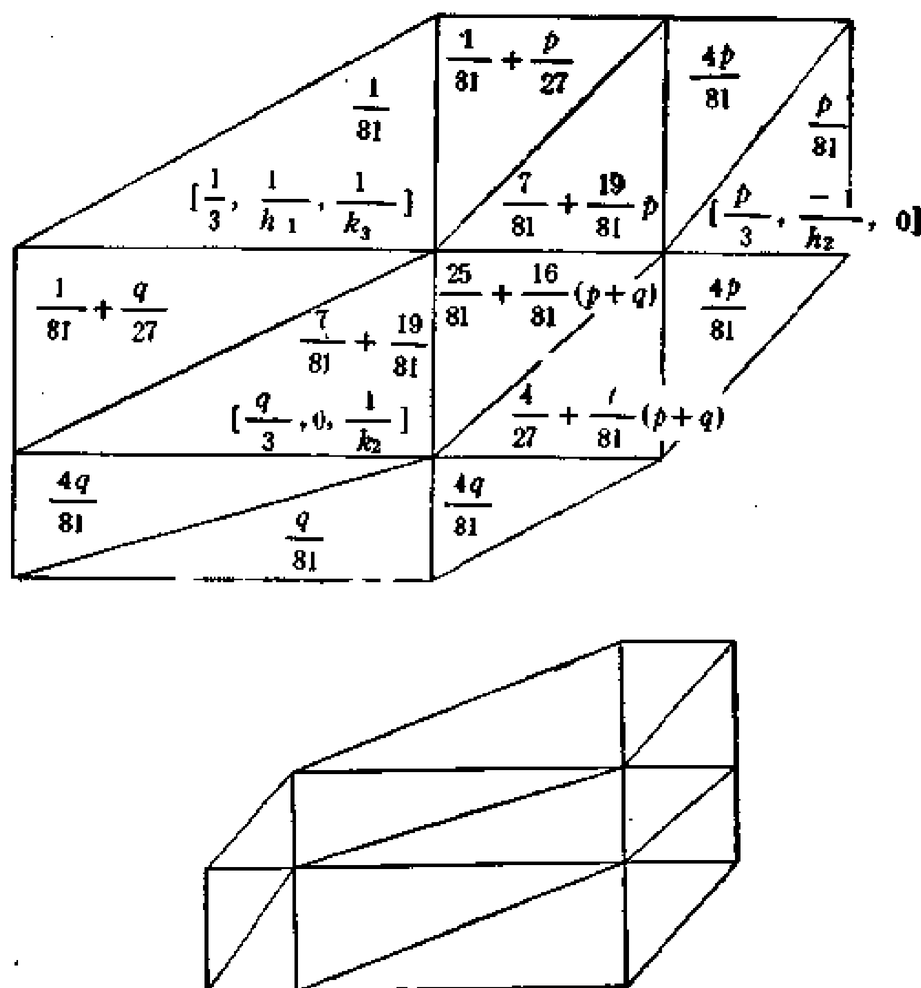


图 2.15

$$\left(\frac{h_2}{h_1} = \frac{h_3}{h_2} = p, \quad \frac{k_1}{k_2} = \frac{k_2}{k_3} = q\right)$$

定理 2.37[23] 由上图所示的多边形是空间 $S_3^1(\Delta_{mn}^{(1)})$ 中一 B

样条的支集，必须且只须

$$h_i^2(h_{i-1}h_{i+1})^{-1}=k_i^2(k_{i-1}k_{i+1})^{-1}=1, i=1,2,3.$$

并且当上述条件被满足时，该 B 样条由右边图形中指出的信息所确定，而 $S_3^1(\Delta_{mn}^{(1)})$ 中任一个以所示多边形为局部支集的样条函数均为它的常数倍。

以上事实表明，非均匀三角剖分上的样条函数并不能由均匀三角剖分的样条函数经简单交换而得到。

对于非均匀的 2-型三角剖分 $\Delta_{mn}^{(2)}$，在 [23] 中我们利用光滑余因子协调法得到了一个支集如图 2.14 所示的 $S_2^1(\Delta_{mn}^{(2)})$ 中的 B-样条函数。该局部支集所涉及的垂直线和水平线分别为

$$x=x_{i-1},\quad x=x_i,\quad x=x_{i+1},\quad x=x_{i+2}$$

和

$$y=y_{j-1},\quad y=y_j,\quad y=y_{j+1},\quad y=y_{j+2}.$$

以 $B_{ij}(x,y)$ 记该 B 样条函数，因任一二元 2 次多项式被其在三角形三边中点和三顶点上的值所唯一确定，$B_{ij}(x,y)$ 可表现为

其中

$$A_i=\frac{h_i}{h_i+h_{i+1}},\quad A_i'=\frac{h_{i+1}}{h_i+h_{i+1}},$$

$$B_j=\frac{k_j}{k_j+k_{j+1}},\quad B_j'=\frac{k_{j+1}}{k_j+k_{j+1}}.$$

B 样条函数 $B_{ij}(x,y)$ 的性质可以概括于如下的定理中。

定理 2.38[24] 设

$$x_{-2}<x_{-1}<a=x_0<\cdots<x_{m+1}=b<x_{m+2}<x_{m+3},$$

$$y_{-2}<y_{-1}<c=y_0<\cdots<y_{n+1}=d<y_{n+2}<y_{n+3}.$$

则

1° 对一切 $-1\leqslant i\leqslant m+1$ 和 $-1\leqslant j\leqslant n+1$，由下页图 2.16 所给出的 $B_{ij}(x,y)$ 在其支集内是唯一的、严格正的，且 $S_2^1(\Delta_{mn}^{(2)})$ 中任一与 $B_{ij}(x,y)$ 具有同一支集的样条函数必为 $B_{ij}(x,y)$ 的常数倍；

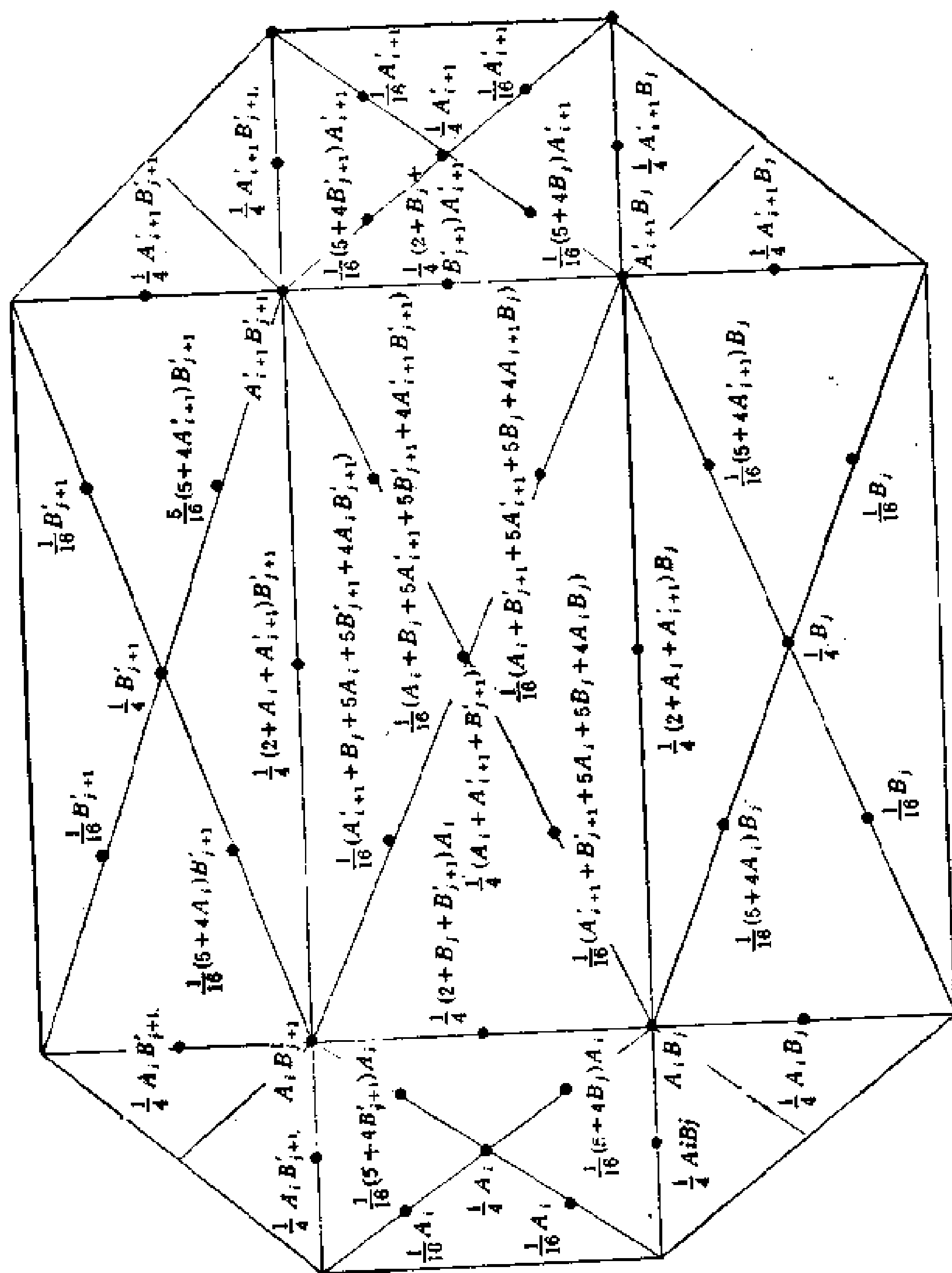


图 2.16

2° 对一切 $(x,y)\in D=[a,b]\otimes[c,d]$，均有

$$\sum_{i=-1}^{m+1}\sum_{j=-1}^{n+1}B_{ij}(x,y)=1;$$

3° 对一切 $(x,y)\in D$，均有

$$\sum_{i=-1}^{m+1}\sum_{j=-1}^{n+1}(-1)^{i+j}h_{i+1}k_{j+1}B_{ij}(x,y)=0;$$

4° 对每一指定的 (i_0, j_0)，$-1\leqslant i_0\leqslant m+1$，$-1\leqslant j_0\leqslant n+1$，下述 B 样条的集合构成 $S_2^1(\Delta_{mn}^{(2)})$ 的一个基底：

$$\mathscr{B}:=\{B_{ij}(x,y)|(i,j)\neq(i_0,j_0),-1\leqslant i_0\leqslant m+1,$$
$$-1\leqslant j_0\leqslant n+1\}.$$

证明 用协调条件不难直接证明性质 1°。为证明性质 2° 和 3°，只须验明相应的恒等式在 $\Delta_{mn}^{(2)}$ 的任一胞腔上均成立。今以 D_{ij} 记由顶点 (x_i,y_{j+1})，$((x_i+x_{i+1})/2,(y_j+y_{j+1})/2)$ 和 (x_{i+1},y_{j+1}) 所确定的三角形胞腔，并记

$P_1=(x_i,y_{j+1})$，$P_2=((x_i+x_{i+1})/2,y_j)$，$P_3=(x_{i+1},y_{j+1})$，
$P_4=((x_i+3x_{i+1})/4,(y_j+3y_{j+1})/4)$，$P_5=((x_i+x_{i+1})/2,(y_j+y_{j+1})/2)$，和 $P_6=((3x_i+x_{i+1})/4,(y_j+3y_{j+1})/4)$。

因为定义于 D_{ij} 上的 2 次多项式恒等于 1 或 0，等价于该多项式在 $P_1,\cdots,P_6$ 各点上均等式 1 或 0。据此，再应用图 2.16 中所给出的各点处的信息，不难证出性质 2° 和 3° 来。

为证性质 4°，我们采用不同于本章 § 4 中的方法。此处拟采用的方法的实质，是通过逐个分析 $\Delta_{mn}^{(2)}$ 中各三角形胞腔所涉及诸 B 样条函数间的依赖关系来证明性质 4°。容易看出，只有如下 7 个 B 样条函数在 D_{ij} 上是非平凡的

$S_1:=B_{i-1,j+1}$，$S_2:=B_{i,j+1}$，$S_3:=B_{i+1,j+1}$，$S_4:=B_{i-1,j}$，
$S_5:=B_{i,j}$，$S_6:=B_{i+1,j}$，$S_7:=B_{i,j-1}$。

为证 4°，作 B_{rt} 的线性组合，$-1\leqslant r\leqslant m+1$，$-1\leqslant t\leqslant n+1$，并令该线性组合于 D_{ij} 上恒为 0。于是我们有

$$\sum_{k=1}^{7}c_kS_k=0,\ (x,y)\in D_{ij}.$$

根据诸 s_k 在 $P_1,\cdots,P_6$ 点处的值，则可得到一个关于 $c_1,\cdots,c_7$ 的齐次线性方程组：

$$
\left[\begin{array}{ccc}
A'_iB_{j+1} & A_iB_{j+1} & 0 \\
A_iB_{j+1} & (2+A_i+A'_{i+1})B_{j+1} & A_{i+1}B_{j+1} \\
0 & A'_{i+1}B_{j+1} & A_{i+1}B_{j+1} \\
0 & (5+4A'_{i+1})B_{j+1} & 4A_{i+1}B_{j+1} \\
0 & B_{j+1} & 0 \\
4A'_iB_{j+1} & (5+4A_i)B_{j+1} & 0
\end{array}\right.
$$

$$
\begin{array}{cc}
A'_iB'_{j+1} & A_iB'_{j+1} \\
A'_iB'_{j+1} & (2+A_i+A'_{i+1})B'_{j+1} \\
0 & A'_{i+1}B'_{j+1} \\
A'_i & A_i+B_j+5A'_{i+1}+5B'_{j+1}+4A'_{i+1}B'_{j+1} \\
A'_i & A_i+B_j+A'_{i+1}+B'_{j+1} \\
(5+4B'_{j+1})A'_i, & 5A_i+B_j+A'_{i+1}+5B'_{j+1}+4A_iB'_{j+1}
\end{array}
$$

解此方程组，我们得到关系式

$$
\begin{array}{ll}
A'_iB_{j+1}c_2=A_iB'_{j+1}c_5, & B_{j+1}c_2=-B'_{j+1}c_5, \\
A_{i+1}B_{j+1}c_3=A'_{i+1}B'_{j+1}c_5, & A'_ic_4=-A_ic_5, \\
A_{i+1}c_6=-A'_{i+1}c_5, & B'_jc_7=-B_jc_5.
\end{array}
$$

不难看出，去掉 $S_1,\cdots,S_7$ 中任一 B 样条函数，例如去掉 S_1，这就等价于令原线性组合中的系数 $c_1=0$。但根据以上关系式，立即可推出其它 6 个系数 $c_2,\cdots,c_7$ 亦为 0。依此、顺次考虑相邻的三角形胞腔，则可推出原线性组合中的一切系数均为零。所以我们已经证明了集合 $\mathscr{B}$ 中的一切 B 样条函数是线性无关的。按[25,26]，$\dim S_3^1(\Delta_{mn}^{(2)})=(m+3)(n+3)-1$，它恰好与 $\mathscr{B}$ 的基数相等，所以 $\mathscr{B}$ 是 $S_3^1(\Delta_{mn}^{(2)})$ 的基底。 □

如所知，文[27]中讨论了均匀 1-型和 2-型三角剖分上的 S_3^1 空间的多种 B 样条函数。自然，这其中的一些 B 样条的支集并非最小可能者。

王绍铭在他的硕士论文[28]中，讨论了非均匀 2-型三角剖分

$\Delta_{mn}^{(2)}$ 上的 3 次样条空间 $S_3^1(\Delta_{mn}^{(2)})$ 的 B 样条基函数及其它性质.

首先，在形如图 2.17 的支集上，他构造了 6 个线性无关的 B 样条函数 $B_{ij}^k(x, y)$，$k=1, \cdots, 6$，它们的真正支集分别由图 2.18，…，图 2.23 所给出．作为例子，我们给出 $B_{ij}^1(x,y)$ 与 $B_{ij}^5(x, y)$ 的具体表达式。其它 4 个 B 样条可根据某种"对称"性构造出来。

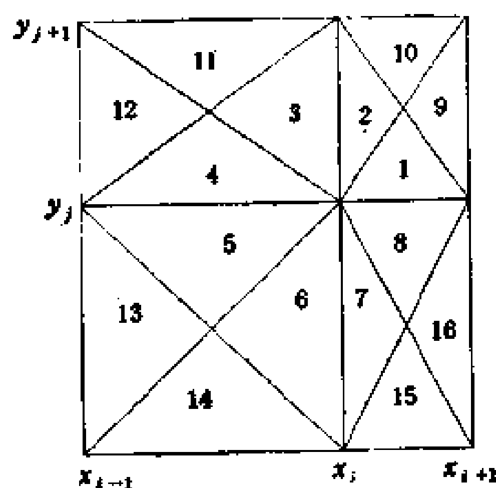


图 2.17

记

$$h_i = x_i - x_{i-1},$$
$$l_j = y_j - y_{j-1},$$
$$i = 1, \cdots, m;$$
$$j = 1, \cdots, n,$$

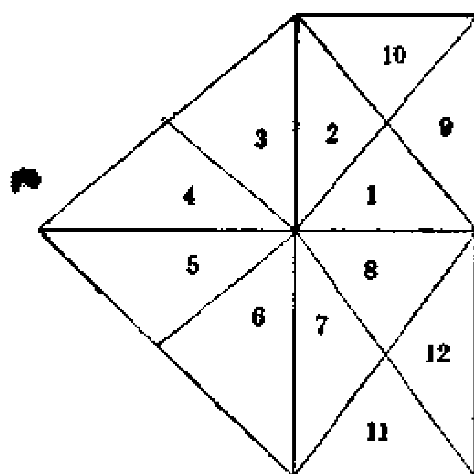


图 2.18

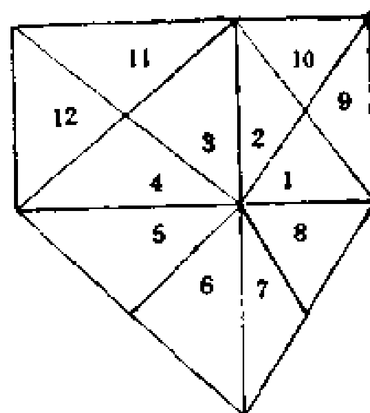


图 2.19

而 $p_s(x,y)$ 记 $B_{ij}^1(x,y)$ 在胞腔 s 上的表达式 ($s=1,\cdots,12$)，则

$$p_1(x,y) = (x - h_{i+1})^2 \left(\frac{l_j^2}{h_{i+1}^2} x - \frac{3l_j^2 + l_j l_{j+1}}{h_{i+1} l_{j+1}} y + \frac{2l_j^2 + l_j l_{j+1}}{h_{i+1}}\right)$$

$$-\left(y + \frac{l_{j+1}}{h_{i+1}} x - l_{j+1}\right)^2$$

$$\cdot\left[\frac{h_{i+1}l_j(h_{i+1}-h_i)(l_j+l_{j+1})}{l_{j+1}^3(h_i+h_{i+1})}y\right.$$

$$\left.-\frac{l_j^2(2h_{i+1}+h_i)}{l_{j+1}^2(h_i+h_{i+1})}(x-h_{i+1})+\frac{h_{i+1}l_j}{l_{j+1}}\right],$$

$$p_2(x,y)=-(y-l_{j+1})^2\left[\frac{2l_jl_{j+1}+3l_j^2}{l_{j+1}^2}x-\frac{h_{i+1}l_j(l_j+l_{j+1})}{l_{j+1}^3}y\right.$$

$$\left.-\frac{h_{i+1}l_j(2l_j+l_{j+1})}{l_{j+1}^2}\right]-\left(y+\frac{l_{j+1}}{h_{i+1}}x-l_{j+1}\right)^2$$

$$\cdot\left[\frac{h_{i+1}l_j(h_{i+1}-h_i)(l_j+l_{j+1})}{l_{j+1}^3(h_i+h_{i+1})}y\right.$$

$$\left.-\frac{l_j^2(2h_{i+1}+h_i)}{l_{j+1}^2(h_i+h_{i+1})}(x-h_{i+1})+\frac{h_{i+1}l_j}{l_{j+1}}\right],$$

$$p_3(x,y)=\left(y-\frac{l_{j+1}}{h_i}x-l_{j+1}\right)^2\left[\frac{2h_ih_{i+1}l_j(l_j+l_{j+1})}{l_{j+1}^3(h_i+h_{i+1})}y\right.$$

$$\left.+\frac{h_{i+1}l_j^2}{l_{j+1}^2(h_i+h_{i+1})}(x+h_i)\right],$$

$$p_5(x,y)=\frac{h_{i+1}}{h_i+h_{i+1}}(x+h_i)\left(y+\frac{l_j}{h_i}x+l_j\right)^2,$$

$p_4(x,y)=p_3(x,y)$, $p_6(x,y)=p_5(x,y)$,

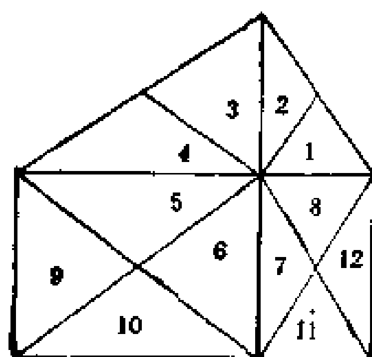


图 2.20

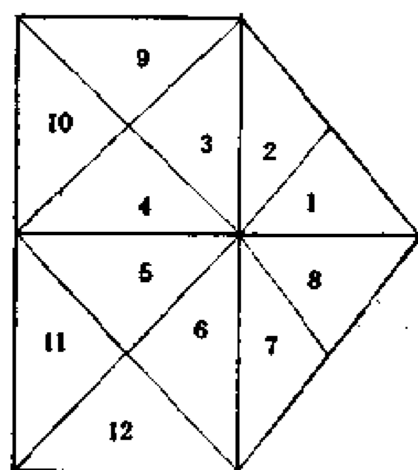


图 2.21

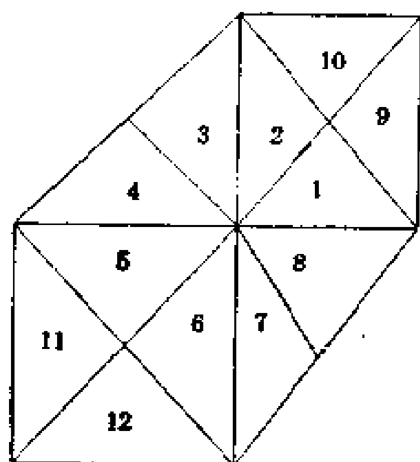


图 2.22

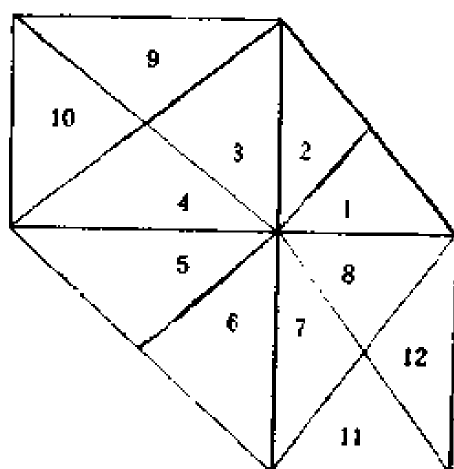


图 2.23

$$p_7(x, y) = -(x - h_{i+1})(y + l_j)^2 - \left(y - \frac{l_j}{h_{i+1}} x + l_j\right)^2$$

$$\cdot\left(\frac{h_{i+1}^2}{h_i + h_{i+1}} - \frac{2h_{i+1} + h_i}{h_i + h_{i+1}} x\right),$$

$$p_8(x,y) = (x - h_{i+1})^2\left(\frac{l_j^2}{h_{i+1}^2} x + \frac{2l_j}{h_{i+1}} y + \frac{l_j^2}{h_{i+1}}\right)$$

$$-\left(y - \frac{l_j}{h_{i+1}} x + l_j\right)^2\left(\frac{h_{i+1}^2}{h_i + h_{i+1}} - \frac{2h_{i+1} + h_i}{h_i + h_{i+1}} x\right),$$

$$p_9(x,y) = (x - h_{i+1})^2\left(\frac{l_j^2}{h_{i+1}^2} x - \frac{3l_j^2 + l_j l_{j+1}}{h_{i+1} l_{j+1}} y + \frac{2l_j^2 + l_j l_{j+1}}{h_{i+1}}\right),$$

$$p_{10}(x,y) = -(y - l_{j+1})^2\left[\frac{2l_j l_{j+1} + 3l_j^2}{l_{j+1}^2} x - \frac{h_{i+1} l_j(l_j + l_{j+1})}{l_{j+1}^3} y\right.$$

$$\left. - \frac{h_{i+1} l_j(2l_j + l_{j+1})}{l_{j+1}^2}\right],$$

$$p_{11}(x,y) = -(x - h_{i+1})(y + l_j)^2,$$

$$p_{12}(x,y) = (x - h_{i+1})^2\left(\frac{l_j^2}{h_{i+1}^2} x + \frac{2l_j}{h_{i+1}} y + \frac{l_j^2}{h_{i+1}}\right).$$

再以 $\bar{p}_t(x, y)$ 记 $B_{ij}^3(x, y)$ 在胞腔 t 上的表达式 ($t = 1, \cdots, 12$)，则

$$
\begin{aligned}
\bar{p}_1(x,y) = {} & (x-h_{i+1})^2\left[\frac{l_j^2}{h_{i+1}^2}x-\frac{l_j(3l_j+l_{j+1})}{h_{i+1}l_{j+1}}y\right. \\
& \left.+\frac{l_j(l_{j+1}+2l_j)}{h_{i+1}}\right]-\left(y+\frac{l_{j+1}}{h_{i+1}}x-l_{j+1}\right)^2 \\
& \cdot\left[\frac{h_{i+1}l_j(l_j+l_{j+1})(h_{i+1}-h_i)}{l_{j+1}^3(h_i+h_{i+1})}y\right. \\
& +\frac{h_{i+1}l_j(l_{j+1}+3l_j)}{l_{j+1}(l_j+l_{j+1})}-\frac{l_j^2(2h_{i+1}l_j+h_il_j-h_il_{j+1})}{l_{j+1}^2(h_i+h_{i+1})(l_j+l_{j+1})} \\
& \left.\cdot(x-h_{i+1})\right],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\bar{p}_2(x,y) = {} & -(y-l_{j+1})^2\left[\frac{l_j(3l_j+2l_{j+1})}{l_{j+1}^2}x\right. \\
& \left.-\frac{l_jh_{i+1}(l_j+l_{j+1})}{l_{j+1}^3}y-\frac{h_{i+1}l_j(2l_j+l_{j+1})}{l_{j+1}^2}\right] \\
& -\left(y+\frac{l_{j+1}}{h_{i+1}}x-l_{j+1}\right)^2 \\
& \cdot\left[\frac{l_jh_{i+1}(l_j+l_{j+1})(h_{i+1}-h_i)}{l_{j+1}^3(h_i+h_{i+1})}y\right. \\
& +\frac{h_{i+1}l_j(l_{j+1}+3l_j)}{l_{j+1}(l_j+l_{j+1})}-\frac{l_j^2(2h_{i+1}l_j+h_il_j-h_il_{j+1})}{l_{j+1}^2(h_i+h_{i+1})(l_j+l_{j+1})} \\
& \left.\cdot(x-h_{i+1})\right],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\bar{p}_3(x,y) = {} & \left(y-\frac{l_{j+1}}{h_i}x-l_{j+1}\right)^2\left[\frac{l_j^2(h_{i+1}l_j-h_{i+1}l_{j+1}-2h_il_{j+1})}{l_{j+1}^2(h_i+h_{i+1})(l_j+l_{j+1})}\right. \\
& \cdot(x+h_i)+\frac{2h_ih_{i+1}l_j(l_j+l_{j+1})}{l_{j+1}^3(h_i+h_{i+1})}y \\
& \left.+\frac{2h_il_j^2}{l_{j+1}(l_j+l_{j+1})}\right],
\end{aligned}
$$

$$
\bar{p}_4(x,y)=\bar{p}_3(x,y),
$$

$$
\bar{p}_5(x,y)=\frac{l_j}{h_i}\left(2y-\frac{l_j}{h_i}x+l_j\right)(x+h_i)^2-\frac{1}{h_i+h_{i+1}}
$$

$$\cdot\left(\frac{h_il_{j+1}-h_il_j-2h_{i+1}l_j}{l_j+l_{j+1}}x+h_i^2\right)$$

$$\cdot\left(y+\frac{l_j}{h_i}x+l_j\right)^2,$$

$$\bar{p}_6(x,y)=-\frac{1}{h_i+h_{i+1}}\left(y+\frac{l_j}{h_i}x+l_j\right)^2$$

$$\cdot\left(\frac{h_il_{j+1}-h_il_j-2h_{i+1}l_j}{l_j+l_{j+1}}x+h_i^2\right)$$

$$+(x+h_i)(y+l_j)^2,$$

$$\bar{p}_7(x,y)=\frac{1}{h_i+h_{i+1}}\left(\frac{h_{i+1}l_{j+1}+2h_il_j+3h_{i+1}l_j}{l_j+l_{j+1}}x\right.$$

$$\left.+h_ih_{i+1}\right)\left(y-\frac{l_j}{h_{i+1}}x+l_j\right)^2,$$

$$\bar{p}_8(x,y)=\bar{p}_7(x,y),$$

$$\bar{p}_9(x,y)=\frac{l_j}{h_{i+1}}\left(\frac{l_j}{h_{i+1}}x-\frac{3l_j+l_{j+1}}{l_{j+1}}y+2l_j+l_{j+1}\right)$$

$$\cdot(x-h_{i+1})^2,$$

$$\bar{p}_{10}(x,y)=\frac{l_j}{l_{j+1}^2}\left[\frac{h_{i+1}(l_j+l_{j+1})}{l_{j+1}}y-(2l_{j+1}+3l_j)x\right.$$

$$\left.+h_{i+1}(2l_j+l_{j+1})\right](y-l_{j+1})^2,$$

$$\bar{p}_{11}(x,y)=\frac{l_j}{h_i}\left(2y-\frac{l_j}{h_i}x+l_j\right)(x+h_i)^2,$$

$$\bar{p}_{12}(x,y)=(x+h_i)(y+l_j)^2.$$

其它四个 B 样条函数 $B_{ij}^2(x,y)$、$B_{ij}^3(x,y)$、$B_{ij}^4(x,y)$ 和 $B_{ij}^6(x,y)$ 也可以相应地表达出来。为节省篇幅，此处从略。

根据 Schumaker[25] 的结果

$$\dim S_3^1(\Delta_{mn}^{(2)})=5(m+1)(n+1)-(m+n+2).$$

王绍铭[26] 指出了 $S_3^1(\Delta_{mn}^{(2)})$ 中 B 样条基函数的一类选取方法：在点 (x_i,y_j)，$i=0,\cdots,m-1$；$j=0,\cdots,n-1$ 处任意选取

$B^k_{ij}(x,y)$，$k=1,\cdots,6$ 中的5个；并在点 $(x_m,y_j), j=0,\cdots,n-1$ 和 $(x_i,y_n), i=0,\cdots,m-1$ 处分别任意选取 $B^k_{mj}(x,y)$ 和 $B^k_{in}(x,y)$，$k=1,\cdots,6$ 中的4个；再取点 (x_m,y_n) 处的 $B^1_{mn}(x,y), B^2_{mn}(x,y)$ 和 $B^4_{mn}(x,y)$。他证明了，按上法选取的 B 样条组是 $S^1_2(\Delta^{(2)}_{mn})$ 的一组 B 样条基函数。

对于均匀2-型三角剖分 $\Delta^{(2)}_{mn}$，有

定理 2.39[28] 设 $h_i=h_j(i\neq j)$，$l_i=l_j(i\neq j)$，且 $h_i l_j^2=c>0$ 是常数。则以下事实成立

$$1^\circ \quad c^{-1}\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}[B^1_{ij}(x,y)+B^4_{ij}(x,y)]\equiv 1,\ (x,y)\in D;$$

2° 定义

$$L(f)=c^{-1}\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}f(x_i,y_j)[B^1_{ij}(x,y)+B^4_{ij}(x,y)],$$

则对一切 $f(x,y)\in C(D)$，有

$$\|L(f)-f\|_\infty\leqslant \omega(f,H),$$

其中 $H=\sqrt{h^2+l^2}$，而 $\omega(f,\cdot)$ 表示 f 的连续模数。

对于非均匀的 $\Delta^{(2)}_{mn}$，却有

定理 2.40[28] 对任意给定的剖分 $\Delta^{(2)}_{mn}$ 来说，不总存在一组正数 c^k_{ij}，使得下式成立

$$\sum_{i,j,k}c^k_{ij}B^k_{ij}(x,y)\equiv 1,\ (x,y)\in D.$$

该定理表明，“单位分解性质”并不是“天然”被满足的。

采用通常线代数方法，不难证出此定理。此处从略。

在文献[29]中，王绍铭针对非均匀2-型三角剖分 $\Delta^{(2)}_{mn}$ 上的 Fraeijs de Veubeke-Sander 四边形元，给出了明显的插值多项式的表达式。根据他所给出的公式，人们容易把这个 $S^1_3(\Delta^{(2)}_{mn})$ 模型应用于有限元和计算机辅助几何设计中。特别应该指出的是，对于如上产生的插值算子（分片多项式算子）$T(f)$，王绍铭[29] 得到了误差估计式：设 $f(x,y)\in C^4(\Delta^{(2)}_{mn})$，则

$$\|D^{l}(T(f)-f)\|_{\infty}=O(h^{k-l}),$$

其中 h 为 $\Delta_{mn}^{(2)}$ 中最大的网线长度。[29] 中还指出了上面估计中的具体系数。

§6. 均匀 1- 型与 2- 型三角剖分下带有边界条件的样条函数空间[33][34]

设 $\Omega=[0,n+1]\otimes[0,m+1]$，并记 $\Delta_{nm}^{(1)}$ 和 $\Delta_{nm}^{(2)}$ 分别为如图 2.24 (a), (b) 所示的 1,2- 型三角剖分：

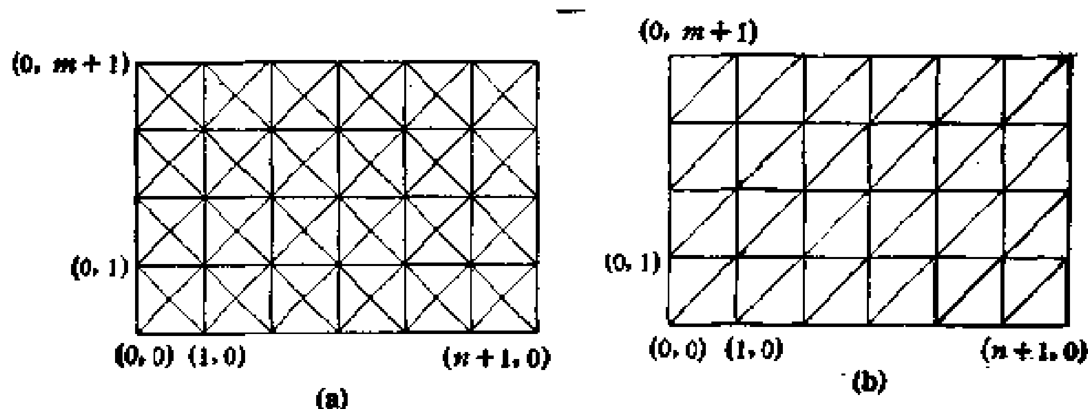


图 2.24

对给定的正整数 k,μ,α，定义如下的两个样条函数空间：

$$\begin{aligned}S_k^{\mu,\alpha}(\Delta_{nm}^{(r)})=\{s\in S_k^{\mu}(\Delta_{nm}^{(r)}):&D_x^i s(0,y)=D_x^i s(n+1,y)=0,\\&0\leqslant y\leqslant m+1,D_y^i s(x,0)=D_y^i s(x,n+1)\\&=0,0\leqslant x\leqslant n+1,i=1,2,\cdots,\alpha\},r=1,2.\end{aligned}$$

显然 $S_k^{\mu,\alpha}(\Delta_{nm}^{(r)})\subset S_k^{\mu}(\Delta_{nm}^{(r)}),r=1,2$.

由于边界约束条件的限制，鉴于 $S_k^{\mu,\alpha}(\Delta_{nm}^{(r)})$ 空间的复杂性，我们将对 k,μ,α 的选择加以某种限制。用符号 $T^{(r)}$, $\mathring{E}^{(r)}$ 和 $\mathring{V}^{(r)}$ 分别表示剖分 $\Delta_{nm}^{(r)}$ 的三角形单元，内网点和内顶点的个数。不难算出

$$T^{(1)}=2(mn+m+n+1),\quad T^{(2)}=4[nm+n+m+1],$$

$$\mathring{E}^{(1)}=3nm+2n+2m+1,\quad \mathring{E}^{(2)}=6nm+5n+5m+4,$$

$$\mathring{V}^{(1)}=nm,\qquad \mathring{V}^{(2)}=2nm+n+m+1.$$

(I) $S_k^{0,0}(\Delta_{nm}^{(1)})$ 和 $S_k^{0,0}(\Delta_{nm}^{(2)})$ 空间

为得到带有齐次边界条件的分片 k 次且整体连续的多项式样条空间的维数及基函数，首先介绍下面明显而基本的引理。

引理 2.41 设 T 是一三角形，它的边界所对应的函数分别是 l_1,l_2 和 l_3。则

$$x^iy^jl_1(x,y)l_2(x,y)l_3(x,y),\quad 0\leqslant i,j\leqslant i+j\leqslant k-3 \tag{2.75}$$

是在 T 的边界上取值为零的 k 次多项式。

引理 2.42 设 $\Omega'=T_1\cup T_2$，此处三角形 T_1 和 T_2 的三边分别由 $l_1=0,l_2=0,l_3=0$ 和 $l_3=0,l_4=0,l_5=0$ 所决定.则存在常数 c 使得

$$Q(x,y)=\begin{cases}l_1(x,y)l_2(x,y),(x,y)\in T_1,\\ cl_4(x,y)l_5(x,y),(x,y)\in T_2\end{cases} \tag{2.76}$$

在 Ω' 的边界上为零并在 Ω' 上为连续的分片 2 次样条函数。假定 $(\xi_1,\eta_1),\cdots,(\xi_{k-1},\eta_{k-1})$ 是 l_3 所对应的对角线内部的 $k-1$ 个不同点。则

$$Q(x,y)\prod_{\substack{r=1\\ r\neq i}}^{k-1}[(x-\xi_r)+(y-\eta_r)],i=1,2,\cdots,k-1$$

是在 Ω' 的边界上为零并在 Ω' 上为连续的分片 k 次样条函数.对应于这些样条函数存在着仅在 $(\xi_1,\eta_1),\cdots,(\xi_{k-1},\eta_{k-1})$ 中的一点处取值的线性泛函的对偶基。

引理 2.43 设 P 是由具有公共顶点 ζ 的诸多个三角形的并集所构成的凸多边形。则存在唯一的样条函数 $V(x,y)\in S_1^0(P)$，使得 $V(\zeta)=1$，且在 P 的边界上为零。

根据引理 2.40，对 1-型和 2-型三角剖分中的每一三角形，存在$(k-1)(k-2)/2$ 个线性无关的样条函数，它们的支集均是该三角形。而且，这些样条函数中具有仅在三角形内部一点处取值的对偶基。记这些样条函数和它们的对偶线性泛函

$$s_{ij}^{(\alpha)} \text{ 和 } \lambda_{ij}^{(\alpha)},\alpha=1,2,\ j=1,2,\cdots,(k-2)(k-1)/2,$$

其中 $\alpha(=1,2)$ 指剖分类型之标号，i 表示剖分中三角形单元的

标号。

根据引理 2.42，对于剖分中的第 r 条网线上存在 $k-1$ 个线性无关的样条函数，它们的支集是以此网线为公共边的两个相邻三角形的并集。将这些样条函数和相应的对偶线性泛函分别记为

$$\tilde{s}_{r,l}^{(\alpha)} \text{ 和 } \tilde{\lambda}_{r,l}^{(\alpha)},\ l=1,2,\cdots,k-1.$$

由引理 2.43，对于剖分的第 i 个内网点 ξ_i，存在一个以该内网点为中心的星形域为支集的样条函数 $\hat{\xi}_i^{\alpha}$，记 $\hat{\lambda}_i$ 为仅在 ξ_i 点取值的对偶线性泛函。

定理 2.44 对任意的非负整数 k,n,m，

$$\begin{aligned}\dim S_k^{0,0}(\Delta_{nm}^{(\alpha)}) = \alpha\cdot k^2nm + (\alpha k^2-k)(n+m)\\ +\alpha(k^2-2k+1).\end{aligned} \tag{2.77}$$

样条空间 $S_k^{0,0}(\Delta_{nm}^{(\alpha)})$ $(\alpha=1,2)$ 的基函数是

$$\{s_{i,j}^{(\alpha)}\}_{i=1\,j=1}^{T^{(\alpha)}(k-1)(k-2)/2} \cup \{\tilde{s}_{r,l}^{(\alpha)}\}_{r=1\,l=1}^{\hat{E}^{(\alpha)}\,k-1} \cup \{\hat{s}_i\}_{i=1}^{\hat{V}^{(\alpha)}}, \tag{2.78}$$

相应的对偶基是

$$\Lambda^{(\alpha)} = \{\lambda_{ij}^{(\alpha)}\}_{i=1\,j=1}^{T^{(\alpha)}(k-1)(k-2)/2} \cup \{\tilde{\lambda}_{r,l}^{(\alpha)}\}_{r=1\,l=1}^{\hat{E}^{(\alpha)}\,k-1} \cup \{\hat{\lambda}_i\}_{i=1}^{\hat{V}^{(\alpha)}}. \tag{2.79}$$

证明 显然(2.78)表示的样条函数属于 $S_k^{0,0}(\Delta_{nm}^{(\alpha)})$。根据线性泛函(2.79)的形式容易知道它们组成一对偶基，因而

$$\begin{aligned}\dim S_k^{0,0}(\Delta_{nm}^{(\alpha)}) \geqslant T^{(\alpha)}(k-1)(k-2)/2\\ +\hat{E}^{(\alpha)}(k-1)+\hat{V}^{(\alpha)} = N^{(\alpha)}.\end{aligned} \tag{2.80}$$

上式右端的数之和恰好是(2.77)中的数。为证明定理的结论，往证 $\dim S_k^{0,0}(\Delta_{nm}^{(\alpha)}) \leqslant N^{(\alpha)}$ $(\alpha=1,2)$。为此只需证明，若 $s\in S_k^{0,0}(\Delta_{nm}^{(\alpha)})$，则由 $\lambda s=0$，对 (2.79) 中所示的任意线性泛函 λ 成立，就可推出 $s\equiv 0$ 即可。现假定对一切 $\lambda^{(\alpha)}\in\Lambda^{(\alpha)}$ 有 $\lambda^{(\alpha)}s=0$。则 s 在剖分的顶点和各网线内部的 $k-1$ 个点处为零。这说明 s 在各内网线上恒等于零，因此在每个三角形上 s 可被该三角形的三边的线性形式整除。而约化后的 $k-3$ 次多项式可被该三角形内部 $(k-2)(k-1)/2$ 个点处取值的线性无关之线性泛函所唯一确定。所以必有 $s\equiv 0$。 □

下面分别介绍带有齐次边界条件的1-型三角剖分和2-型三角剖分上的具有一阶光滑度的3次和2次样条函数空间。

(II) 1-型三角剖分下 C^1-3 次样条空间 ($S_3^{1,0}(\Delta_{nm}^{(1)})$).

引进定义在长方形区域 Ω (图 2.25)的剖分 Δ_1 上的辅助样条函数类，其中剖分 Δ_1 是由直线 $y=x$ 分割 Ω 而得：

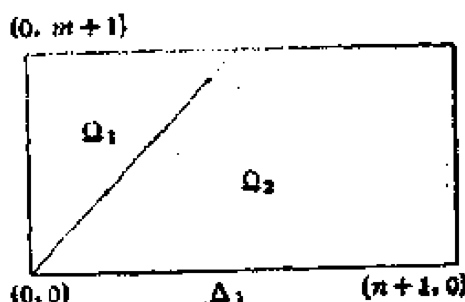


图 2.25

对于剖分 Δ_1 和非负整数 α,β，定义如下样条函数空间

$$S_3^{1,\alpha,\beta}(\Delta_1)=\{s\in C^1(\Omega):\ s|_{\Omega_1},s|_{\Omega_2}\in \mathbf{P}_3,\ \text{并且}\ D_x^i s(0,\cdot)=0,D_y^j s(\cdot,0)=0,\ i=1,2,\cdots,\alpha,\ j=1,2,\cdots,\beta\}. \tag{2.81}$$

为构造这个空间的基底，引进下面的一组基样条函数：

$$\begin{cases} t^1(x,y)=\begin{cases} x^2(2y-x), & (x,y)\in\Omega_1,\\ xy^2, & (x,y)\in\Omega_2,\end{cases}\\ t^2(x,y)=\begin{cases} x^2y, & (x,y)\in\Omega_1,\\ y^2(2x-y), & (x,y)\in\Omega_2,\end{cases}\end{cases} \tag{2.82}$$

$$\begin{cases} u^1(x,y)=\begin{cases} x(2y-x), & (x,y)\in\Omega_1,\\ y^2, & (x,y)\in\Omega_2,\end{cases}\\ u^2(x,y)=xy^2, & (x,y)\in\Omega_1\cup\Omega_2,\\ u^3(x,y)=\begin{cases} x^2y, & (x,y)\in\Omega_1,\\ y^2(2x-y), & (x,y)\in\Omega_2,\end{cases}\\ u^4(x,y)=\begin{cases} x^3, & (x,y)\in\Omega_1,\\ y^2(3x-2y), & (x,y)\in\Omega_2,\end{cases}\end{cases} \tag{2.83}$$

$$\begin{cases} v^1(x,y)=\begin{cases} x^2, & (x,y)\in\Omega_1,\\ y(2x-y), & (x,y)\in\Omega_2,\end{cases}\\ v^2(x,y)=\{x^2y, & (x,y)\in\Omega_1\cup\Omega_2,\end{cases}$$

$$
\begin{cases}
v^3(x,y)=\begin{cases}x^2(2y-x), & (x,y)\in\Omega_1,\\ xy^2, & (x,y)\in\Omega_2,\end{cases}\\
v^4(x,y)=\begin{cases}x^2(3y-2x), & (x,y)\in\Omega_1,\\ y^3, & (x,y)\in\Omega_2,\end{cases}
\end{cases}
\tag{2.84}
$$

$$
\begin{cases}
w^1(x,y)=xy, & (x,y)\in\Omega,\\
w^2(x,y)=x^2y, & (x,y)\in\Omega,\\
w^3(x,y)=xy^2, & (x,y)\in\Omega,\\
w^4(x,y)=\begin{cases}0, & (x,y)\in\Omega_1,\\ y(x-y)^2, & (x,y)\in\Omega_2,\end{cases}\\
w^5(x,y)=\begin{cases}x(x-y)^2 & (x,y)\in\Omega_1,\\ 0, & (x,y)\in\Omega_2,\end{cases}\\
w^6(x,y)=\begin{cases}x(x-y), & (x,y)\in\Omega_1,\\ y(x-y), & (x,y)\in\Omega_2.\end{cases}
\end{cases}
\tag{2.85}
$$

可直接证明下面的引理.

引理 2.45

$$
\begin{aligned}
&\dim S_3^{1,1,1}(\Delta_t)=2\\
&\dim S_3^{1,0,1}(\Delta_t)=\dim S_3^{1,1,0}(\Delta_t)=4\\
&\dim S_3^{1,0,0}(\Delta_t)=6,
\end{aligned}
$$

且函数组 $\{t^i(x,y)\}_{i=1}^2$, $\{u^i(x,y)\}_{i=1}^4$, $\{v^i(x,y)\}_{i=1}^4$ 和 $\{w^i(x,y)\}_{i=1}^6$ 分别是上述 4 个样条空间的基底.

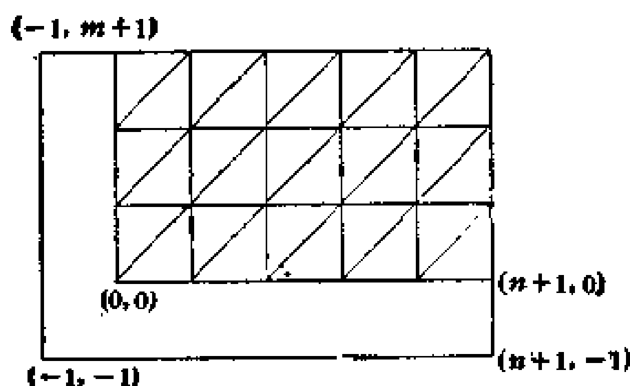


图 2.26

为介绍本节的主要结果，我们还需引进另一辅助样条空间. 设 $\tilde{\Omega}=[-1,n+1]\otimes[-1,m+1]$，$\tilde{\Delta}_{nm}$ 表示如图 2.26 所示的 $\tilde{\Omega}$ 的拟贯穿剖分. 对正整数 α,β，定义如下的样条空间:

$$S_3^1(\alpha,\beta;\tilde{\Delta}_{nm}) = \{s \in c(\bar{\Omega}) : s|_{\Omega} \in S_3^1(\Delta_{nm}^{(1)}), s|_{\tilde{\Omega}/\Omega} = 0,$$
$$D_x^i s(0,\cdot) = 0, D_y^j s(\cdot,0) = 0,$$
$$i = 1,2,\cdots,\alpha; j = 1,2,\cdots,\beta\}. \qquad (2.86)$$

根据本章定理 2.2 的证明,可得到

引理 2.46 对任意的 n 和 m, 恒有

$$\dim S_3^1(0,0,\tilde{\Delta}_{nm}) = 2(n+2)(m+2) - 2.$$

这个空间的基函数由下面的函数所组成:

$$\{t_{ij}^1, t_{ij}^2, u_{0j}^1, u_{0j}^2, u_{0j}^3, u_{0j}^4, v_{i0}^1, v_{i0}^2, v_{i0}^3, v_{i0}^4\}_{i=1,j=1}^{n,m} \cup \{w_{0,0}^r\}_{r=1}^{6}, \qquad (2.87)$$

其中 $t_{ij}^1 = t^1(x-i, y-j)$, 且其它函数可由(2.82)—(2.85)类似地定义.

定义线性泛函

$$\begin{aligned} e_i f &= f(i, m+1), i = 0,\cdots,n+1, \\ \tilde{e}_j f &= f(n+1, j), j = 0,\cdots,m+1. \end{aligned} \qquad (2.88)$$

容易证明如下的

引理 2.47 以下 $2n+2m+5$ 个线性泛函

$$\Lambda := \{e_i\}_{i=1}^{n+1} \cup \{e_i D_x\}_{i=0}^{n+1} \cup \{\tilde{e}_j\}_{j=1}^{m} \cup \{\tilde{e}_j D_y\}_{j=0}^{m+1} \qquad (2.89)$$

在空间 $S_3^1(0,0;\tilde{\Delta}_{nm})$ 上线性无关.

进一步有

定理 2.48 对于任意的非负整数 $n, m \geqslant 0$,

$$\dim S_3^{1,0}(\Delta_{nm}^{(1)}) = 2(nm+n+m)+1.$$

证明 很明显

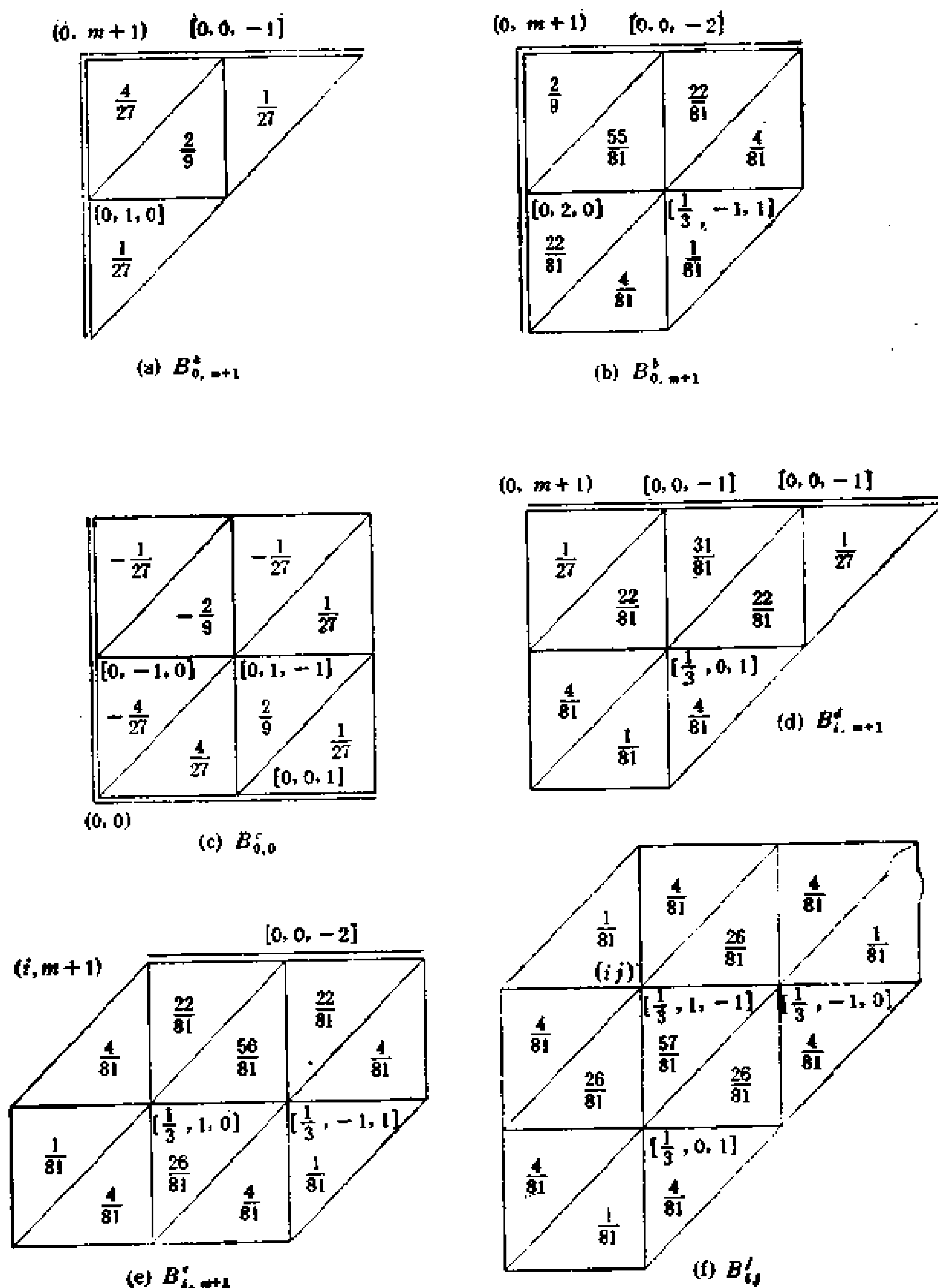
$$S_3^{1,0}(\Delta_{nm}^{(1)}) = \{s|_{\Omega} : s \in S_3^1(0,0;\tilde{\Delta}_{nm}), \lambda s = 0, \lambda \in \Lambda\},$$

其中 Λ 是引理 2.46 中所定义的线性泛函组. 由上述引理, 它们是线性无关的. 利用引理 2.45

$$\begin{aligned} \dim S_3^{1,0}(\Delta_{nm}^{(1)}) &= \dim S_3^1(0,0;\tilde{\Delta}_{nm}) - (2n+2m+5) \\ &= 2(n+2)(m+2) - 2 - (2n+2m+5) \\ &= 2(mn+n+m)+1. \end{aligned}$$

□

有了样条空间 $S_3^{1,0}(\Delta_{nm}^{(1)})$ 的维数, 便可以进一步讨论该样条函数空间基函数的构造. 设 $n, m \geqslant 2$. 引进如下的 6 个基样条



(0, m+1)
[0, 0, −1]
4/27
2/9
1/27
[0, 1, 0]
1/27
(a) $B^a_{0,m+1}$
(0, m+1)
[0, 0, −2]
2/9
55/81
22/81
4/81
[0, 2, 0]
[1/3, −1, 1]
22/81
4/81
1/81
(b) $B^b_{0,m+1}$
−1/27
−2/9
−1/27
1/27
[0, −1, 0]
[0, 1, −1]
−4/27
4/27
2/9
1/27
[0, 0, 1]
(0, 0)
(c) $B^c_{0,0}$
(0, m+1)
[0, 0, −1]
[0, 0, −1]
1/27
22/81
31/81
22/81
1/27
[1/3, 0, 1]
4/81
1/81
4/81
(d) $B^d_{i,m+1}$
[0, 0, −2]
(i, m+1)
4/81
22/81
56/81
22/81
4/81
[1/3, 1, 0]
[1/3, −1, 1]
1/81
4/81
26/81
4/81
1/81
(e) $B^e_{i,m+1}$
1/81
4/81
26/81
4/81
1/81
(i j)
[1/3, 1, −1]
[1/3, −1, 0]
4/81
57/81
26/81
26/81
4/81
[1/3, 0, 1]
4/81
1/81
4/81
(f) B^f_{ij}

图 2.27

函数。为清楚起见，在这里用图表示这些样条函数。图中给出了这些样条函数的支集和能够唯一确定分片 3 次多项式的信息（网点处的函数值和两个一阶偏导数值，单元重心处的函数值）。见图 2.27。为简便计，图中有些点处的信息没有标出，因为这些点上的信息可由对称性得到。每一样条函数在图中用单线标出的网线上是 C^1 过渡的，而在双线标出的网线上是仅仅 C^0 过渡的。我们用字母 B 的上标区别样条函数支集的形状，而用下标表示其支集在矩形域 Ω 中的位置。

由这个 6 个基函数以及它们的平移和旋转可求得 $S_3^{1,0}(\Delta_{mn}^{(1)})$ 的另外的一些基函数。定义如下的具有局部支集的样条函数

$$\begin{cases} B^a_{n+1,0}(x,y) = B^a_{0,m+1}(n+1-x, m+1-y), \\ B^b_{n+1,0}(x,y) = B^b_{0,m+1}(n+1-x, m+1-y), \end{cases} \tag{2.90}$$

$$B^c_{n+1,m+1}(x,y) = B^c_{0,0}(n+1-x, m+1-y), \tag{2.91}$$

$$\begin{cases} B^d_{i+2,0}(x,y) = B^d_{n-2-i,m+1}(n+1-x, m+1-y), \\ B^e_{i+2,0}(x,y) = B^e_{n-2-i,m+1}(n+1-x, m+1-y), \end{cases} \tag{2.92}$$

$$B^g_{i+2,j+1}(x,y) = B^f_{n-1-i,m-j}(n+1-x, m+1-y). \tag{2.93}$$

在以上定义的具有局部支集的样条函数中(2.90)作用于矩形域 Ω 的右下角，(2.91)作用于 Ω 的右上角，(2.92)作用于 Ω 的底边，而(2.93)作用于 Ω 的内部。为得到适用于沿 Ω 左右边单元上的具有局部支集的样条函数，将图 2.27 中的基函数 d) 和 e) 分别绕 $y=-x$ 和 $y=x$ 旋转 180°，于是得到

$$\begin{cases} B^d_{0,j+2}(x,y) = B^d_{n-2-j,m+1}(n+1-y, m+1-x), \\ B^e_{0,j+2}(x,y) = B^e_{n-2-j,m+1}(n+1-y, m+1-x), \end{cases} \tag{2.94}$$

$$\begin{cases} B^d_{n+1,j}(x,y) = B^d_{j,m+1}(y, m-n+x), \\ B^e_{n+1,j}(x,y) = B^e_{j,m+1}(y, m-n+x). \end{cases} \tag{2.95}$$

定理 2.49 如下 $2(nm+n+m)$ 个具有局部支集的样条函数组

$$\begin{aligned} \mathscr{B} = & \{B^a_{0,m+1}, B^a_{n+1,0}, B^b_{0,m+1}, B^b_{n+1,0}, B^c_{0,0}, B^c_{n+1,m+1}\} \\ & \cup \{B^d_{i+1,0}, B^e_{i+1,0}, B^d_{i,m+1}, B^e_{i,m+1}\}_{i=0}^{n-2} \\ & \cup \{B^d_{0,j+1}, B^e_{0,j+1}, B^d_{n+1,j}, B^e_{n+1,j}\}_{j=0}^{m-2} \end{aligned}$$

$$\bigcup \{B^f_{i+1,j+2}, B^g_{j+2i,+1}\}_{i=0,j=0}^{n-2\ m-2} \tag{2.96}$$

在Ω上是线性无关的。

证明 设以上样条函数的一个线性组合在Ω上恒等于零，则它在所有内网点处关于x和y的偏导数以及它在每一三角形重心处的值必皆为零。而且除 $(0,0)$，$(n+1,0)$，$(0,m+1)$ 和 $(n+1,m+1)$ 外的其它边界网点处的法向导数值也必为零。由此导出含有 $2(nm+n+m)$ 个未知数的 $5nm+4n+4m+2$ 个齐次线性方程组。而此方程组的系数矩阵是满秩的，因此定理为真。 □

由定理 2.47 知，空间 $S_3^{1,0}(\Delta_{nm}^{(1)})$ 的维数为 $2nm+2n+2m+1$。为构造 $S_3^{1,0}(\Delta_{nm}^{(1)})$ 空间的基底，仍需寻找与 $\mathscr{B}$ 中元素线性无关的另一个样条函数。我们将看到，样条函数空间 $S_3^{1,0}(\Delta_{nm}^{(1)})$ 的任何一组基底中至少含有一个如下意义下的整体样条函数。

定义 2.50 一个样条函数 $s \in S_3^{1,0}(\Delta_{nm}^{(1)})$ 称为是整体的，如果它满足

i) $D_x s(0,\cdot) \not\equiv 0$，$D_x s(n+1,\cdot) \not\equiv 0$

或

ii) $D_y s(\cdot,0) \not\equiv 0$，$D_y s(\cdot,m+1) \not\equiv 0$。

所谓整体样条函数，其支集必然是从Ω的左边界到右边界的区域，或者是从Ω的下边界到上边界的区域。显然，如果我们考虑矩形区域Ω的 1-型剖分，至少需要构造一个整体样条函数，这将会是很麻烦的。

定义 $S_3^{1,0}(\Delta_{nm}^{(1)})$ 的一些子空间：

$$S_3^{1,\alpha,\beta,\tilde{\alpha},\tilde{\beta}}(\Delta_{nm}^{(1)}) = \{s \in S_3^1(\Delta_{nm}^{(1)}): D_x^i s(0,\cdot) = 0,$$
$$D_x^j s(n+1,\cdot) = 0\ \ i = 0,\cdots,\alpha, j = 0,\cdots,\beta;$$
$$D_y^p s(\cdot,0) = 0,\ D_y^q s(\cdot,m+1) = 0\ \ p = 0,$$
$$\cdots,\tilde{\alpha}, q = 0,\cdots,\tilde{\beta}\}.$$

特别地

$$S_3^{1,0,0,0,0}(\Delta_{nm}^{(1)}) = S_3^{1,0}(\Delta_{nm}^{(1)}),$$
$$S_3^{1,1,1,1,1}(\Delta_{nm}^{(1)}) = S_3^{1,1}(\Delta_{nm}^{(1)}).$$

引理 2.51 对任意的非负整数 n,m，有

$$\dim S_3^{1,1,0,1,0}(\Delta_{nm}^{(1)}) = \dim S_3^{1,0,1,0,1}(\Delta_{nm}^{(1)}) = (2nm-1)_+, \tag{2.97}$$

$$\dim S_3^{1,1,0,0,1}(\Delta_{nm}^{(1)}) = \dim S_3^{1,0,1,1,0}(\Delta_{nm}^{(1)}) = 2nm. \tag{2.98}$$

这 4 个样条空间的基底分别是

$$\mathscr{B}_1 = \{B^c_{n+1,m+1}, B^d_{i,m+1}, B^d_{n+1,j}, B^e_{i,m+1}, B^e_{n+1,j}, B^f_{i+1,j+2},$$
$$B^g_{i+2,j+1}\},$$

$$\mathscr{B}_2 = \{B^c_{0,0}, B^d_{i+1,0}, B^d_{0,j+1}, B^e_{i+1,0}, B^e_{0,j+1}, B^f_{i+1,j+2}, B^g_{i+2,j+1}\},$$

$$\mathscr{B}_3 = \{B^a_{n+1,0}, B^b_{n+1,0}, B^d_{i+1,0}, B^d_{n+1,j}, B^e_{i+1,0}, B^e_{n+1,j}, B^f_{i+1,j+2},$$
$$B^g_{i+2,j+1}\},$$

$$\mathscr{B}_4 = \{B^a_{0,m+1}, B^b_{0,m+1}, B^d_{i,m+1}, B^d_{0,j+1}, B^e_{i,m+1}, B^e_{0,j+1},$$
$$B^f_{i+1,j+2}, B^g_{i+2,j+1}\},$$

其中 $i=0,\cdots,k-2, j=0,\cdots,m-2$.

证明 根据第 2 章定理 2.4，样条空间 $S_3^1(1,1;\Delta_{nm}^{(1)})$ 的维数为 $2(n+1)(m+1)$。显然 $S_3^{1,1,0,1,0}(\Delta_{nm}^{(1)}) \subset S_3^1(1,1;\Delta_{nm}^{(1)})$，且它由空间 $S_3^1(1,1;\Delta_{nm}^{(1)})$ 中满足下列条件的元素 s 所构成：

$$\lambda s = 0, \quad \lambda \in \Lambda^{(1)},$$

其中 $\Lambda^{(1)} = \{e_1, \cdots, e_{n+1}, e_1D_x, \cdots, e_{n+1}D_x, \tilde{e}_1, \cdots, \tilde{e}_m, \tilde{e}_1D_y, \cdots, \tilde{e}_{m+1}D_y\}$ 是由(2.88)所表示的线性泛函的集合。因为 $\Lambda^{(1)}$ 中的线性泛函是线性无关的，因此

$$\dim S_3^{1,1,0,1,0}(\Delta_{nm}^{(1)}) = 2(n+1)(m+1) - (2m+2n+3)$$
$$= (2nm-1)_+.$$

类似地，可算得 $S_3^{1,0,1,0,1}(\Delta_{nm}^{(1)})$ 的维数。

下面计算样条空间 $S_3^{1,1,0,0,1}(\Delta_{nm}^{(1)})$ 的维数。由第 2 章定理 2.2 知，样条空间 $S_3^1(1,0;\tilde{\Delta}_{nm}^{(1)})$ 的维数为 $2nm+4n+2m+4$ 且其基函数是由函数

$$\{s_{ij}^1, s_{ij}^2, v_{i,0}^1, \cdots, v_{in}^4 : 0 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant n\}$$

组成。显然 $S_3^{1,1,0,0,1}(\Delta_{nm}^{(1)}) \subset S_3^1(1,0;\tilde{\Delta}_{nm}^{(1)})$，且其由满足下面条件的 $s \in S_3^1(1,0;\tilde{\Delta}_{nm}^{(1)})$ 组成：

$$\lambda s = 0, \forall \lambda \in \Lambda^{(2)},$$

其中 $\Lambda^{(2)} = \Lambda^{(1)} \cup \{\mu_1, \cdots, \mu_{2n+1}\} \cup \{\tilde{e}_1D_y\}$，$\mu_i s = D_y s(i/2, m+$

1), $i=1,2,\cdots,2n+1$. 不难验证 $\Lambda^{(2)}$ 中 $4n+2m+4$ 个线性泛函是线性无关的. 从而

$$\dim S_3^{1,1,0,0,1}(\Delta_{nm}^{(1)})=(2nm+4n+2m+4)$$
$$-(4n+2m+4)=2mn.$$

类似地可证明空间 $S_3^{1,0,1,1,0}(\Delta_{nm}^{(1)})$ 的维数公式. $\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2,\mathscr{B}_3,\mathscr{B}_4$ 分别属于引理中的 4 个空间. 根据定理 2.49, 它们又都是线性无关集,从而引理得证. □

引进记号

$$\mathrm{loc}\, S_3^{1,0}(\Delta_{nm}^{(1)})=\mathrm{span}\,\mathscr{B}, \tag{2.99}$$

显然样条空间 $\mathrm{loc}\,S_3^{1,0}(\Delta_{nm}^{(1)})$ 是引理 2.50 中的 4 个样条空间的并集,且 $\dim \mathrm{loc}\, S_3^{1,0}(\Delta_{nm}^{(1)})=\dim S_3^{1,0}(\Delta_{nm}^{(1)})-1$.

定理 2.52 如果 $s\in S_3^{1,0}(\Delta_{nm}^{(1)})$ 且 s 不是整体的样条函数, 则 $s\in \mathrm{loc}\, S_3^{1,0}(\Delta_{nm}^{(1)})$.

证明 由假设条件, s 的法向导数至少在 Ω 的两个相邻边界上为零. 因而 ζ 至少属于引理 2.49 中定义的 4 个样条空间之一, 所以 $s\in \mathrm{loc}\, S_3^{1,0}(\Delta_{nm}^{(1)})$. 证毕.

这个定理说明样条空间 $\mathrm{loc}\, S_3^{1,0}(\Delta_{nm}^{(1)})$ 是 $S_3^{1,0}(\Delta_{nm}^{(1)})$ 中不包含任何整体样条函数的最大子空间. 这表明样条空间 $S_3^{1,0}(\Delta_{nm}^{(1)})$ 的基底中至少需要有一个整体样条函数.

关于具有 C^1 齐次边界条件的样条空间 $S_3^{1,1}(\Delta_{nm}^{(1)})$, 我们有

定理 2.53 对任意的非负整数 n,m

$$\dim S_3^{1,1}(\Delta_{nm}^{(1)})=2(n-1)_+(m-1)_+,$$

且该空间的基底是如下具有局部支集的一组样条函数:

$$\{B_{i+1,j+2}^{1},B_{i+2,j+1}^{2}\}_{i=1}^{n-2}{}_{j=1}^{m-2}. \tag{2.100}$$

证明 由本章定理 2.2, 样条空间 $S_3^{1,1}(\Delta_{nm}^{(1)})$ 的维数为 $2(n+1)(m+1)$, 且其基函数为 $\{t_{i,j}^1,t_{i,j}^2\}_{i=1}^{n}{}_{j=1}^{m}$. 空间 $S_3^{1,1}(\Delta_{nm}^{(1)})$ 等同于空间 $S_3^1(1,1;\Delta_{nm}^{(1)})$ 中满足下面条件的元素 s 所构成的子空间:

$$\lambda s=0,\ 对任何\ \lambda\in\Lambda^{(3)},$$

其中 $\Lambda^{(3)}=\Lambda^{(1)}\cup\Lambda^{(2)}\cup\{\gamma_1,\cdots,\gamma_{2m+1}\}$, $\gamma_j s=D_x s(n+1,j/2)$, $j=0,1,\cdots,2m+1$. 不难证明 $\Lambda^{(3)}$ 中元素张成的空间是 $4(n+$

$m)$ 维的，因而

$$\dim S_3^{1,4}(\Delta_{nm}^{(1)}) = 2(n+1)(m+1) - 4(n+m)$$
$$= 2(n-1)_+(m-1)_+.$$

由定理 2.48，该空间的一组基函数组为 (2.100)。 □

在图 2.27 中给出的具有局部支集的样条函数中除 B_{ij}^{l} 是 P. O. Fredrickson[11] 给出外，其它的均是在文献[33]中给出的。特别应该指出的是其中的 $B_{0,4}^{c}$ 在其支集内部不全是正的。

以下讨论均匀 2-型三角剖分下的带边界条件的样条函数空间。定义 $S_k^{\mu}(\Delta_{nm}^{(2)})$ 的一类子空间

$$S_k^{\mu,\alpha}(\Delta_{nm}^{(2)}) := \{s \in S_k^{\mu}(\Delta_{nm}^{(2)}) : D_x^i s(0,y) = D_x^i s(n+1,y) = 0,$$
$$\text{当 } 0 \leqslant y \leqslant m+1; D_y^i s(x,0) = D_y^i s(x,m+1)$$
$$= 0, \text{ 当 } 0 \leqslant x \leqslant n+1; i = 1,2,\cdots,\alpha\}.$$

有关结果均取材于文[34]。

为得到 $S_2^{1,0}(\Delta_{nm}^{(2)})$ 空间的维数，需要下面的引理。

引理 2.54 对任意的非负整数 n, m

$$\dim S_2^{1,0}(\Delta_{nm}^{(2)}) \leqslant (n+1)(m+1) - 1. \tag{2.101}$$

证明 因为一元 2 次多项式由 3 点处的值所唯一确定，所以 $S_2^1(\Delta_{nm}^{(2)})$ 中的 $s \in S_2^{1,0}(\Delta_{nm}^{(2)})$ 若且仅若

$$s\left(0,\frac{k}{2}\right) = s\left(n+1,\frac{k}{2}\right) = 0,\ k = 0,1,\cdots,2m+2,$$

$$s\left(\frac{l}{2},0\right) = s\left(\frac{l}{2},\ m+1\right) = 0,\ l = 0,1,\cdots,2n+2.$$

当 $n, m \geqslant 2$ 时，存在 (i_0, j_0) 使得 $B_{i_0 j_0}(x,y)$ 在 Ω 的外部恒等于零。根据 (2.55) 式，任一 $s \in S_2^1(\Delta_{nm}^{(2)})$ 均可表示成

$$s(x,y) = \sum_{\substack{i=0 \\ (i,j)\neq(i_0,j_0)}}^{n+2} \sum_{j=0}^{m+2} c_{i,j} B_{i,j}(x,y), (i,j) \neq (i_0,j_0). \tag{2.102}$$

利用 $B_{i,j}(x,y)$ 在边界上的点 $(l/2, k/2)$ 处的值，得到 $s(x,y) \in S_2^{1,0}(\Delta_{nm}^{(2)})$ 的充分必要条件是 (2.102) 中的系数 $c_{i,j}$ 满足下面的方程：

$$\left.\begin{aligned}&c_{i,0}+c_{i+1,0}+c_{i,1}+c_{i+1,1}=0\\&c_{i,m+1}+c_{i+1,m+1}+c_{i,m+2}+c_{i+1,m+2}=0\end{aligned}\right\}i=1,2,\cdots,n+1;$$

$$\left.\begin{aligned}&c_{i,0}+6c_{i+1,0}+c_{i+2,0}+c_{i,1}+6c_{i+1,1}\\&\quad+c_{i+2,1}=0\\&c_{i,m+1}+6c_{i+1,m+1}+c_{i+2,m+1}+c_{i,m+2}\\&\quad+c_{i+1,m+2}+c_{i+2,m+2}=0\end{aligned}\right\}i=1,2,\cdots,n;$$

$$\left.\begin{aligned}&c_{0,j}+c_{0,j+1}+c_{1,j}+c_{1,j+1}=0\\&c_{n+1,j}+c_{n+1,j}+c_{n+2,j}+c_{n+2,j+2}=0\end{aligned}\right\}j=1,\cdots,m;$$

$$\left.\begin{aligned}&c_{0,j}+6c_{0,j+1}+c_{0,j+2}+c_{1,j}+6c_{1,j+1}\\&\quad+c_{1,j+2}=0\\&c_{n+1,j}+6c_{n+1,j+1}+c_{n+1,j+2}+c_{n+2,j}\\&\quad+6c_{n+2,j+1}+c_{n+2,j+2}=0.\end{aligned}\right\}j=0,1,\cdots,m.$$

经过计算它们可简化为

$$\begin{cases}c_{i,0}+c_{i,1}=0, & i=0,1,\cdots,n+2,\\c_{i,m+1}+c_{i,m+2}=0, & i=0,1,\cdots,n+2,\\c_{0,j}+c_{1,j}=0, & j=0,1,\cdots,m+2,\\c_{n+1,j}+c_{n+2,j}=0, & j=0,1,\cdots,m+2.\end{cases}\tag{2.103}$$

由此可知，任一 $(i,j)\in I:=\{(i,0),(i,m+2)\}_{i=0}^{n+2}\cup\{(0,j),(n+1,j)\}_{j=1}^{m+1}$ 所对应的 $B_{i,j}$ 均可被一个指标 (i,j) 不在集合 $I\cup\{(i_0,j_0)\}$ 中的 B- 样条所代替. 因此 $s\in S_2^{1,0}(\Delta_{mn}^{(2)})$ 是 $(n+3)(m+3)-(2n+2m+8)-1=(n+1)(m+1)-1$ 个 B-样条的线性组合. 这就证明了(2.101)式当 $n,m\geqslant 2$ 时成立. 当 n 和 m 中至少有一个等于 0 或 1 时, 可从本章(2.55)式直接导出(2.101)式. □

以下利用 Zwart 的 B 样条及其移动的线性组合来构造样条空间 $S_2^{1,0}(\Delta_{mn}^{(2)})$ 的基函数. 首先考虑 $n,m\geqslant 1$ 情形. 定义 $\widetilde{B}_{ij}(x,y)$, 使其在 Ω 的外部为零, 且在 Ω 的内部有

$$\begin{cases}\widetilde{B}_{1,1}(x,y)=B_{1,1}(x,y)-B_{0,1}(x,y)-B_{1,0}(x,y)+B_{0,0}(x,y),\\\widetilde{B}_{n+1,1}(x,y)=B_{n+1,1}(x,y)-B_{n+2,1}(x,y)-B_{n+1,0}(x,y)\\\qquad+B_{n+2,0}(x,y),\end{cases}$$

$$
\begin{cases}
\widetilde{B}_{1,m+1}(x,y)=B_{1,m+1}(x,y)-B_{0,m+1}(x,y)-B_{1,m+2}(x,y) \\
\qquad +B_{0,m+2}(x,y), \\
\widetilde{B}_{n+1,m+1}(x,y)=B_{n+1,m+1}(x,y)-B_{n+1,m+2}(x,y) \\
\qquad -B_{n+2,m+1}(x,y)+B_{n+2,m+2}(x,y),
\end{cases}
\tag{2.104}
$$

$$
\begin{cases}
\widetilde{B}_{i,1}(x,y)=B_{i,1}(x,y)-B_{i,0}(x,y), \\
\qquad i=2,3,\cdots,n, \\
\widetilde{B}_{i,m+1}(x,y)=B_{i,m+1}(x,y)-B_{i,m+2}(x,y), \\
\qquad i=2,3,\cdots,n, \\
\widetilde{B}_{1,j}(x,y)=B_{1,j}(x,y)-B_{0,j}(x,y), \\
\qquad j=2,3,\cdots,m, \\
\widetilde{B}_{n+1,j}(x,y)=B_{n+1,j}(x,y)-B_{n+2,j}(x,y), \\
\qquad j=2,3,\cdots,m,
\end{cases}
\tag{2.105}
$$

$$
\widetilde{B}_{ij}(x,y)=B_{i,j}(x,y),i=2,3,\cdots,n,j=2,3,\cdots,m. \tag{2.106}
$$

将(2.104),(2.105),(2.106)中所示的B样条函数分别看作是角，边和内部B样条函数。它们的支集以及其在网点及网线中点处的值分别由图2.28，图2.29给出。图中的单线表示B样条在此网线上是C^1过渡的，而双线表示B样条在此网线上仅是C^0过渡的。

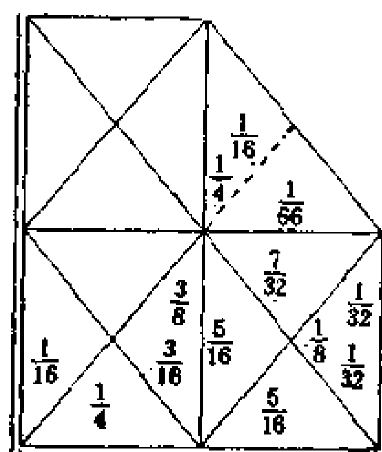


图 2.28

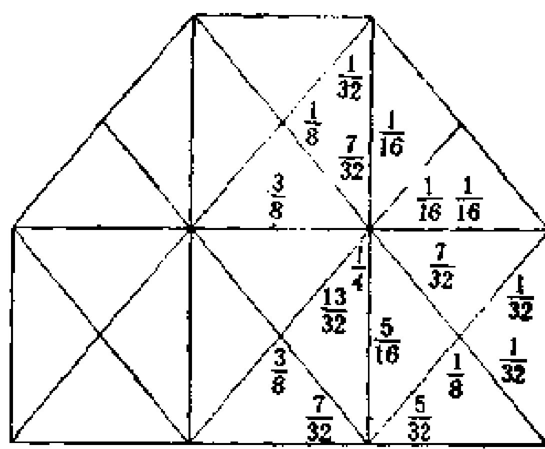


图 2.29

定理 2.55 对于任意的 $n,m\geqslant 1$

$$
\dim S_2^{1,0}(\Delta_{nm}^{(2)})=(n+1)(m+1)-1, \tag{2.107}
$$

并且该空间的基函数是

$$\{\widetilde{B}_{ij}(x,y):1\leqslant i\leqslant n+1,1\leqslant j\leqslant m+1,\ (i,j)\neq(i_0,j_0)\},\tag{2.108}$$

其中 (i_0,j_0) 是一任意给定的指标：$1\leqslant i_0\leqslant n+1$，$1\leqslant j_0\leqslant m+1$。

证明 显然(2.108)中的样条函数均属于 $S_2^{1,0}(\Delta_{mn}^{(2)})$。只需往证这些 B 样条是线性无关的。假设

$$\sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j=1}^{m+1}a_{i,j}\widetilde{B}_{i,j}(x,y)=0,\ (x,y)\in\Omega,\tag{2.109}$$

且 $a_{i_0,j_0}=0$。根据 $\widetilde{B}_{ij}(x,y)$ 的定义并利用(2.55)，可将(2.109)式改写成

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=2}^{m}\sum_{i=2}^{n}(a_{i,j}-(-1)^{i+j}a_{1,1})B_{i,j}+\sum_{j=2}^{m+1}((-1)^{j}a_{1,1}+a_{1,j})\\
&\quad\cdot(B_{1,j}-B_{0,j})-((-1)^{m+1}a_{1,1}+a_{1,m+1})\\
&\quad\cdot(B_{1,m+2}-B_{0,m+2})+\sum_{i=2}^{n+1}((-1)^{i}a_{1,1}+a_{i,1})\\
&\quad\cdot(B_{i,1}-B_{i,0})-((-1)^{n+1}a_{1,1}+a_{n+1,1})\\
&\quad\cdot(B_{n+2,1}-B_{n+2,0})+\sum_{j=2}^{m}((-1)^{n+j}a_{1,1}+a_{n+1,j})\\
&\quad\cdot(B_{n+1,j}-B_{n+2,j})-((-1)^{n+m}a_{1,1}-a_{n+1,m+1})\\
&\quad\cdot(B_{n+2,m+1}-B_{n+1,m+1})+\sum_{i=2}^{n}((-1)^{m+i}a_{1,i}+a_{i,m+1})\\
&\quad\cdot(B_{i,m+1}-B_{i,m+2})-((-1)^{n+m}a_{1,1}-a_{n+1,m+1})\\
&\quad\cdot(B_{n+2,m+2}-B_{n+1,m+2})=0,\ (x,y)\in\Omega.
\end{aligned}$$

根据(2.55)式，$B_{ij}(x,y)((i,j)\neq(0,0))$ 是线性无关的。从而 $a_{i,j}=(-1)^{i+j}a_{1,1}$，对一切 $i=1,2,\cdots,n+1$，$j=1,2,\cdots,m+1$ 都成立。由于 $a_{i_0j_0}=0$，所以一切 $a_{i,j}=0$。 □

剩下的仅是 n 和 m 中至少有一个为 0 的情形。这时需要构造

具有更小支集的 B 样条函数. 仅考虑 $n=0$, $m\geqslant 1$ 情形, 至于其它情形可通过坐标轴的旋转而相应地得到. 在以 $(0, j-1)$, $(1,j-1)$, $(1,j+1)$, $(0,j+1)$ 为顶点的矩形内部, 定义

$$B_j(x,y)=(B_{1,j}+B_{0,j-1}+B_{2,j-1})-(B_{1,j-1}+B_{0,j}+B_{2,j}) \tag{2.110}$$

且在该矩形外部 $B_j(x,y)$ 恒为零.

(2.110) 式定义的样条函数是在 Ω 内 C^1 连续的分片 2 次多项式. 其支集和在网点、网线中点处的值如图 2.30. 图中双线和单线的含义同图 2.29.

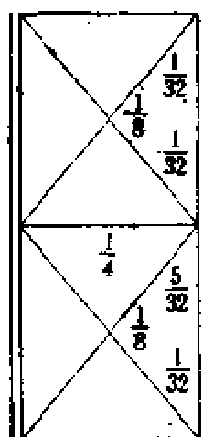


图 2.30

定理 2.56 对于任意的非负整数 $m\geqslant 0$,

$$\dim S_2^{1,0}(\Delta_{0m}^{(2)})=m, \tag{2.111}$$

且该空间的基底是 $\{B_j(x,y)\}_{j=1}^{m}$.

证明 显然, B 样条 $B_j(x,y)\in S_2^{1,0}(\Delta_{0m}^{(2)})$. 由它们的支集性质可知它们是线性无关的. 由引理 2.53 即可得出本定理.

下面讨论均匀 2-型三角剖分下 $S_2^{1,1}(\Delta_{nm}^{(2)})$ 空间, 我们有

定理 2.57 对任意非负整数 $n,m\geqslant 0$,

$$\dim S_2^{1,1}(\Delta_{nm}^{(2)})=(n-1)_+(m-1)_+, \tag{2.112}$$

且该空间的一组基底是 $\{B_{i,j}(x,y)\}_{i=2,j=2}^{n\ \ m}$.

证明 设 $s\in S_2^1(\Delta_{nm}^{(2)})$. 则 $s\in S_2^{1,1}(\Delta_{nm}^{(2)})$ 的充分必要条件是 $s\in S_2^{1,0}(\Delta_{nm}^{(2)})$ 且满足

$$D_x s(0,j)=D_x s(n+1,j)=0,\quad j=0,1,\cdots,m+1,$$

$$D_y s(i,0)=D_y s(i,m+1)=0\quad i=0,1,\cdots,n+1.$$

根据定理 2.21, $s(x,y)$ 可表为

$$s(x,y)=\sum_{i=0}^{n+2}\sum_{j=0}^{m+2}c_{i,j}B_{i,j}(x,y),$$

其中 $c_{1,1}=0$. 因此 $s\in S_2^{1,1}(\Delta_{nm}^{(2)})$ 的充分必要条件是系数 $c_{i,j}$ 满足方程组(2.103)和

$$
\begin{cases}
c_{i,1} + c_{i+1,1} - c_{i,0} - c_{i+1,0} = 0, \\
c_{i,m+1} + c_{i+1,m+1} - c_{i,m+2} - c_{i+1,m+2} = 0, \\
c_{1,j} + c_{1,j+1} - c_{0,j} - c_{0,j+1} = 0, \\
c_{n+1,j} + c_{n+1,j+1} - c_{n+2,j} - c_{n+2,j+1} = 0, \\
i = 1,2,\cdots,n+1, j = 1,2,\cdots,m+1.
\end{cases}
\tag{2.113}
$$

求解方程组(2.103)和(2.113)，可得到

$$
c_{i,j} = (-1)^{i+j} c_{1,1},
$$

对于 $i = 0,1,\cdots,n+2$，$j = 0,1,m+1,m+2$；和 $i = 0,1,n+1,n+2$，$j = 0,1,\cdots,m+2$。因为 $c_{1,1} = 0$，从而一切的 $c_{i,j} = 0$。所以 s 是 $\{B_{i,j}(x,y)\}_{i=2,j=2}^{n,m}$ 的线性组合。再由 $\{B_{i,j}(x,y)\}_{i=2,j=2}^{n,m}$ 的线性无关性，即知定理为真。 □

§7. 非均匀2-型三角剖分下的带有边界条件的样条函数空间[35]

上一节我们介绍了均匀1型和2型三角剖分下的带有边界条件的样条函数空间的维数及基底。这节将借助于文[35]的结果讨论并介绍非均匀2-型三角剖分下带有边界条件的样条函数空间的结构，给出该空间的维数及基函数。

设矩形 $\Omega = [x_0, x_{n+1}] \otimes [y_0, y_{m+1}] \subset [x_{-1}, x_{n+2}] \otimes [y_{-1}, y_{m+2}]$，其中 $x_{-1} < x_0, x_{n+1} < x_{n+2}, y_{-1} < y_0, y_{m+1} < y_{m+2}$。并设

$$
\Delta: x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n+1};\quad y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_{m+1}
$$

为一非均匀的矩形剖分，绘出所有子矩形的两条对角线便可得到 Ω 上不均匀2-型三角剖分，记为 $\Delta_{n,m}^{(2)}$。

本节考虑 $S_d^\mu(\Delta_{n,m}^{(2)})$ 中满足某些边界条件的子空间。为此，设 α 为一非负整数，并定义

$$
\begin{aligned}
S_d^{\mu,\alpha}(\Delta_{n,m}^{(2)}) = \{ s \in S_d^\mu(\Delta_{n,m}^{(2)}) : & D_x^l s(x_0, y) = D_x^l s(x_{n+1}, y) = 0, \\
& y_0 \leqslant y \leqslant y_{m+1}; D_y^l s(x, y_0) = D_y^l s(x, y_{m+1}) = 0, \\
& x_0 \leqslant x \leqslant x_{n+1},\ l = 0,1,\cdots\alpha \}.
\end{aligned}
$$

以下将给出 $S_2^{1,0}(\Delta_{n,m}^{(2)})$ 及 $S_2^{1,1}(\Delta_{n,m}^{(2)})$ 的维数及基底。首先考虑

$S_2^{1,0}(\Delta_{n,m}^{(2)})$。下文需要用到本章§4中一个二元$B$样条函数，它的支集是以$((x_i+x_{i-1})/2,(y_j+y_{j-1})/2)$为中心，以$(x_{i-2},y_j)$，$(x_{i-2},y_{j-1})$，$(x_{i-1},y_{j+1})$，$(x_{i-1},y_{j-2})$，$(x_i,y_{j+1})(x_i,y_{j-2})$，$(x_{i+1},y_j)$，$(x_{i+1},y_{j-1})$为顶点的八边形。将此$B$样条函数记为$B=B(x,y)$。它在上述八边形支集外恒为零，并且是具有$C^1$光滑度的2次分片多项式。$B(x,y)$的支集图形见图2.14，该图中还标出了$B(x,y)$在每一个三角形的6点，即3顶点及3边中点上的值。

这里我们用$B_{i,j}(x,y)=B(x-x_i,y-y_j)$ $(i=0,1,\cdots,n+2,j=0,1,\cdots,m+2)$来表示$B$的平移。类似于(2.55)式可证明

引理 2.58 对任何非负整数n,m有

$$\sum_{i=0}^{n+2}\sum_{j=0}^{m+2}(-1)^{i+j}(x_i-x_{i-1})(y_j-y_{j-1})B_{i,j}=0,$$

$$(x,y)\in\Omega, \qquad (2.114)$$

且对任何$0\leqslant i_0\leqslant n+2,0\leqslant j_0\leqslant m+2$，集合$\{B_{i,j}:(i,j)\neq(i_0,j_0),0\leqslant i\leqslant n+2,0\leqslant j\leqslant m+2\}$为$S_2^1(\Delta_{n,m}^{(2)})$的一组基底。

关于空间$S_2^{1,0}(\Delta_{n,m}^{(2)})$维数的上界，我们有

引理 2.59 对于任何非负整数n,m，有

$$\dim S_2^{1,0}(\Delta_{n,m}^{(2)})\leqslant(n+1)(m+1)-1. \qquad (2.115)$$

证明 因为一元二次多项式唯一地由它在三个不同点上的值所确定，所以$S\in S_2^1(\Delta_{n,m}^{(2)})$同时属于类$S_2^{1,0}(\Delta_{n,m}^{(2)})$的充要条件是

$$\begin{cases}S(x_0,y_j)=S(x_{n+1},y_j)=0, \quad j=0,\cdots,m+1;\\ S(x_0,(y_j+y_{j+1})/2)=S(x_{n+1},(y_j+y_{j+1})/2)=0,j=0,\cdots m;\\ S(x_i,y_0)=S(x_i,y_{m+1})=0, \quad i=0\cdots n+1;\\ S((x_i+x_{i+1})/2,y_0)=S((x_i+x_{i+1})/2,y_{m+1})=0, \ i=0\cdots n.\end{cases}$$

$$(2.116)$$

首先考虑$n,m\geqslant2$的情形。此时必存在如此(i_0,j_0)使B_{i_0,j_0}在Ω外恒为零。由引理2.57，$S\in S_2^1(\Delta_{n,m}^{(2)})$可展开成

$$S=\sum_{(i,j)\neq(i_0,j_0)} C_{i,j}B_{i,j}, \tag{2.117}$$

由代数方法,可从(2.116)与(2.117)式中得出下述方程组

$$C_{i,0}B'_1+C_{i,1}B_1=0,\ C_{i,m+1}B'_{m+2}+C_{i,m+2}B_{m+2}=0,$$
$$i=0,1,\cdots,n+2,$$
$$C_{0,j}A'_1+C_{1,j}A_1=0,\ C_{n+1,j}A'_{n+2}+C_{n+2,j}A_{n+2}=0,$$
$$j=0,1,\cdots,m+2,$$

其中

$$A_i=\frac{x_{i-1}-x_{i-2}}{x_i-x_{i-2}},\quad B_j=\frac{y_{j-1}-y_{j-2}}{y_j-y_{j-2}},$$

$$A'_{i+1}=\frac{x_{i+1}-x_i}{x_{i+1}-x_{i-1}},\quad B_{i+1}=\frac{y_{j+1}-y_j}{y_{j+1}-y_{j-1}}.$$

因此,在 S 的展开式(2.117)中,足码 (i,j) 属于集合

$$I=\{(i,0),(i,m+2)\}_{i=0}^{n+2}\cup\{(0,j),(n+2,j)\}_{j=1}^{m+1}$$

的那些项 $C_{i,j},B_{i,j}$ 可由下标 $(i,j)\in I\cup\{(i_0,j_0)\}$ 的一些项代替.所以 S 可以写成

$$(n+3)(m+3)-(2n+2m+8)-1$$
$$=(n+1)(m+1)-1$$

个 B 样条的线性组合。这就在 $n,m\geqslant 2$ 时建立了(2.115)式。当 n 或 m(或者两者都)为 0 或 1 时,可直接由(2.114)式出证得引理 2.58 为真。 □

现在考虑构造 $S_2^{1,0}(\Delta_{n,m}^{(2)})$ 的基底。首先假设 $n,m\geqslant 1$。在此情形下,我们定义如此样条函数 $\tilde{B}_{i,j}$,它在 Ω 外恒为零,而在 Ω 内取如下形式:

$$\begin{cases}\tilde{B}_{1,1}=A'_1B'_1B_{1,1}-A_1B'_1B_{0,1}-A'_1B_1B_{1,0}+A_1B_1B_{0,0},\\ \tilde{B}_{n+1,1}=A_{n+2}B'_1B_{n+1,1}-A'_{n+2}B_1B_{n+2,1}-A_{n+2}B_1B_{n+1,0}\\ \qquad +A'_{n+2}B_1B_{n+2,0},\\ \tilde{B}_{1,m+1}=A'_1B_{m+2}B_{1,m+1}-A_1B_{m+2}B_{0,m+1}-A'_1B'_{m+2}B_{1,m+2}\\ \qquad +A_1B'_{m+2}B_{0,m+2},\\ \tilde{B}_{n+1,m+1}=A_{n+2}B_{m+2}B_{n+1,m+1}-A'_{n+2}B_{m+2}B_{n+2,m+1}\\ \qquad -A_{n+2}B'_{m+2}B_{n+1,m+2}+A'_{n+2}B'_{m+2}B_{n+2,m+2}.\end{cases} \tag{2.118}$$

$$
\begin{cases}
\widetilde{B}_{i,1} = B'_1 B_{i,1} - B_1 B_{i,0}, \widetilde{B}_{i,m+1} = B_{m+2} B_{i,m+1} - B'_{m+2} B_{i,m+2}, \\
\qquad\qquad i = 2, \cdots, n. \qquad (2.119) \\
\widetilde{B}_{1,j} = A'_1 B_{1,j} - A_1 B_{0,j}, \widetilde{B}_{n+1,j} = A_{n+2} B_{n+1,j} - A'_{n+2} B_{n+2,j}, \\
\qquad \widetilde{B}_{i,j} = B_{i,j}, \; i = 2, \cdots, n, \; j = 2, \cdots, m. \qquad (2.120)
\end{cases}
$$

我们分别称(2.118)、(2.119)和(2.120)式为角、边和内部B样条函数。这些样条的支集同上一节均匀 2- 型剖分下具有局部支集的相应B样条的支集相似，只是这些样条的支集中，剖分未必是均匀的。

定理 2.60 对所有 $n, m \geqslant 1$，有

$$\dim S_2^{1,0}(\Delta_{n,m}^{(2)}) = (n+1)(m+1) - 1, \qquad (2.121)$$

且空间 $S_2^{1,0}(\Delta_{n,m}^{(2)})$ 的基底为

$$E = \{\widetilde{B}_{i,j}: 1 \leqslant i \leqslant n+1, 1 \leqslant j \leqslant m+1, (i,j) \neq (i_0, j_0)\}, \qquad (2.122)$$

其中 (i_0, j_0) 是任给的，$1 \leqslant i_0 \leqslant n+1, 1 \leqslant j_0 \leqslant m+1$。

证明 显然 $E \subset S_2^{1,0}(\Delta_{n,m}^{(2)})$。所以据引理(2.58)，只要证明(2.122)式为线性无关集即可。假定

$$\sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{m+1} a_{ij} \widetilde{B}_{ij} = 0, (x, y) \in \Omega, \qquad (2.123)$$

其中 $a_{i_0, j_0} = 0$，我们仅需证明所有的 $a_{i,j}$ 皆为零。由引理 2.57 及 $B_{i,j}$ 的定义，从(2.123)式的展开式不难推得

$$a_{i,j} = d_{i,j} a_{1,1},$$

其中 $d_{i,j} \neq 0$ 为常数。因此本定理得证。 □

余下的是 n 或 m(或者两者皆)为零的情况。此时，我们需要构造具有较小支集的B样条。我们不妨假设 $n = 0, m \geqslant 1$(其它情形相当于将坐标旋转)定义

$$
\begin{aligned}
\bar{B}_j(x, y) = & A'_1 A_2 B_{1,j} + A_1 A_2 B_{0,j-1} + A'_1 A'_2 B_{2,j-1} \\
& - (A'_1 A_2 B_{1,j-1} + A_1 A_2 B_{0,j} + A'_1 A'_2 B_{2,j}),
\end{aligned}
$$

其中 (x, y) 落在以 (x_0, y_{j-1})，(x_1, y_{j-1})，(x_1, y_{j+1}) 和 (x_0, y_{j+1}) 为顶点的矩形之内，当 (x, y) 在上述矩形之外时，$\bar{B}_j(x, y) \equiv 0$，$\bar{B}_j$ 的支集与上一节均匀 2-型剖分下相应B样条的支集是相似的，

只是前者剖分未必是均匀的。

定理 2.61 对任何 $m \geqslant 0$，有

$$\dim S_2^{1,0}(\Delta_{0,m}^{(2)}) = m, \tag{2.124}$$

且 $\{\tilde{B}_j\}_{j=1}^m$ 为 $S_2^{1,0}(\Delta_{0,m}^{(2)})$ 的一组基。

证明 由 B_j 的支集的性质，立刻知道它们是线性无关的。故由引理(2.59)便可推得(2.124)式。

用相似的方法，我们可以得出下述的关于空间 $S_2^{1,1}(\Delta_{n,m}^{(2)})$ 的维数及基底定理。

定理 2.62 对所有 $n, m \geqslant 0$，有

$$\dim S_2^{1,1}(\Delta_{n,m}^{(2)}) = (n-1)_+ \cdot (m-1)_+, \tag{2.125}$$

且 $S_2^{1,1}(\Delta_{n,m}^{(2)})$ 的一组基底为 $\{B_{i,j}\}_{i=2,j=2}^{n\ \ m}$。

§8. 关于三角剖分下 $S_k^\mu(\Delta)$ 空间的维数

设 D 为 R^2 中单连通多边形区域。根据平面图论知识我们知道，$\bar{D}$ 上的三角剖分 Δ 是一个直边 2-连通平面图，它的每个内部面是一个三角形。因此我们可以借助平面图的概念和基本性质研究它的结构。设 $V(\Delta)$，$E(\Delta)$ 分别表示的顶点的集合和边的集合，$\partial\Delta$ 表示 Δ 的无界面的边界（即 $\partial\Delta = \partial D$）。记 $\mathring{V}(\Delta) := \{v \in V(\Delta);\ v \in \operatorname{int} \partial\Delta\}$，$\mathring{E}(\Delta) := \{e \in E(\Delta): e$（除端点外）$\subset \operatorname{int} \partial\Delta\}$，$\mathring{F}(\Delta) :=$ 的内部面的集合，$d_\Delta(v) := \Delta$ 的顶点 v 的度，$\Lambda(\Delta) := \{v \in V(\Delta): v \in \partial\Delta\}$，$\alpha = \alpha(\Delta) := |\mathring{V}(\Delta)|$，$\beta = \beta(\Delta) := |\Lambda(\Delta)|$，$\epsilon(\Delta) := |\mathring{E}(\Delta)|$。设 C 是 Δ 的一个圈，以 $\Delta(C)$ 表示 Δ 的子三角剖分（即 Δ 的子图）使得 $\partial\Delta(C) = C$，即 $V(\Delta(C)) = V(\Delta) \cap \operatorname{int} C$ $(\operatorname{int} C := \overline{\operatorname{int} C})$。

以下我们约定：对于 Δ 的一个圈 $C = v_1 v_2 \cdots v_n v_1$，顶点 $v_1, v_2, \cdots, v_n$ 总是沿着 C 的逆时针方向排列的。设 $v \in \mathring{V}(\Delta)$，$\Delta$ 的一个 2-连通子三角剖分 $W_\Delta(v)$ 由下列两条性质所界定：1°. $\partial W_\Delta(v) = b_1 b_2 \cdots b_n b_1$ 是 Δ 的一个圈，使 $v \in \operatorname{int} \partial W_\Delta(v)$，$n = d_\Delta(v)$；2°. $V(W_\Delta(v)) = \{v, b_1, b_2, \cdots, b_n\}$，$E(W_\Delta(v)) = \{vb_1,$

$vb_2, \cdots, vb_n, b_1b_2, b_2b_3, \cdots, b_{n-1}b_n, b_nb_1\}$. $W_\Delta(v)$ 称为Δ的星轮形(简称轮形),顶点 v 称为 $W_\Delta(v)$ 的中心. 易见 $\mathring{V}(\Delta)$ 的每个顶点都是一个轮形的中心. 设 $B_r(\Delta):=\{e \in \mathring{E}(\Delta): e$ 的两个端点全在 $\partial\Delta$ 上$\}$, $e \in B_r(\Delta)$ 称为Δ的跨边(即贯穿线). 不难证明,如果三角剖分Δ无跨边,则 $d_\Delta(v) \geqslant 3, \forall v \in V(\Delta)$.

定义 2.63 设 $v \in \mathring{V}(\Delta), \partial W_\Delta(v) = b_1b_2\cdots b_nb_1$. 称 $W_\Delta(v)$ 是Δ的一个A-轮形,如果交集 $\partial W_\Delta(v) \cap \partial\Delta$ 满足下列四条件之一: (a) $\partial W_\Delta(v) \cap \partial\Delta = \phi$; (b) $\partial W_\Delta(v) \cap \partial\Delta$ 只含 Δ 的一个顶点;(c) $\partial W_\Delta(v) \cap \partial\Delta$ 是Δ的一个圈,在这种情形下, $\Delta = W_\Delta(v)$; (d) $\partial W_\Delta(v) \cap \partial\Delta = b_1b_2\cdots b_s$ 是Δ的一条道路, 并且 $2 \leqslant s \leqslant n$, $b_{s+1}, b_{s+2}, \cdots, b_n \in \mathring{V}(\Delta)$. Δ的 A-轮形的中心的全体用 $A(\Delta)$ 表示.

定义 2.64[36] 设Δ无跨边, Δ_1 是它的三角剖分, Δ_1 称为Δ的 A-子剖分,如果它满足: 1°. $\Delta_1 = \Delta(C)$, 其中 $C = v_1^*a_1a_2\cdots a_pv_1^*$, $P > 1$, $v_1^* \in \mathring{V}(\Delta)$, 并且 $a_1a_2\cdots a_p \in \partial\Delta = a_1a_2\cdots a_\beta a_1$; 2°. $\phi \neq \mathring{V}(\Delta 1) \subset A(\Delta)$. v_1^* 称为 A-子剖分 Δ_1 的关顶点 (见图 2.31).

从Δ的非 A-轮形出发运用找子剖分列的方法 (类似于构造区间套)可以证明如下引理.

引理 2.65[36] 设 Δ 无跨边, $\mathring{V}(\Delta) \neq \Phi$. 如果 $A(\Delta) \neq \mathring{V}(\Delta)$, 则$\Delta$至少有两个 A-子剖分 Δ_1, Δ_2 满足, 对于 $\partial\Delta$ 的某一表示: $\partial\Delta = a_1a_2\cdots a_\beta a_1$, 有 $\partial\Delta_1 = v_1^*a_1a_2\cdots a_pv_1^*$, $\partial\Delta_2 = v_2^*a_qa_{q+1}\cdots a_mv_2^*$, $1 < p \leqslant q < m \leqslant \beta$, 并且 $\text{int}\,\partial\Delta_1 \cap \text{int}\,\partial\Delta_2 = \emptyset$, 这里 v_j^* 是 T_j 的关顶点, $j = 1,2$ (见图 2.31).

对非 A-轮形的个数(即 $|\mathring{V}(\Delta) \backslash A(T)|$) 用归纳法并利用 Jordan 曲线定理和引理 4.12,可以证明如下的

引理 2.66[36] 设Δ无跨边, $|\mathring{V}(\Delta)| \geqslant 2$. 则$\Delta$至少有两个 A—轮形 $W_\Delta(v_1), W_\Delta(v_2)$ 满足

1° $\partial W_\Delta(v_j) \cap \partial\Delta = b_1^{(j)}b_2^{(j)}\cdots b_{s_j}^{(j)}$, $2 \leqslant s_j \leqslant d_\Delta(v_j)$, $j = 1,2$;

2° $\operatorname{int} c_1 \cap \operatorname{int} c_2 = \phi$，其中 $c_j = v_j b_1^{(j)} b_2^{(j)} \cdots b_{i_j}^{(j)} v_j$，$j=1$，2。

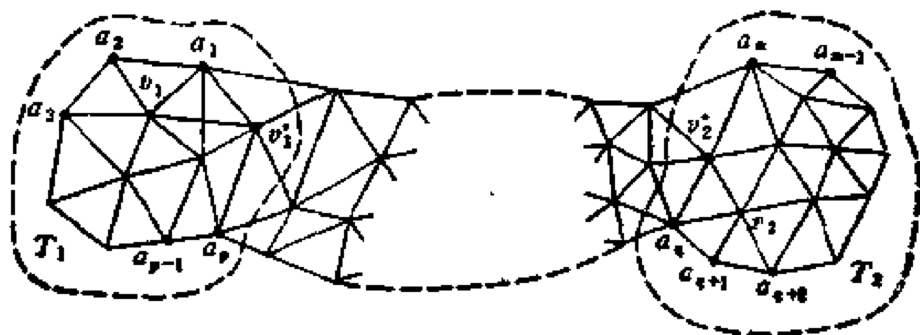


图 2.31

定义 2.67[36] 设 $v \in \mathring{V}(\Delta)$，$\partial W_\Delta(v) = b_1 b_2 \cdots b_n b_1$. 如果 $n = 2m$ 并且边 $vb_1, vb_2, \cdots, vb_m$ 分别与边 $vb_{m+1}, vb_{m+2}, \cdots, vb_{2m}$ 共线，则称 v 为贯穿顶点。贯穿顶点的全体用 $C(\Delta)$ 表示。

设 $u, v \in V(\Delta)$，定义 $u \operatorname{adj} v \Longleftrightarrow uv \in E(T)$，这里 adj:= adjoin。记 $d_\Delta{-}(v) := |\{u \in A(\Delta): u \operatorname{adj} v\}|$，$d_\Delta{+}(v) := |\{u \in \mathring{V}(\Delta): u \operatorname{adj} v\}|$，$C(\Delta, 2m) := \{v \in c(\Delta): d_\Delta(v) = 2m\} := c(\Delta)(d_\Delta = 2m)$，$J(\Delta) := \{v \in V(\Delta): \exists u \in c(\Delta, 4)$，使 $u \operatorname{adj} v\}$。易见 $c(\Delta, 4) \cap J(\Delta) = \varnothing$。

基于引理 2.64 的事实，我们有

引理 2.68[36] 设 Δ 无跨边，$|\mathring{V}(\Delta)| \geqslant 2$. 如果 $\forall v \in \mathring{V}(\Delta) \backslash c(\Delta, 4)$，$d_\Delta(v) \geqslant 6$ 而 $|c(\Delta, 4)| \leqslant 1$，则

$$|A(\Delta) \cap \mathring{V}(\Delta)(d_\Delta{+} \leqslant 3)| \geqslant 2.$$

引理 2.69[36] 设 Δ 无跨边，$|\mathring{V}(\Delta)| \geqslant 2$. 如果

$$d_\Delta(v) \geqslant \begin{cases} 6, v \in \mathring{V}(\Delta) \backslash c(\Delta), \\ 8, v \in \mathring{V}(\Delta) \cap J(\Delta), \end{cases}$$

则 $|A(\Delta) \cap \mathring{V}^*(\Delta)| \geqslant 2$，这里 $\mathring{V}^*(\Delta) := c(\Delta, 4)\ (d_\Delta{+} \leqslant 2) \cup (\mathring{V}(\Delta) \backslash (c(\Delta, 4) \cup J(\Delta))), (d_\Delta{+} \leqslant 3) \cup (\mathring{V}(\Delta) \cap J(\Delta))(d_\Delta{+} \leqslant 4)$。

设 Δ 是 $\bar{D}$ 上的三角剖分，$S_k^\mu(\Delta) := \{s(x, y) \in C^\mu(D): s(x,$

$y)|_T\in \mathbf{P}_k, \forall_T\in(\mathring{F}(\Delta))\}$，其中 $\mathbf{P}_k$ 是二元 k 次多项式的全体，$k\geqslant\mu+1$。记 $\mathring{V}(\Delta)=\{v_1,v_2,\cdots,v_\alpha\}$，$\Lambda(\Delta)=\{v_{\alpha+1},v_{\alpha+2},\cdots,v_{\alpha+\beta}\}$。对每一个 $T\in\mathring{F}(\Delta)$，若 T 的三个顶点为 v_i,v_j,v_k 且 $\partial T=v_iv_jv_kv_i$，我们定义 $T(i,j,k)=T(=T(j,k,i)=T(k,i,j))$。令 $\Gamma_{ij}:l_{ij}(x,y)\equiv A_{ij}(x-a_i)+B_{ij}(y-b_i)=0$ 表示由顶点 v_i,v_j 决定的直线，其中 $(a_i,b_i)=v_i$，$i=1,2,\cdots,\alpha+\beta$。为明确起见我们约定：当 Γ_{ij} 平行于 y 轴时，$A_{ij}=1$，$B_{ij}=0$，当 Γ_{ij} 平行于 x 轴时 $A_{ij}=0$，$B_{ij}=1$。称 $l_{ij}(x,y)$ 为边 $e=v_iv_j$ 所对应的线性函数。显然 $l_{ij}(x,y)=l_{ji}(x,y)$。设 v_iv_j 为 $T(i,j,k)$ 与 $T(i,s,j)$ 的公共边，$s(x,y)\in S_k^\mu(\Delta)$。根据定理 1.3，存在 $q_{ij}(x,y)\in\mathbf{P}_{k-\mu-1}$ 使

$$s(x,y)|_{T(i,s,j)}=s(x,y)|_{T(i,j,k)}+q_{ij}(x,y)[l_{ij}(x,y)]^{\mu+1},\tag{2.126}$$

这里 $s(x,y)|_T\in\mathbf{P}_k$ 是 $s(x,y)$ 在 $T\in\mathring{F}(\Delta)$ 上的表达式，$q_{ij}(x,y)$ 为 $\zeta(x,y)$ 相应于 v_iv_j 上的从 $T(i,j,k)$ 到 $T(i,s,j)$ 的光滑余因子。易见 $q_{i,j}(x,y)+q_{j,i}(x,y)\equiv0, i,j=\{1,2,\cdots,\alpha+\beta\}$。$\forall i\in\{1,2,\cdots,\alpha\}$，记 $i(1):=\min\{j:v_j\in V(\Delta), v_j\mathrm{adj}v_i\}$。定义整数列 $i(1),i(2),\cdots,i(n_i)\in\{1,2,\cdots,\alpha+\beta\}$ 使满足 $\partial W_\Delta(v_i)=v_{i(1)}v_{i(2)}\cdots v_{i(n_i)}v_{i(1)}, n_i=d_\Delta(v_i)$。设 $q_{i,i(t)}(x,y)$ 为 $s(x,y)$ 相应于边 $v_iv_{i(t)}$ 上的，从 $T(i,i(t-1),i(t))$ 到 $T(i,i(t),i(t+1))$ 的光滑余因子，$t=1,2,\cdots,n_i, i(0):=n_i, i(n_i+1):=i(1)$，则由(1.15)，得出

$$\sum_{t=1}^{n_i}q_{ii(t)}(x,y)[l_{ii(t)}(x,y)]^{\mu+1}\equiv0, i=1,2,\cdots,\alpha.\tag{2.127}$$

(2.127) 式便是样条空间 $S_k^\mu(\Delta)$ 的协调条件。

现在引入一组线性空间：

$$V_k^\mu(v_i):=\{(q_{i,i(1)},q_{i,i(2)},\cdots,q_{i,i(n_i)}):q_{i,i(t)}\in\mathbf{P}_{k-\mu-1},$$
$$t=1,2,\cdots,n_i;\sum_{t=1}^{n_i}q_{i,i(t)}(x,y)[l_{i,i(t)}(x,y)]^{\mu+1}\equiv0\}.$$

$$o_k^\mu(v_i):=\{(Q_1,Q_2,\cdots Q_\alpha):Q_i=(q_{i,i(1)},\cdots,q_{i,i(n_i)})\in V_k^\mu(v_i),$$
$$q_{i,j}(x,y)+q_{j,i}(x,y)\equiv0, i,j=1,2,\cdots,\alpha\},$$

$$S_k^\mu(\Delta,T^*)_0:=\{s(x,y)\in S_k^\mu(\Delta):s(x,y)|_{T^*}\equiv 0\},T^*\in\mathring{F}(\Delta).$$

根据光滑余因子,空间 $\sigma_k^\mu(\Delta)$, 及 $S_k^\mu(\Delta,T^*)$ 的定义,并利用引理 2.65 和 (2.126)式及协调条件(2.127),则有下列同构定理成立:

定理 2.70[36] 设Δ为 $\bar{D}$ 的无跨边三角剖分,$\mathring{V}(\Delta)\neq\varnothing$,则对任意的 $T^*\in\mathring{F}(\Delta)$,$S_k^\mu(\Delta,T^*)_0\cong\sigma_k^\mu(\Delta)$. 因而

$$\dim S_k^\mu(\Delta)=\binom{k+2}{2}+\dim\sigma_k^\mu(\Delta),\ (k\geqslant 4\mu+1).$$

由本章前面的结果,显然有

引理 2.71 设Δ是 $\bar{D}$ 的任意三角剖分, $v_i\in\mathring{V}(\Delta)$. 则

$$\dim V_k^\mu(v_i)=d_\Delta(v_i)\binom{k-\mu+1}{2}-\frac{1}{2}(k-\mu)(k+\mu+3)$$
$$+d_k^\mu(L(v_i)),\tag{2.128}$$

其中 $L(v_i)$ 表示与顶点 v_i 关联的不同斜率的网线的个数,而 $d_k^\mu(L(v_i))$ 由(2.2)式给出,且满足

$$d_k^\mu(n)\geqslant 0;d_k^\mu(n)>0\Longleftrightarrow n<\mu+2.\tag{2.129}$$

引理 2.72[36] 设 $\Gamma_j:l_j(x,y)=A_j(x-a)+B_j(y-b)$, $j=1,2,\cdots,\mu+2$ 为 $\mu+2$ 条斜率互不相同的直线,则对于任何 $p(x,y)\in\mathbf{P}_k$ 满足 $p(x+a,y+b)\in\mathbf{P}_k^{\mu+1}$ 者. 皆有 $q_1(x,y)$, $q_2(x,y),\cdots,q_{\mu+2}(x,y)\in\mathbf{P}_{k-\mu-1}$, 使

$$\sum_{j=1}^{\mu+2}q_j(x,y)[l_j(x,y)]^{\mu+1}\equiv p(x,y),$$

其中 $k\geqslant\mu+1$, $\mathbf{P}_k^{\mu+1}:=\left\{p(x,y)\in\mathbf{P}_k;\ \frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i\partial y^j}p(x,y)\Big|_{(0,0)}=0,\right.$ $\left.0\leqslant i+j\leqslant\mu\right\}$.

引理 2.73[36] 设 $v_j=(a_j,b_j),j=0,1,2$ 是三角形的三个顶点, $k\geqslant 4\mu+1$, 则对任给 $g(x,y)\in\mathbf{P}_k^{2\mu+1}$, $g_j(x,y)\in\mathbf{P}_{k-1},j=1,2$, 存在 $p(x,y),q(x,y)\in\mathbf{P}_{k-\mu-1}$, 及 $H_j(x,y)\in\mathbf{P}_{k-\mu-1}^\mu,j=1,2$, 使得

$$p(x,y)[l_1(x,y)]^{\mu+1}+q(x,y)[l_2(x,y)]^{\mu+1}$$
$$\equiv g(x-a_0,y-b_0),$$

$$p(x+a_1,y+b_1)+H_1(x,y)\equiv g_1(x,y),$$
$$q(x+a_2,y+b_2)+H_2(x,y)\equiv g_2(x,y),$$

此处 $l_j(x,y)\equiv A_j(x-a_0)+B_j(y-b_0)$ 是边 v_jv_0 所对应的线性函数，$j=1,2$.

对数 $|B_r(\Delta)|$ 用归纳法不难证明

引理 2.74[36] 设Δ为 $\bar{D}$ 上三角剖分. 如果对于Δ的任何无跨边子三角剖分 $\Delta'=\Delta(C)$，其中C是Δ的圈，及任何 $T'\in\mathring{F}(\Delta')$，总有

$$\dim S_k^\mu(\Delta',T')_0=\varepsilon(\Delta')\binom{k-\mu+1}{2}-\frac{1}{2}\alpha(\Delta')(k-\mu)\cdot(k+\mu+3)+\sum_{v\in V(\Delta')}d_k^\mu(L(v)).$$

则对任何 $T^*\in\mathring{F}(\Delta)$ 亦必有

$$\dim S_k^\mu(\Delta,T^*)_0=\varepsilon(\Delta)\binom{k-\mu+1}{2}-\frac{1}{2}\alpha(\Delta)(k-\mu)\cdot(k+\mu+3)+\sum_{v\in V(\Delta)}d_k^\mu(L(v)).$$

定义 2.75 设Δ为 $\bar{D}$ 上三角剖分，$v\in\mathring{V}(\Delta)\backslash C(\Delta)$. 如果存在正整数$K$使得对于圈 $\partial W_\Delta(v)$ 的任一表示: $\partial W_\Delta(v)=b_1b_2,b_2b_3,\cdots,b_nb_1,vb_1,\cdots,vb_K$ 的斜率互不相同，则称 v 为 K—轮度顶点. 如果 $\mathring{V}(\Delta)\backslash C(\Delta)$ 中每个顶点皆为 K—轮度顶点，则称Δ为K—轮度三角剖分.

定义 2.76[36] 设Δ为 $\bar{D}$ 的三角剖分. $K_1,K_2,\cdots,K_N$ 为任意N个内部互不相交的凸四边形，使得每个 K_i 是Δ的两个相邻三角形的并集(见图 2.32). 按照图 2.32，定义 $\bar{D}$ 上的一个新的三角剖分 $\tilde{\Delta}$: $V(\tilde{\Delta})=V(\Delta)\cup\{v_1^*,v_2^*,\cdots,v_N^*\}$, $E(\tilde{\Delta})=E(\Delta)\cup\bigcup_{i=1}^{N}\{v_i^*b_i^{(1)},v_i^*b_i^{(2)},\cdots,v_i^*b_i^{(4)}\}\backslash\{b_1^{(2)}b_1^{(4)},b_2^{(2)}b_2^{(4)},\cdots,b_N^{(2)}b_N^{(4)}\}$，称 $\tilde{\Delta}$ 为Δ关于凸四边形 $K_1,K_2,\cdots,K_N$ 的对角化.

由定义 2.75 容易看出，Δ为 3-轮度三角剖分的一个充分条件

是Δ的任何两相邻的三角形组成一个凸四边形（其对角线交点含于其内部）。

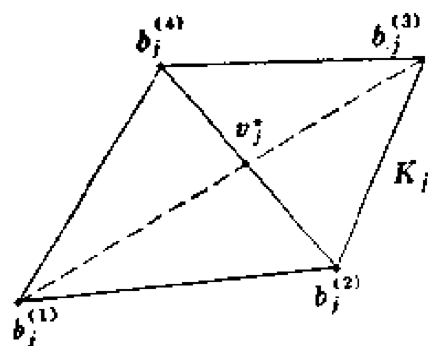


图 2.32

值得指出的是，$\tilde{\Delta}$ 的意义在于可以通过加细原剖分Δ来获得更好的逼近性质。为此必需

$$\dim S_k^\mu(\tilde{\Delta}) > \dim S_k^\mu(\Delta).$$

但这一点对于任意剖分及任意的 k，$\mu(k>\mu)$ 来说并不总是成立的[36]。因此仍需考虑一些虽然比较特殊但仍具有相当普遍性的剖分。

以下我们将证明关于样条函数空间 $S_k^\mu(\Delta)(k \geqslant 4\mu+1)$ 的维数的有关结果。

定理 2.77[36] 设Δ为 $\overline{D}$ 的任意三角剖分，则对任何 $\mu \geqslant 1$，$k \geqslant 4\mu+1$ 和 $T^* \in \mathring{F}(\Delta)$，

$$\dim S_k^\mu(\Delta, T^*)_0 = \alpha(\Delta)(k-\mu)(k-2\mu) + (\beta(\Delta)-3) \cdot \binom{k-\mu+1}{2} + \sum_{v\in \mathring{V}(\Delta)} d_k^\mu(L(v)), \tag{2.130}$$

从而

$$\dim S_k^\mu(\Delta) = \binom{k+2}{2} + \alpha(\Delta)(k-\mu)(k-2\mu) + (\beta(\Delta) - 3)\binom{k-\mu+1}{2} + \sum_{v\in \mathring{V}(\Delta)} d_k^\mu(L(v)). \tag{2.131}$$

证明 利用关系式 $\varepsilon(\Delta) = 3\alpha(\Delta) + \beta(\Delta) - 3$，(2.130)式可改写为

$$\dim S_k^\mu(\Delta, T^*)_0 = \varepsilon(\Delta)\binom{k-\mu+1}{2} - \frac{1}{2}\alpha(\Delta)(k-\mu) \cdot (k+\mu+3) + \sum_{v\in \mathring{V}(\Delta)} d_k^\mu(L(v)). \tag{2.132}$$

事实上，据引理 2.74，可以假定Δ无跨边，并对数 $\alpha(\Delta)=|\hat{V}(\Delta)|$ 采用归纳法。当 $|\hat{V}(\Delta)|=0$ 或 1 时，(2.132) 式显然成立。假设 (2.132) 式对于 $|\hat{V}(\Delta)|=m(\geqslant 1)$ 的无跨边三角剖分Δ成立。现在设Δ为任意无跨边三角剖分且 $|\hat{V}(\Delta)|=m+1$。任给定 $T^*\in\hat{F}(\Delta)$。因为 $|\hat{V}(\Delta)|\geqslant 2$，由引理 2.66，$\hat{V}(\Delta)$ 及 $\Lambda(\Delta)$ 可表示成 $\hat{V}(\Delta)=\{v_1,v_2,\cdots,v_\alpha\}$，$\Lambda(\Delta)=\{v_{\alpha+1},v_{\alpha+2},\cdots,v_{\alpha+\beta}\}$，使得 $W_\Delta(v_\alpha)$ 是Δ的满足如下关系的 Λ—轮形（见图 2.33）：

$$\partial W_\Delta(v_\alpha)=v_{\alpha+1}v_1v_2\cdots v_tv_{\alpha+\beta'}v_{\alpha+\beta'+1}\cdots v_{\alpha+\beta}v_{\alpha+1},$$
$$\beta'=\beta-s+2,\ s+t=d_\Delta(v_\alpha),s\geqslant 2,t\geqslant 1,$$
$$\partial W_\Delta(v_\alpha)\cap\partial\Delta=v_{\alpha+\beta'}v_{\alpha+\beta'+1}\cdots v_{\alpha+\beta}v_{\alpha+1},T^*\subset\bar{D}_1,$$
$$D_1=\operatorname{int}C,C=v_\alpha v_{\alpha+1}\cdots v_{\alpha+\beta'-1}v_{\alpha+\beta'}v_\alpha.$$

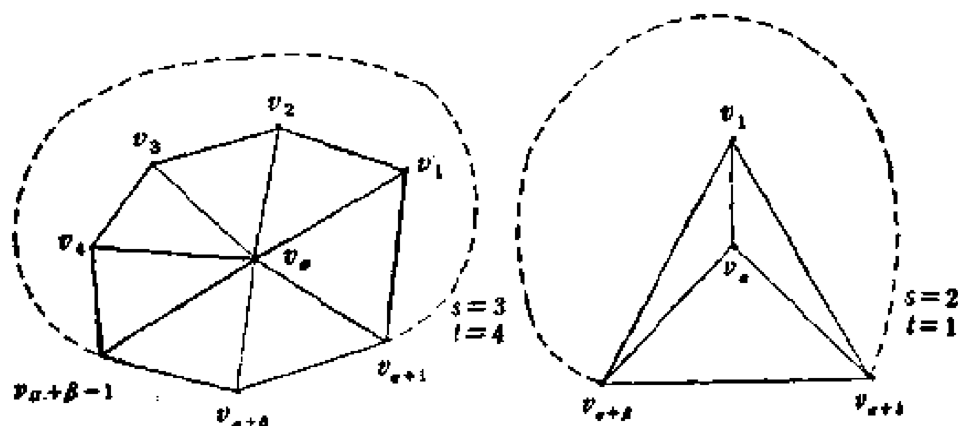


图 2.33

易见 $\Delta_1=\Delta(C)$ 是 $\bar{D}_1$ 上的无跨边三角剖分，且 $\hat{V}(\Delta_1)=\{v_1,v_2,\cdots,v_{\alpha-1}\}$。令 $M=\sum_{i=1}^{\alpha}n_i,n_i=\alpha_\Delta(v_i),i=1,2,\cdots,\alpha$。定义如下三个线性空间：

$$[\mathbf{P}_{k-\mu-1}]^M:=\{(q_1,q_2,\cdots q_M):q_j\in\mathbf{P}_{k-\mu-1},j=1,2,\cdots,M\},$$
$$\hat{\sigma}_k^\mu(\Delta):=\{(Q_1,Q_2,Q_3,\cdots,Q_\alpha)\in[\mathbf{P}_{k-\mu-1}]^M:Q_i=(q_{i,i(1)},$$
$$q_{i,i(2)},\cdots,q_{i,i(n_i)}),i=1,2,\cdots\alpha;$$
$$(Q_1,Q_2,\cdots,Q_{\alpha-1})\in\sigma_k^\mu(\Delta_1),\ q_{\alpha,i}(x,y)+q_{i,\alpha}(x,y)$$

$$\equiv 0, j = 1,2,\cdots,t\},$$

$$\sigma_k^\mu(\Delta)^* := \{(Q_1, Q_2, \cdots, Q_\alpha) \in [\mathbf{P}_{k-\mu-1}]^M : Q_i = (q_{i,i(1)}, q_{i,i(2)}, \cdots q_{i,i(\alpha_i)}), i = 1,2,\cdots,\alpha; Q_\alpha \in V_k^\mu(v_\alpha)\}.$$

不难验证

$$\left.\begin{aligned}
&\dim [\mathbf{P}_{k-\mu-1}]^M = M \cdot \binom{k-\mu+1}{2},\\
&\sigma_k^\mu(\Delta) = \hat{\sigma}_k^\mu(\Delta) \cap \sigma_k^\mu(\Delta)^*,\\
&\dim \hat{\sigma}_k^\mu(\Delta) = \dim \sigma_k^\mu(\Delta_1) + s \cdot \binom{k-\mu+1}{2},\\
&\dim \sigma_k^\mu(\Delta)^* = M \cdot \binom{k-\mu+1}{2} - \frac{1}{2}(k-\mu)\\
&\qquad \cdot (k+\mu+3) + d_k^\mu(L(v_\alpha)),
\end{aligned}\right\} \tag{2.133}$$

$$\varepsilon(\Delta_1) = \varepsilon(\Delta) - s, \alpha(\Delta_1) = \alpha(\Delta) - 1. \tag{2.134}$$

现在利用条件 $k \geqslant 4\mu + 1$ 来证明

$$\hat{\sigma}_k^\mu(\Delta) + \sigma_k^\mu(\Delta)^* = [\mathbf{P}_{k-\mu-1}]^M. \tag{2.135}$$

如果此式成立,那么由 (2.134) 式、归纳法假设和定理 2.70 可得

$$\begin{aligned}
\dim S_k^\mu(\Delta, T^*)_0 &= \dim \sigma_k^\mu(\Delta) = \dim \hat{\sigma}_k^\mu(\Delta)\\
&\quad + \dim \sigma_k^\mu(\Delta)^* - \dim [\mathbf{P}_{k-\mu-1}]^M\\
&= \dim S_k^\mu(\Delta_1, T^*)_0 + s\binom{k-\mu+1}{2}\\
&\quad - \frac{1}{2}(k-\mu)(k+\mu+3) + d_k^\mu(L(v_\alpha))\\
&= \varepsilon(\Delta)\binom{k-\mu+1}{2} - \frac{1}{2}\alpha(\Delta)(k-\mu)\\
&\quad \cdot (k+\mu+3) + \sum_{j=1}^{\alpha} d_k^\mu(L(v_j)).
\end{aligned}$$

显然 $\hat{\sigma}_k^\mu(\Delta) + \sigma_k^\mu(\Delta)^* \subseteq [\mathbf{P}_{k-\mu-1}]^M$. 任取 $(Q_1, Q_2, \cdots, Q_t) \in [\mathbf{P}_{k-\mu-1}]^M$, 并记 $Q_i = (q_{i,i(1)}, q_{i,i(2)}, \cdots, q_{i,i(\alpha_i)}), i = 1,2,\cdots,\alpha$;. $Q_\alpha = (q_{\alpha,1}, q_{\alpha,2}, \cdots, q_{\alpha,t}, q_{\alpha,\alpha+\beta'}, q_{\alpha,\alpha+\beta'+1}, \cdots, q_{\alpha,\alpha+\beta}, q_{\alpha,\alpha+1})$. 设 $v_\alpha = (a, b)$, $w_j = (a_j, b_j)$, $j = 1,2,\cdots,t$; $q_{\alpha,j} = g_{\alpha,j}(x-a)(y-$

$b) + H_{\alpha,j}(x-a,\ y-b)$，其中 $g_{\alpha,j}(x,y)\in \mathbf{P}_{\mu-1}$，$H_{\alpha,j}(x,y)\in \mathbf{P}^{\alpha}_{k-\mu-1}$，$j=1,2,\cdots,t$，满足

$$\left.\begin{array}{l}\tilde{q}_{j,\alpha}(x,y)[l^*_{j,\alpha}(x,y)]^{\mu+1}+\tilde{q}_{j,j+1}(x,y)[l^*_{j,j+1}(x,y)]^{\mu+1}\\ \quad +\tilde{q}_{j,j-1}(x,y)[l^*_{j,j-1}(x,y)]^{\mu+1}\equiv 0, j=1,2,\cdots,t,\\ \tilde{q}_{j,\alpha}(x+a,y+b)\equiv -g_{\alpha,j}(x,y)+\widetilde{H}_{j,\alpha}(x,y),\\ \quad j=1,2,\cdots,t,\\ \tilde{q}_{j,j+1}(x+a_{j+1},y+b_{j+1})\in \boldsymbol{P}^{\alpha}_{k-\mu-1},\ j=1,2,\cdots,t-1\\ \quad (t\geqslant 2),\\ \tilde{q}_{j,j-1}(x,y):=-\tilde{q}_{j-1,j}(x,y),\ j=2,3\cdots,t\ (t\geqslant 2),\end{array}\right\}$$

其中 $\tilde{q}_{1,0}(x,y):=\tilde{q}_{1,\alpha+1}(x,y)$，$\tilde{q}_{t,t+1}(x,y):=\tilde{q}_{t,\alpha+\beta'}(x,y)$，$l^*_{1,0}(x,y):=l_{1,\alpha+1}(x,y)$，$l^*_{t,t+1}(x,y):=l_{t,\alpha+\beta'}(x,y)$，$l^*_{j,\alpha}(x,y):=l_{j,\alpha}(x,y)$，$j=1,2,\cdots,t$；$l^*_{j,j+1}(x,y):=l_{j,j+1}(x,y)$，$j=1,2,\cdots,t-1$，$(t\geqslant 2)$；$l^*_{j,j-1}(x,y):=l_{j,j-1}(x,y)$，$j=2,3,\cdots,t(t\geqslant 2)$。

记 $Q_0:=\{(1,\alpha+1),(1,\alpha),(1,\alpha+\beta')\}$，当 $t=1$ 时；或 $Q_0:=\{(1,\alpha+1),\ (t,\alpha+\beta')\}\cup\{(1,\alpha),\ (2,\alpha),\cdots,(t,\alpha)\}\cup\{(1,2),(2,1),(2,3),(3,2),\cdots,(t-1,t),(t,t-1)\}$，当 $t\geqslant 2$ 时。$Q_1:=\{(\alpha,1),(\alpha,2),\cdots,(\alpha,t)\}$。定义

$$\hat{q}_{i,j}(x,y)\equiv\begin{cases}\tilde{q}_{i,j}(x,y), & (i,j)\in Q_0,\\ -\tilde{q}_{j,\alpha}(x,y), & (i,j)\in Q_1,\\ 0, & (i,j)\notin Q_0\cup Q_1\end{cases}\tag{2.136}$$

$i=1,2,\cdots,\alpha,j=1,2,\cdots,\alpha+\beta'$。

令 $\hat{Q}_i=(\hat{q}_{i,i(1)},\hat{q}_{i,i(2)},\cdots,\hat{q}_{i,i(n_i)})$，$i=1,2,\cdots,\alpha-1$。则 $(\hat{Q}_1,\hat{Q}_2,\cdots,\hat{Q}_{\alpha-1})\in \mathfrak{S}^{\mu}_k(\Delta_1)$。再由引理 2.72，有 $q^*_{\alpha,\alpha+\beta}(x,y)$，$q^*_{\alpha,\alpha+1}(x,y)\in \boldsymbol{P}_{k-\mu-1}$ 满足

$$q^*_{\alpha,\alpha+\beta}(x,y)[l_{\alpha,\alpha+\beta}(x,y)]^{\mu+1}+q^*_{\alpha,\alpha+1}(x,y)[l_{\alpha,\alpha+1}(x,y)]^{\mu+1}$$
$$\equiv -\sum_{j=1}^{t} q^*_{\alpha,j}(x,y)[l_{\alpha,j}(x,y)]^{\mu+1},\tag{2.137}$$

这里 $q^*_{\alpha,j}(x,y):=\widetilde{H}_{j,\alpha}(x-a;y-b)+H_{\alpha,j}(x-a,y-b),j=1,2,\cdots,t$。因为 $s\geqslant 2$，于是从(2.137)式有(如果 $s\geqslant 3$，可令 $q^*_{\alpha,j}(x,y)\equiv 0$, $j=\alpha+\beta',\alpha+\beta'+1,\cdots,\alpha+\beta-1$)

$$Q_\alpha^*:=(q_{\alpha,\alpha(1)}^*,q_{\alpha,\alpha(2)}^*,\cdots,q_{\alpha,\alpha(n_\alpha)}^*)=(q_{\alpha,1}^*,q_{\alpha,2}^*,\cdots,q_{\alpha,t}^*,$$
$$q_{\alpha,\alpha+\beta'}^*,q_{\alpha,\alpha+\beta'+1}^*,\cdots,q_{\alpha,\alpha+\beta}^*,q_{\alpha,\alpha+1}^*)$$

属于 $V_k^\mu(v_\alpha)$. 令 $\hat q_{\alpha,j}(x,y)\equiv -q_{\alpha,j}^*(x,y)+q_{\alpha,j}(x,y),j=\alpha+\beta',\ \alpha+\beta'+1,\ \cdots,\ \alpha+\beta,\ \alpha+1$; $\hat Q_\alpha:=(\hat q_{\alpha,\alpha(1)},\hat q_{\alpha,\alpha(2)},\cdots,\hat q_{\alpha,\alpha(n_\alpha)})=(\hat q_{\alpha,1},\hat q_{\alpha,2},\cdots,\hat q_{\alpha,t},\hat q_{\alpha,\alpha+\beta'},\hat q_{\alpha,\alpha+\beta'+1},\cdots,\hat q_{\alpha,\alpha+\beta},\hat q_{\alpha,\alpha+1})$,
则

$$(\hat Q_1,\hat Q_2,\cdots,\hat Q_{\alpha-1},\hat Q_\alpha)\in\hat\sigma_k^\mu(\Delta). \tag{2.138}$$

取

$$Q_i^*=Q_i-\hat Q_i,i=1,2,\cdots,\alpha-1, \tag{2.139}$$

则

$$(Q_1^*,Q_2^*,\cdots,Q_{\alpha-1}^*,Q_\alpha^*)\in\sigma_k^\mu(\Delta)^*. \tag{2.140}$$

由(2.136)式有

$$\hat q_{\alpha,j}(x,y)\equiv g_{\alpha,j}(x-a,y-b)-\widetilde H_{j,\alpha}(x-a,y-b),$$
$$\hat q_{\alpha,j}(x,y)+\hat q_{\alpha,j}(x,y)\equiv g_{\alpha,j}(x-a,y-b)+H_{\alpha,j}(x-a,$$
$$y-b)\equiv q_{\alpha,j}(x,y),\ j=1,2,\cdots,t.$$

因此由 $\hat Q_\alpha+Q_\alpha^*=Q_\alpha$ 及(2.138)—(2.140)式,最终可得

$$(\hat Q_1,\hat Q_2,\cdots,\hat Q_\alpha)+(Q_1^*,Q_2^*,\cdots,Q_\alpha^*)=(\hat Q_1+Q_1^*,\cdots,\hat Q_\alpha$$
$$+Q_\alpha^*)=(Q_1,Q_2,\cdots,Q_\alpha).$$

这表明 $\hat\sigma_k^\mu(\Delta)+\sigma_k^\mu(\Delta)^*\supseteq[\mathrm P_{k-\mu-1}]^M$, 因此(2.135)成立. □

定理 2.78[36] 设Δ为 $\bar D$ 上 $\mu+2$—轮度三角部分,满足

(i) $d_T(v)\geqslant\mu+5$, 对任意的 $v\in\mathring V(\Delta)\backslash C(\Delta)$;

(ii) 当 $C(\Delta,4)\neq\varnothing$ 时,

$$d_\Delta(v)\geqslant\begin{cases}\max\{\mu+6,8\}, & v\in\mathring V(\Delta)\cap J(\Delta)\backslash C(\Delta),\\ 8, & v\in C(\Delta)\cap J(\Delta);\end{cases}$$

则对任何 $k\geqslant\mu+1$,

$$\dim S_k^\mu(\Delta)=\binom{k+2}{2}+\alpha(\Delta)(k-\mu)(k-2\mu)$$
$$+(\beta(\Delta)-3)\binom{k-\mu+1}{2}$$
$$+\sum_{m=2}^{\mu+1}d_k^\mu(m)|C(\Delta,2m)|. \tag{2.141}$$

进一步，$S_k^\mu(\Delta)$ 还具有如下性质(2.142)：

对任意的 $q(x,y)\in \mathrm{P}_{k-\mu-1}$ 和任意的 $e\in \mathring{E}(\Delta)$，存在 $S(x,y)\in S_k^\mu(\Delta)$，使得 $S(x,y)$ 相应于边 e 上的光滑余因子等于 $q(x,y)$ 和 $-q(x,y)$。 (2.142)

定理 2.79[36] 设Δ为 $\overline{D}$ 上 3—轮度三角剖分，且对任何 $v\in \mathring{V}(\Delta)$ 满足 $d_\Delta(v)\geqslant 6$。设 $K_1,K_2,\cdots,K_N$ 为任意N个凸四边形满足

1° 每个 K_i 是Δ的两个相邻的三角形的并集；

2° $\mathring{K}_i\cap\mathring{K}_j=\varnothing,i\neq j,i,j=1,2,\cdots,N$。

则

$$\dim S_2^1(\tilde{\Delta})=\dim S_2^1(\Delta)+N=\beta(\Delta)+3+N,$$

其中 $\tilde{\Delta}$ 是Δ的关于 $K_1,K_2,\cdots,K_N$ 的对角化。并且 $S_2^1(\tilde{\Delta})$ 还具有如下性质：对任意的 $e\in\mathring{E}(\tilde{\Delta})$，存在 $S(x,y)\in S_2^1(\tilde{\Delta})$，使 $S(x,y)$ 相应于边 e 上的光滑余因子等于$+1$ 和-1。

定理 2.78的证明 利用公式 $\varepsilon(\Delta)=3\alpha(\Delta)+\beta(\Delta)-3$ 及 $S_k^\mu(\Delta,T^*)_0$ 的定义易见 (2.141) 式等价于

$$\dim S_k^\mu(\Delta,T^*)_0=\varepsilon(\Delta)\binom{k-\mu+1}{2}-\frac{1}{2}\alpha(\Delta)(k-\mu)$$
$$\cdot(k+\mu+3)+\sum_{m=2}^{\mu+1}d_k^\mu(m)|C(\Delta,2m)|,T^*\in\mathring{F}(\Delta). \tag{2.143}$$

对数 $|B_r(\Delta)|$ 采用归纳法来证明(2.143)式和性质(2.142)。设 $|B_r(\Delta)|=0$，此时对 $\alpha(\Delta)=|\mathring{V}(\Delta)|$ 作归纳法。当 $|\mathring{V}(\Delta)|=0$ 或 1 时，由 (2.128) 式及引理 2.71 可知 (2.143) 式成立，并且 $S_k^\mu(\Delta)$ 具有性质(2.142)。假设 $|\mathring{V}(\Delta)|=m(\geqslant 1)$ 时(2.143)式成立，并且 $S_k^\mu(\Delta)$ 具有性质(2.142)。令Δ满足条件 (i),(ii) 且 $|\mathring{V}(\Delta)|=m+1$ ($B_r(\Delta)=0$)。因为 $|\mathring{V}(\Delta)|\geqslant 2$，由引理 2.68 及条件 (i),(ii)，有 $|A(\Delta)\cap\mathring{V}_*(\Delta)|\geqslant 2$，其中 $\mathring{V}_*(\Delta):=C(\Delta)\left(d_{\tilde{\Delta}}\geqslant\frac{1}{2}d_\Delta\right)\cup(\mathring{V}(\Delta)\backslash C(\Delta))(d_{\tilde{\Delta}}\geqslant\mu+2)$。取 $v_1,v_2\in$

$A(\Delta) \cap \mathring{V}_*(\Delta)$, $v_1 \doteq v_2$, 记 $\partial\Delta = a_1a_2 \cdots a_\beta a_1$, $\partial W_\Delta(v_1) = b_1b_2\cdots b_n b_1$, $\partial W_\Delta(v_2) = (b'_1b'_2 \cdots b'_m b'_1$, 使 $\partial W_\Delta(v_1) \cap \partial\Delta = b_1b_2\cdots b_s = a_1a_2\cdots a_s, s = d_{\bar\Delta}(v_1)$; $\partial W_\Delta(v_2) \cap \partial\Delta = b'_1b'_2\cdots b'_t = a_qa_{q+1}\cdots a_{q+t-1}$, $t = d_{\bar\Delta}(v_2)$. 令 $c_1 = v_1a_sa_{s+1}\cdots a_\beta a_1v_1$, $c_2 = v_2a_{q+t-1}a_{q+t}\cdots a_\beta a_1a_2 \cdots a_qv_2$, $\Delta_j := \Delta(c_j)$, $j = 1, 2$, 则 Δ_j 是 $\overline{D}_j := \mathrm{int}\, c_i$ 上满足条件 (i), (ii) 的 $\mu + 2$—轮度三角剖分并且 $|B_r(\Delta_j)| = 0$, $j = 1,2$ (对 $\mu = 1, s = 3, t = 3$, 参见图 2.31). 给定 $T^* \in \mathring{F}(\Delta)$. 由于 $\overline{D} = \overline{D}_1 \cup \overline{D}_2$, 设 $T^* \subset \overline{D}_1$. 因为 $|\mathring{V}(\Delta_j)| = |\mathring{V}(\Delta)| - 1 = m, j = 1,2$, 根据归纳法假设, 维数 $\dim S_k^\mu(\Delta_1, T^*)_0$ 由 (2.143) 式给出. 令 $T_j = \mathrm{int}\, v_1b_jb_{j+1}v_1 \in \mathring{F}(\Delta), (b_{n+1} := b_n), e_j = v_1b_j, l_i(x,y)$ 为边 e_i 所对应的线性函数, $j = 1,2,\cdots, n$ $(n = d_\Delta(v_1))$. 对任何 $S^*(x,y) \in S_k^\mu(\Delta_1)$, 据 (2.126) 式, 有 $q_j^*(x,y) \in \mathrm{P}_{k-\mu-1}$, $j = s+1, s+2, \cdots, n$, 使

$$S^*(x, y)|_{T_n} \equiv S^*(x, y)|_{T_s} + \sum_{j=s+1}^{n} q_j^*(x,y)[l_j(x,y)]^{\mu+1}.$$

由 $v_1 \in \mathring{V}(\Delta)\backslash C(\Delta)$ 或 $v_1 \in C(\Delta)$ 可知边 $e_1, e_2, \cdots, e_{\mu+2}$ 或者边 $e_1, e_2, \cdots, e_r \left(r = \frac{1}{2} d_\Delta(v_1)\right)$ 的斜率分别互不相同. 因此由引理 2.71 和贯穿顶点的定义知, 存在 $q_j^*(x,y) \in \mathrm{P}_{k-\mu-1}$, $j = 1, 2, \cdots, s$, 使

$$\sum_{j=1}^{n} q_j^*(x,y)[l_j(x,y)]^{\mu+1} \equiv 0.$$

定义

$$S(x,y) = \begin{cases} S^*(x,y), & (x,y) \in \overline{D}_1, \\ S^*(x, y)|_{T_n} + \sum\limits_{j=1}^{i} q_j^*(x,y)[l_j(x,y)]^{\mu+1}, \\ \qquad (x,y) \in T_i, \\ i = 1, 2, \cdots, s-1. \end{cases}$$

则由

$$S^*(x, y)|_{T_n} + \sum_{j=1}^{i-1} q_j^*(x,y)[l_j(x,y)]^{\mu+1} \equiv S^*(x,y)|_{T_i}$$

$$+ \sum_{j=t+1}^{s} q_j^*(x,y)[l_j(x,y)]^{\mu+1}$$

$$+ \sum_{j=1}^{t-1} q_j^*(x,y)[l_j(x,y)]^{\mu+1} \equiv S^*(x,y)|_{T_t}$$

$$- q_t^*(x,y)[l_t(x,y)]^{\mu+1},$$

可知 $S(x,y)$ 是 $\bar{D}$ 上单值函数且属于 $C^\mu(\bar{D})$，因而属于 $S_k^\mu(\Delta)$。因为 $S(x,y)|_{D_1} = S^*(x,y)$，所以 $S^*(x,y) \in S_k^\mu(\Delta_1, T^*)_0$ 时，$S(x,y) \in S_k^\mu(\Delta, T^*)_0$。定义线性映射

$$f: S_k^\mu(\Delta, T^*)_0 \to S_k^\mu(\Delta_1, T^*)_0 : S(x,y) \longmapsto S(x,y)|_{D_1},$$

则由上面的证明可知 f 是满射，并易见

$$\ker f \cong \Big\{(q_1, \cdots, q_s); q_j \in \mathrm{P}_{k-\mu-1}, j = 1,2,\cdots,s,$$

$$\sum_{j=1}^{s} q_j(x,y)[l_j(x,y)]^{\mu+1} \equiv 0\Big\}.$$

故由(2.128)及(2.129)式有

$$\dim \ker f = s\binom{k-\mu+1}{2} - \frac{1}{2}(k-\mu)(k+\mu+3)$$

$$+ d_k^\mu(L(v_1)).$$

因为 $\alpha(\Delta_1) = \alpha(\Delta) - 1$，$\varepsilon(\Delta_1) = \varepsilon(\Delta) - s$，所以根据归纳假设，得到

$$\dim S_k^\mu(\Delta, T^*)_0 = \dim \mathrm{Im}\, f + \dim \ker f$$

$$= \dim S_k^\mu(\Delta_1, T^*)_0 + \dim \ker f = \varepsilon(\Delta)\binom{k-\mu+1}{2}$$

$$- \frac{1}{2}\alpha(\Delta)(k-\mu)(k+\mu+3)$$

$$+ \sum_{m=2}^{\mu+1} d_k^\mu(m)|C(\Delta,2m)|.$$

这样在 $|B_r(\Delta)| = 0$ 的情形下，(2.143) 式成立，因而根据引理 2.74 知，(2.143)式对 $|B_r(\Delta)| > 0$ 也成立。再考虑性质(2.142)。

对任何 $e\in\mathring{E}(\Delta)$，因为 $\mathring{E}(\Delta)=\mathring{E}(\Delta_1)\cup\mathring{E}(\Delta_2)$，可设 $e\in\mathring{E}(\Delta_1)$. 由归纳假设，$S_k^\mu(\Delta_1)$ 具有性质(2.142)。于是对任意的 $q(x,y)\in\mathbf{P}_{k-\mu-1}$，有 $S^*(x,y)\in S_k^\mu(\Delta_1)$ 使 $S^*(x,y)$ 相应于边 e 上的光滑余因子等于 $q(x,y)$ 和 $-q(x,y)$。对此 $S^*(x,y)$，取 $S(x,y)\in S_k^\mu(\Delta)$ 如前，使 $S(x,y)|_{\bar{D}_1}=S^*(x,y)$，则 $S(x,y)$ 相应于边 e 上的光滑余因子等于 $q(x,y)$ 和 $-q(x,y)$。至此，证明了当 $|B_r(\Delta)|=0$ 时性质(2.142)成立。假设(2.142)式对 $|B_r(\Delta)|=m$ 成立。从边 $e\in B_r(\Delta)$ 出发，容易证明(2.142)式当 $|B_r(\Delta)|=m+1$ 时也成立。 □

利用下面的引理 2.80(它可由引理 2.68 推出)，不难证明定理 2.78。

引理 2.80[36] 设 Δ 为 $\bar{D}$ 上 3—轮度三角剖分，对任何 $v\in\mathring{V}(\Delta)\backslash C(\Delta,4)$；并且 $|C(\Delta,4)|=1$。则对于 $\mathring{E}(\Delta)$ 中每一个其端点之一属于 $C(\Delta,4)$ 的边 e，存在 $S(x,y)\in S_2^1(x,y)$，使 $S(x,y)$ 相应于边 e 上的光滑余因子等于 $+1$ 和 -1.

顺便指出，Morgan-Scott[140] 研究了 $S_k^1(\Delta)(k\geqslant 1)$ 空间，并得到了该空间的维数公式、结点基以及最小支集的描述. P. Alfeld 和 L. L. Schumaker[37] 也曾考虑过 $S_k^\mu(\Delta)\ (k\geqslant 4\mu+1)$ 空间，由于他们采用的方法与本章的方法不同，得到的 $S_k^\mu(\Delta)(k\geqslant 4\mu+1)$ 空间的维数公式的形式也不同.

以上讨论了当 $k\geqslant 4\mu+1$ 时，样条空间 $S_k^\mu(\Delta)$ 的维数。下面介绍关于样条空间 $S_3^1(\Delta)$, $S_4^1(\Delta)$ 和 $S_2^1(\Delta)$ 的维数方面的结果。

首先，需要下述命题。

命题 2.81 设 Δ 是 Ω 的三角剖分，则在 Δ 的每个内网点处，均可取到三条内网线，使得这三条内网线与其它各内网点处已经取过的三条内网线不重复.

证明 设 $\mathrm{St}(A)$ 是 A 星域，$\mathrm{St}(A_1,\cdots,A_r)=\bigcup_{i=1}^{r}\mathrm{St}(A_i)$. 显然，若 Δ 中没有内网点，则结论是成立的. 下面对 Δ 的内网点个

数用归纳法进行论证．选取Δ的内网点 A_1，显然命题对 $\mathrm{St}(A_1)$ 成立，如果 $\mathrm{St}(A_1)$ 的边界网点均是Ω的边界点，则另取Δ的另一内网点 B_1，并重复我们的推理．因此，不妨假定 $\mathrm{St}(A_1)$ 的边界网点中至少有一个是Δ的内网点，记为 A_2．则 A_1 和 A_2 有下面

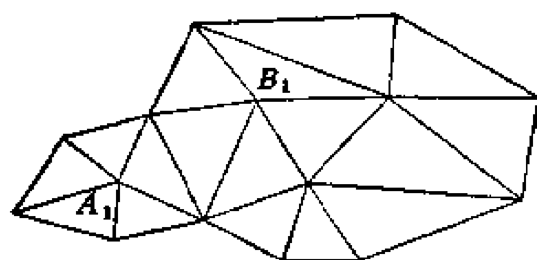


图 2.34

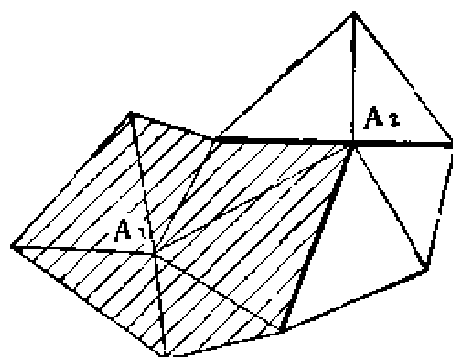
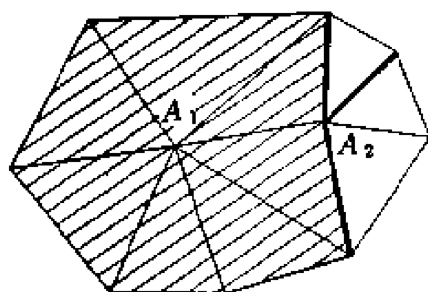


图 2.35

两种可能的位置关系：

1° A_2 是 $\mathrm{St}(A_1)$ 的一个"凸"边界点；

2° A_2 是 $\mathrm{St}(A_1)$ 的一个"凹"边界点．



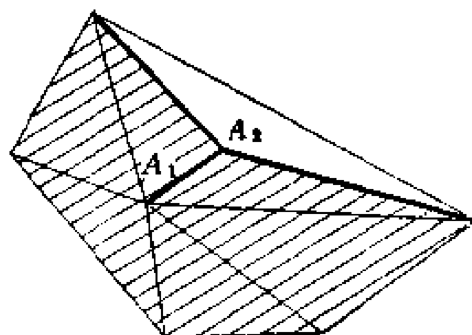


图 2.36

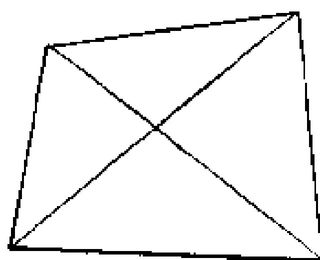
由 Euler 公式，多边形 $\mathrm{St}(A_1, A_2)$ 有 $\beta+3$ 条内网线，其中β是 $\mathrm{St}(A_1, A_2)$ 的边界网点数．显然 $\beta>3$．通过 A_2 的内网线可取为图中的粗黑网线，所以命题的结论对于 $\mathrm{St}(A_1, A_2)$ 也成立．若假定命题在 $\mathrm{St}(A_1, A_2, \cdots, A_r)$ 上成立，则同上类似地可证明命题在 $\mathrm{St}(A_1, \cdots, A_{r+1})$ 上也成立． □

现在讨论维数问题． 如果 $S_k^\mu(\Delta)$ 的维数多于通常的维数，

则称剖分Δ关于 $S_k^1(\Delta)$ 具有奇异结构；否则称Δ关于 $S_k^1(\Delta)$ 是非奇异的. 由定理 1.17 和 Euler 公式，有

$$\dim S_k^1(\Delta) = \binom{k+2}{2} + (2\alpha_0 + 3\delta + \beta - 3)\binom{k}{2} - \tau, \tag{2.144}$$

其中 β 为Δ的边界网点数，δ 为Δ的奇异网点数，α_0 为Δ的非奇异网点数，而 τ 为由整体协调条件所对应齐次线性方程组的系数矩阵的秩.



（局部简单贯穿部分）
“奇异点”

图 2.37

利用命题 2.81 知，若Δ关于 $S_k^1(\Delta)$ 是非奇异的，则 τ 就等于每个内网点处协调方程对应齐次线性方程组系数矩阵的秩数之和. 注意对每个奇异网点（见图 2.37），将有两个网线上的光滑余因子是自由的（当 $k=4$ 时，自由度是 13），从而

$$\tau = \begin{cases} 3\alpha_0 + 2\delta, & k=2, \\ 7\alpha_0 + 6\delta, & k=3, \\ 12\alpha_0 + 11\delta, & k=4. \end{cases} \tag{2.145}$$

结合(2.144)和(2.145)式，我们有

$$\dim S_2^1(\Delta) = 3\beta + \delta, \tag{2.146}$$

$$\dim S_3^1(\Delta) = 1 + 2\alpha_0 + 3\beta + 3\delta, \tag{2.147}$$

$$\dim S_4^1(\Delta) = -3 + 6\alpha_0 + 6\beta + 7\delta. \tag{2.148}$$

在任何三角剖分Δ对于 $S_3^1(\Delta)$ 与 $S_4^1(\Delta)$ 均是非奇异的假设前提下，[39] 中证明了上述结论. 我们猜测：任意三角剖分Δ关于 $S_3^1(\Delta)$ 及 $S_4^1(\Delta)$ 是非奇异的.

Alfeld-Piper-Schumaker[40] 证明了上面的猜测关于 $S_4^1(\Delta)$ 是正确的. 施锡泉[41]利用不同的方法（见第四章 § 4）也得出了同样的结论. 虽然迄今未能找到使 $S_3^1(\Delta)$ 是奇异的三角剖分的例子，但尚未证明 $S_3^1(\Delta)$ 对一切三角剖分Δ均是非奇异的.

三角剖分Δ关于空间 $S_2^1(\Delta)$ 都是奇异的. 假定 A 是Δ中两

相邻三角形构成的凸四边形，$\bar{\Delta}$ 是在原有剖分的基础上再连接 A 的另一条对角线 L_A 而形成的新剖分，称 A 含有一个拟奇异网点。

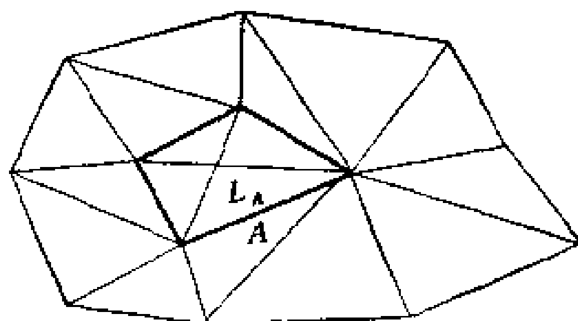
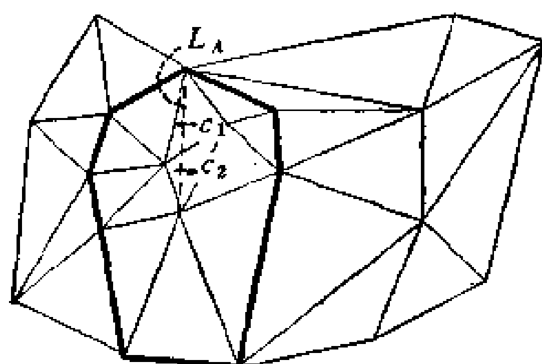


图 2.38

如果 $\bar{\Delta}$ 中存在一个"局部"三角剖分 $\Delta_1 \subset \bar{\Delta}$，使得 A 的边都是 Δ_1 的内网线，且 $\bar{\Delta}$ 中位于 L_A 上的两条网线上的光滑余因子均为零(见图 2.39)。

例 1 $\dim S_2^1(\Delta) = \dim S_2^1(\bar{\Delta}) = 7$，且 $c_1 = c_2 = 0$ (图 2.40 (a) Morgan-Scott，1977)。因此 Morgan-Scott



拟奇异网点（光滑余因子 $c_1, c_2=0$）

图 2.39

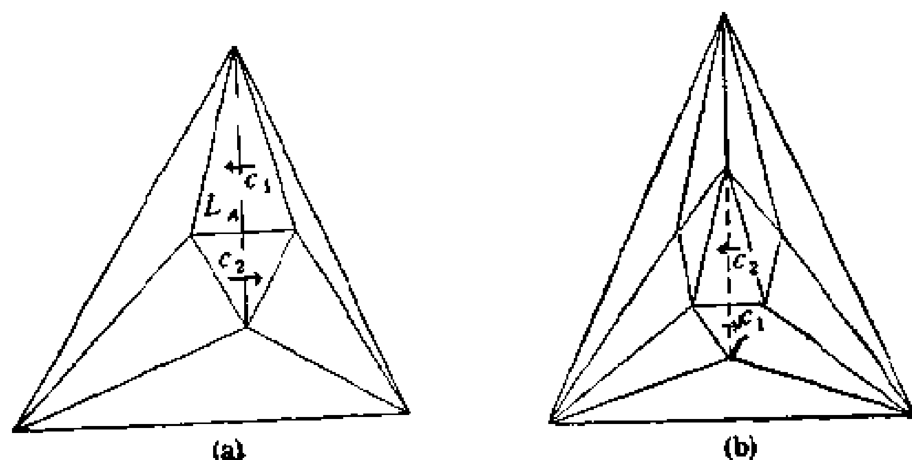


图 2.40

剖分有一个拟奇异网点。

例2 $\dim S_2^1(\Delta) = \dim S_2^1(\bar{\Delta}) = 7$，如图 2.40(b)。

此外，还可以找到其它的所谓"奇异结构"，见图 2.41。

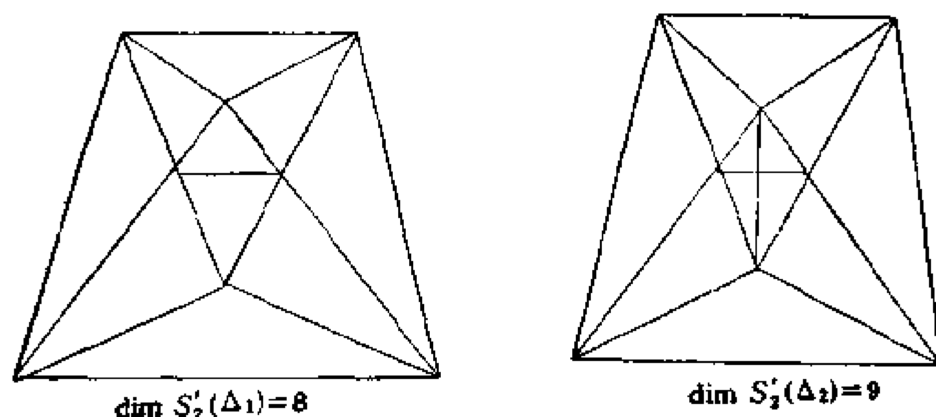


图 2.41

从上面的例子看到"奇异结构"确实不满足维数公式(2.146)。另外，存在非对称的三角剖分，它们同样含有拟奇异网点、或者它们就是奇异结构。见图 2.42。

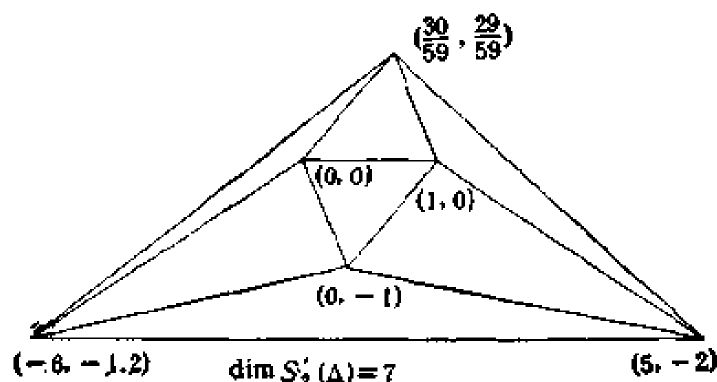


图 2.42

事实上，只要 Morgan-Scott 剖分 Δ(见图 2.43)满足

$$\begin{vmatrix} (A_5 - A_7)(A_5 - A_6) & (A_4 - A_2)(A_4 - A_1) \\ (A_5 - A_8)(A_5 - A_9) & (A_4 - A_3)(A_4 - A_9) \end{vmatrix} = 0,$$

就有 $\dim S_2^1(\Delta) = 7$。关于 Morgan-Scott 剖分的进一步讨论，请见第四章 § 1。

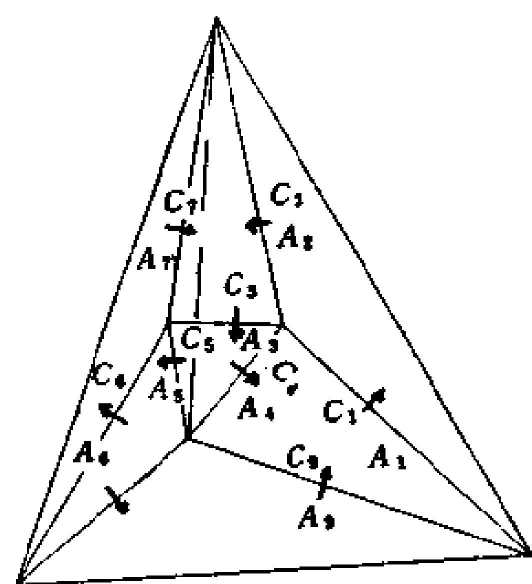


图 2.43

由上面的讨论，维数公式(2.146)应改进为

$$\dim S_2^1(\Delta) = 3 + \beta + \delta + \delta_q + \delta_s,$$

其中 δ_q 和 δ_s 分别表示拟奇异网点的个数和由奇异结构产生的维数。

关于奇异结构特征和性质还有待于进一步研究。

第三章　研究多元样条的其它方法

虽然目前有多种方法研究多元样条，但在总体上讲，他们可分为三类。除本书着重讨论的光滑余因子协调法外，还包括本节将要介绍的 B 网方法和 B 样条法。B 网方法用于任意单纯形剖分上样条的研究。而 B 样条法主要用来研究多面体样条。每种方法都有十分丰富的结果，此处我们将介绍它们中的一些主要结果。

§1. B 样 条 法

B 样条法又称为投影子法。它起源于 Curry 和 Schoenberg 的关于一元样条的工作[45]，是一种定义 B 样条的几何直观方法。这种方法的本质是研究高维空间中的多面体(如立方体、单纯形等)在较低维空间投影的测度函数。一元 B 样条是由 Curry 和 Schoenberg[45] 1966 年引入的。1976 年 de Boor[16] 将其推广到多元样条。但这几种几何定义的推广不便于理论研究。直到便于研究的泛函数形式推广的出现，多元 B 样条的研究才开始活跃起来。其泛函数形式的推广有单纯形样条，Box 样条和锥样条等，分别由 Micchelli, de Boor-De Vore 和 Dahmen 等人给出。本节将介绍多元 B 样条的一些基本性质。其它结果可在 de Boor[46], Dahmen-Micchelli[47]及贾荣庆[48]等人的综述性文章中找到。

我们先回顾一下一元样条的定义及相关的性质。

记 $[t_0,\cdots,t_n]f(\cdot)$ 是 f 在节点 $x=t_i, 0\leqslant i\leqslant n$ 上的 n 阶差商，即 $[t_0,t_1]f(\cdot)=(f(t_1)-f(t_0))/(t_1-t_0)$，$[t_0,\cdots,t_n]f(\cdot)=([t_1,\cdots,t_n]f(\cdot)-[t_0,\cdots,t_{n-1}]f(\cdot))/(t_n-t_0)$，$n\geqslant 2$。在不致引起混淆时，$f$ 的 n 阶差商也记作 $[t_0,\cdots,t_n]f$。

以 $t_i, 0\leqslant i\leqslant n$ 为结点的一元 B 样条，定义为

$$M(t|t_0,\cdots t_n)=n[t_0,\cdots,t_n](\cdot-t)_+^{n-1},\qquad(3.1)$$

式中 x_+是 x 的截断函数,即当 $x\geqslant 0$, 那么 $x_+=x$, 否则 $x_+=0$。

当 f 充分光滑时, f 的带积分型余项的 Taylor 展开式为

$$f(t)=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{f^{(i)}(t_0)}{i!}(t-t_0)^i+\frac{1}{(n-1)!}\cdot\int_{t_0}^{t_n}f^{(n)}(x)(t-x)_+^{n-1}dx,$$

故有

$$[t_0,\cdots,t_n]f=\frac{1}{n!}\int_{t_0}^{t_n}f^{(n)}(x)n[t_0,\cdots,t_n](\cdot-x)_+^{n-1}dx$$

$$=\frac{1}{n!}\int_{t_0}^{t_n}f^{(n)}(x)M(x|t_0,\cdots,t_n)dx.\qquad(3.2)$$

记

$$S^n=\left\{(u_1,\cdots,u_n)\middle|\sum_{i=1}^{n}u_i\leqslant 1,u_i\geqslant 0,1\leqslant i\leqslant n\right\}$$

为标准 n-单纯形,则有著名的 Hermite-Gennochi 公式

$$[t_0,\cdots,t_n]f=\int_{S^n}f^{(n)}\left(\sum_{i=0}^{n}t_iu_i\right)du_1\cdots du_n,\qquad(3.3)$$

其中 $u_0=1-\sum_{i=1}^{n}u_i$。

由(3.2)和(3.3)可得到一元 B 样条的另一个定义。

$$\int_{\mathbf{R}}M(t|t_0,\cdots t_n)f(t)dt$$

$$=n!\int_{S^n}f\left(\sum_{i=0}^{n}t_iu_i\right)du_1\cdots du_n,\ \forall f\in C_0(\mathbf{R}),\qquad(3.4)$$

其中 $C_0(\mathbf{R})$ 为定义在 $\mathbf{R}$ 上的具有有限支集的连续函数全体。

Curry-Schoenberg 就 (3.4) 式给出了一元 B 样条的一种几何解释([45])。

设 n- 单纯形 σ 顶点 w_i 的第一个分量是 t_i，$0 \leqslant i \leqslant n$，则

$$M(t|t_0, \cdots, t_n) = \frac{\mathrm{vol}_{n-1}\{w \in \sigma | w^{(1)} = t\}}{\mathrm{vol}_n \sigma}, \qquad (3.5)$$

式中 $w^{(1)}$ 表示 w 的第一个分量，vol_i 为 $\mathbf{R}^i$ 中的 Lebesgue 测度。如无特别说明，测度均指 Lebesgue 测度。

(3.5) 表明 $M(t|t_0, \cdots, t_n)$ 恰好是超平面 $w^{(1)} = t$ 与 σ 的截面面积与 σ 自身体积的比值。

de Boor ([16]) 首先将 (3.5) 推广到高维情况。设 σ 是 n-单纯形。$u \in \sigma$ 的前 s 个分量记为 $u^{(s)}$。则 $n-s$ 元多元 B 样条定义为

$$M_\sigma(x) = \mathrm{vol}_{n-s}\{u \in \sigma | u^{(s)} = x\}.$$

但这种推广，不便于多元 B 样条的理论研究。为便于理论研究，将 (3.4) 推广到多元 B 样条。

定义 3.1 可重集合定义为允许存在相同元素的某些事物的全体。

由可重集合的定义，通常意义的集合都是可重集合。反之不然，比如 $\{3,5,5\}$ 是可重集合，但它不是通常意义下的集合。

设可重集合 $V = \{v_i, 1 \leqslant i \leqslant n\} \subset \mathbf{R}^s$，使得

$$\mathrm{span} V = \mathbf{R}^s \qquad (3.6)$$

多元 B—样条 $M_w(x|V)$ 定义为([37])

$$\int_{\mathbf{R}^s} M_w(x|V) f(x) dx = \int_Q w(t) f\left(\sum_{i=1}^n t_i v_i\right) dt, f \in C_0(\mathbf{R}^s), \qquad (3.7)$$

其中 $dt = dt_1 \cdots dt_n$，Q 是 $\mathbf{R}^n$ 中的凸域。

当 B 样条允许为广义函数时，条件 (3.6) 可去掉。此时 M_w 的支集位于某个超平面上。(3.7) 与 [47] 中给出的定义略有不同，在 [47] 中 (3.7) 右端的积分区域是全空间 $\mathbf{R}^n$。但二者是等价的。写成 (3.7) 的形式是为了避免 $w(y)$ 中带有区域的特征函数。

在(3.7)中，取

$$w(y)=n!,$$
$$Q=S^n,$$

S^n 为上面定义的标准单纯形则(3.7)转化为

$$\int_{\mathbb{R}^s} f(\boldsymbol{x})M_w(\boldsymbol{x}|V)d\boldsymbol{x}$$
$$=n!\int_{S^n} f\left(\sum_{i=1}^{n} t_i\boldsymbol{v}_i\right)dt, f\in C(\mathbb{R}^s). \qquad (3.8)$$

由此定义的 B 样条就是 Micchelli[49]引入的单纯形样条。注意，这里 f 的取值空间扩大了，这是由于 S^n 是有界域，f 支集有界的限制可取消。习惯上，将单纯形样条记为 $M(\boldsymbol{x}|V)$。

如取

$$w(y)=1,$$
$$Q=\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^n,$$

且要求 $\boldsymbol{0}\bar{\in}V$，则(3.7)变为

$$\int_{\mathbb{R}^s} M_w(\boldsymbol{x}|V)f(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}$$
$$=\int_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]^n} f\left(\sum_{i=1}^{n} t_i\boldsymbol{v}_i\right)dt, f\in C(\mathbb{R}^s), \qquad (3.9)$$

由(3.9)定义的 B 样条就是 de Boor-De Vore[50]引入的 Box 样条。此时，一般将 $M_w(\boldsymbol{x}|V)$ 记为 $B_V(\boldsymbol{x})$，在不致引起混淆的情况下，也记作 $B(\boldsymbol{x})$。同(3.8)一样，这里 f 的取值空间也变大了。

若在(3.7)中再取

$$w(y)=1,$$
$$Q=\mathbb{R}_+^n=\{\boldsymbol{x}=(x^{(1)},\cdots,x^{(n)})^T\in\mathbb{R}^n|x^{(i)}\geqslant 0, 1\leqslant i\leqslant n\},$$

并要求 $\boldsymbol{0}\bar{\in}V$，我们就可以得到由 Dahmen[51]定义的锥样条

$$\int_{\mathbb{R}^s} M_w(\boldsymbol{x}|V)f(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}$$
$$=\int_{\mathbb{R}_+^n} f\left(\sum_{i=1}^{n} t_i\boldsymbol{v}_i\right)dt, f\in C_0(\mathbb{R}^s). \qquad (3.10)$$

习惯上将锥样条记为 $T(\boldsymbol{x}|V)$.

当 $s=1$, $v_1=v_2=\cdots=v_n=1$ 时,

$$T(x|V)=\frac{x_+^{n-1}}{(n-1)!},$$

即蜕化为一元截断幂函数. 因此 Dahmen 最初将 $T(\boldsymbol{x}|V)$ 称为多元截断幂 (truncated Power).

当然,我们还能定义各种各样的 B 样条. 但这里我们感兴趣的是由(3.8)—(3.10)定义的 B 样条. 这三种样条的性质很相似,其中尤以 Box 样条更具代表性. 所以我们侧重讨论 Box 样条的性质. 今后,如不特别声明,我们总假定 V 满足(3.6)式.

命题 3.2 Box 样条有如下基本性质:

(i) $\operatorname{supp} B=\left\{\sum_{i=1}^{n} t_i \boldsymbol{v}_i \,\middle|\, -\frac{1}{2} \leqslant t_i \leqslant \frac{1}{2}\right\}$,

(ii) $B \geqslant 0$ 且在 $\operatorname{supp} B$ 的内部大于零,

(iii) B 是次数 $\leqslant m:=n-s$ 的分片多项式,

(iv) B 是 μ 次光滑的, 这里 $\mu=\min\{n(V) | \operatorname{span} X \backslash V \neq \mathrm{R}^s\}-2$.

对上面性质 (iv) 我们作一点解释. 当 V 满足条件(3.6)时,显然 $\mu \geqslant -1$. 若 $\mu=-1$, 我们称 B 是 $\mu=-1$ 次光滑的,乃指 B 是分片连续函数.

证明 与(3.5)类似. 不难证明由(3.9)定义的 Box 样条 $B(\boldsymbol{x})$ 有如下的几何解释:

$$B(\boldsymbol{x})=\operatorname{vol}_{n-s}\left\{t \in\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^n ; \sum_{i=1}^{n} t_i \boldsymbol{v}_i=\boldsymbol{x}\right\}. \quad (3.11)$$

性质 (i) 和 (ii) 易从(3.11)中推出. 后两条性质留在稍后证明.

如果 V 恰好形成 R^s 的一个基底 (此时 $n=s$), 则 $B(\boldsymbol{x})$ 是区域 $\operatorname{supp} B$ 的标准特征函数,即

$$B(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{|\det V|}, & \text{如果存在} -\dfrac{1}{2}\leqslant t_i\leqslant\dfrac{1}{2}, \text{使得 } x=\sum\limits_{i=1}^{s} t_i v_i,\\ 0, & \text{其它。}\end{cases}\tag{3.12}$$

$B(x)$ 样条有许多与一元样条类似的性质。例如 K. Höllig[52] 将 Hermite-Genocchi 公式推广到了高维情况。

记 δ_w 是关于 w 的中心差分，即 $(\delta_w f)(x):=f(x+w/2)-f(x-w/2)$，$D_w$ 代表沿 w 的方向导数。

命题 3.3[52] 设 f 充分光滑，则有多元的 Hermite-Genocchi 公式

$$(B_V, D_V f)=(\delta_V f)(0),$$

其中 $(B_V, D_V f)=\int_{\mathbf{R}^s} B_V(x)D_V f(x)dx$，$D_V=\prod\limits_{v\in V} D_v$，且 $\delta_V=\prod\limits_{v\in V}\delta_v$。

证明 在(3.9)中取 $f(x)=\exp(-iy\cdot x)$，则得到 B_V 的 Fourier 变换。

$$\hat{B}_V(y)=\prod_{v\in V}\operatorname{sinc}\left(\frac{v\cdot y}{2}\right),\tag{3.13}$$

其中 $\operatorname{sinc}(t)=\sin t/t$。

设 $v\in V$，$D_v B$ 的 Fourier 变换为

$$\begin{aligned}\widehat{D_V B}(y)&=\int_{\mathbf{R}^s} D_v B(x)e^{-ix\cdot y}dx\\&=iv\cdot y\int_{\mathbf{R}^s} B(x)e^{-ix\cdot y}dx\\&=iv\cdot y\prod_{w\in V}\operatorname{sinc}\left(\frac{w\cdot y}{2}\right)\\&=2i\sin\frac{v\cdot y}{2}\prod_{w\in V\setminus v}\operatorname{sinc}\left(\frac{w\cdot y}{2}\right).\end{aligned}$$

若 $\operatorname{span}(V\setminus v)=\mathbf{R}^s$，再考虑 $\delta_v B_{V\setminus v}$ 的 Fourier 变换

$$\widehat{\delta_v B_{V\backslash v}}(y) = \int_{\mathbb{R}^s} \left(B_{V\backslash v}\left(x + \frac{v}{2}\right) - B_{V\backslash v}\left(x - \frac{v}{2}\right)\right) e^{-ix\cdot y} dx$$

$$= \left(e^{\frac{iv\cdot y}{2}} - e^{-\frac{iv\cdot y}{2}}\right)\int_{\mathbb{R}^s} B_{V\backslash v}(x) e^{-ix\cdot y} dx$$

$$= 2i \sin\frac{v\cdot y}{2} \prod_{w\in V\backslash v} \operatorname{sinc}\left(\frac{w\cdot y}{2}\right).$$

故此，当 $\operatorname{span}(V\backslash v) = \mathbb{R}^s$ 时，成立

$$D_v B_V = \delta_v B_{V\backslash v}.$$

更一般地，当 $W \subset V$ 使得 $\operatorname{span}(V\backslash W) = \mathbb{R}^s$ 时，我们有

$$D_W B_V = \delta_W B_{V\backslash W} \tag{3.14}$$

设 $W = \{w_i; 1 \leqslant i \leqslant s\} \subset V$ 恰好形成 $\mathbb{R}^s$ 的基底。由(3.14)得

$$\begin{aligned}(B_V, D_V f) &= (-1)^{n-s}(D_{V\backslash W} B_V, D_W f)\\ &= (-1)^{n-s}(\delta_{V\backslash W} B_W, D_W f)\\ &= (B_W, \delta_{V\backslash W} D_W f).\end{aligned} \tag{3.15}$$

注意，对任意的 $A \in \mathbb{R}^s$，成立

$$\begin{aligned}(B_W(x), D_W f(A + x)) &= \int_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]^s} D_W f\\ &\quad\cdot \left(A + \sum_{i=1}^{s} t_i w_i\right) dt_1 \cdots dt_s\\ &= \int_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]^{s-1}} dt_1 \cdots dt_{s-1}\\ &\quad\cdot \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} D_{w_s}(D_{W\backslash w_s}\\ &\quad\cdot f\left(A + \sum_{i=1}^{s} t_i w_i\right) dt_s\\ &= \int_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]^{s-1}} \delta_{w_s} D_{W\backslash w_s}\\ &\quad\cdot f\left(A + \sum_{i=1}^{s-1} t_i w_i\right) dt_1 \cdots dt_{s-1},\end{aligned}$$

重复上面的过程，我们有

$$(B_W(x), D_W f(A+x)) = \delta_W f(A),$$

将上式代入(3.15)中，即可得到 Hermite-Genocchi 公式。□

从目前结果看，Box 样条是将 Hermite-Genocchi 公式推广到多元情况的最好 B—样条。

现在我们来证命题 3.2 中的 iii)和 iv)。为此需先证明下面的结果。

命题 3.4[32] Box 样条有如下的卷积公式。

$$B_V * B_W = B_{V\cup W}.$$

证明 由(3.13)得

$$\begin{aligned}\widehat{B_V * B_W}(y) &= \widehat{B_V}\widehat{B_W} \\ &= \prod_{v\in V\cup W} \sin c\left(\frac{v\cdot y}{2}\right) \\ &= \widehat{B}_{V\cup W}(y).\end{aligned}$$

即命题 3.4 成立。

不难看出，

$$B_{V\cup w}(x) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} B_V(x+tw)dt \tag{3.16}$$

是命题 3.4 的特殊情况。

由(3.12)和(3.16)，命题 3.2 中性质 iii)可由对 V 中元素的个数 $n(V)$ 所采用的归纳法而证明。

为证性质 iv)，我们还需先证明

引理 3.5 设 μ 如命题 3.2 所定义且 $0\leqslant\gamma\leqslant\mu+1$，则对任何向量 $y\in\mathbf{R}^n$ 都存在常数 a_W，使得

$$D_y^\gamma B_V = \sum_{W\subset V, n(W)=\gamma} a_W D_W B_V.$$

证明 若 $\mu=-1$，由性质(iii)，B_V 是分片多项式，从而是分片连续的。以下假设 $\mu\geqslant 0$，并对 γ 用数学归纳法。当 $\gamma=1$ 时，引理 3.5 显然成立。假设引理 3.5 当 $\gamma\leqslant m\leqslant\mu$ 时成立。往证当 $\gamma=m+1$ 时亦然。事实上，若 $n(W)=m<\mu+1$，由 μ 的

定义,知 $\text{span}(V\backslash W)=\mathbb{R}^s$. 故存在常数 a_v,使得

$$y=\sum_{v\in V\backslash W} v a_v.$$

再由归纳法假设,即得

$$\begin{aligned}
D_y^{m+1}B_V &= D_y D_y^m B_V \\
&= D_y\Big(\sum_{W\subset V,\,n(W)=m}\bar{a}_W D_W B_V\Big) \\
&= \sum_{W\subset V,\,n(W)=m}\bar{a}_W D_y D_W B_V \\
&= \sum_{W\subset V,\,n(W)=m}\bar{a}_W \sum_{v\in V\backslash W} a_v D_{W\cup v} B_V \\
&= \sum_{W\subset V,\,n(W)=m+1} a_W D_W B_V.
\end{aligned}$$

至此完成了引理 3.5 的证明. □

在引理 3.5 中取 $r=\mu+1$,利用(3.14), 可推知 B_V 在任何方向上的 $\mu+1$ 阶方向导数都是有界的, 从而 B_V 有 μ 阶光滑度, 即性质(iv)成立.

其它的 B 样条也有命题 3.2 中的四条性质,这里不再详述.

与一元 B 样条一样, 多元 B 样条也有递推关系. 我们先给出 Box 样条的递推关系式.

定理 3.6[53] 如果 Box 样条 $B_{V\backslash v}, v\in V$ 都在点 $x=\sum_{i=1}^{n} t_i v_i$ 处连续,则

$$(n-s)B_V(x)=\sum_{i=1}^{n}\Big[\Big(\frac{1}{2}+t_i\Big)B_{V\backslash v_i}\Big(x+\frac{v_i}{2}\Big) + \Big(\frac{1}{2}-t_i\Big)B_{V\backslash v_i}\Big(x-\frac{v_i}{2}\Big)\Big].$$

注: 当 $\text{span}(V\backslash v_i)\neq \mathbb{R}^s$ 时, 我们可将 $B_{V\backslash v_i}$ 看做由(3.6)定义的广义函数, 并将上式理解为分布意义下的等式. 但这里我们总假设 $\text{span}(V\backslash v_i)=\mathbb{R}^s$, $v_i\in V$.

定理 3.6 的证明 记 $\boldsymbol{x}$ 的第 i 个分量为 x_i，由(3.14)，

$$\sum_{i=1}^{s} x_i \frac{\partial}{\partial x_i} B_V(\boldsymbol{x}) = D_{\boldsymbol{x}} B_V(\boldsymbol{x})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} t_i \left[B_{V\setminus v_i}\left(\boldsymbol{x} + \frac{\boldsymbol{v}_i}{2} \right) - B_{V\setminus v_i}\left(\boldsymbol{x} - \frac{\boldsymbol{v}_i}{2} \right) \right].$$

所以，定理 3.6 中等式的右端等于

$$\sum_{i=1}^{s} x_i \frac{\partial}{\partial x_i} B_V(\boldsymbol{x}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \left[B_{V\setminus v_i}\left(\boldsymbol{x} - \frac{\boldsymbol{v}_i}{2} \right) \right.$$

$$\left. + B_{V\setminus v_i}\left(\boldsymbol{x} - \frac{\boldsymbol{v}_i}{2} \right) \right].$$

上式的 Fourier 变换等于

$$\sum_{i=1}^{s} \int_{\mathbb{R}^s} x_i \frac{\partial}{\partial x_i} B_V(\boldsymbol{x}) e^{-i\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}} d\boldsymbol{x} + \sum_{i=1}^{n} \cos \frac{\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{v}_i}{2} B_{V\setminus v_i}(\boldsymbol{y})$$

$$= -\sum_{j=1}^{s} \int_{\mathbb{R}^s} B_V(\boldsymbol{x})(1 - x_j y_j i) e^{-i\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}} d\boldsymbol{x}$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \cos \frac{\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{v}_j}{2} \widehat{B}_{V\setminus v_j}(\boldsymbol{y})$$

$$= -s\widehat{B}_V(\boldsymbol{y}) - \sum_{j=1}^{s} y_j \frac{\partial}{\partial y_j} \widehat{B}_V(\boldsymbol{y})$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \cos \frac{\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{v}_j}{2} \widehat{B}_{V\setminus v_j}(\boldsymbol{y}).$$

通过直接计算，并注意(3.13)式，上式等于 $(n-s)\widehat{B}_V(\boldsymbol{y})$。这正是定理 3.6 中等式左端的 Fourier 变换。这就完成了定理 3.6 的证明。 □

其它 B 样条也有递推关系。这可归结为下面的结论。

定理 3.7[[51],[53]] 单纯形样条 $M(\boldsymbol{x}|V)$ 和锥样条 $T(\boldsymbol{x}|V)$ 分别有如下的递推关系：

i) 设 $x=\sum_{i=1}^{n} t_i v_i$，$\sum_{i=1}^{n} t_i=1$，则有

$$M(x|V)=\frac{n}{n-s}\sum_{i=1}^{n} t_i M(x|V\backslash v_i),$$

$$M(x|V)=n\int_1^{\infty} t^{-n+s-1}M((1-t)v+t\cdot v|V\backslash v),$$

上式中 $v_i, v\in V$。

ii) 若 $x=\sum_{i=1}^{n} t_i v_i$，则有

$$T(x|V)=\frac{1}{n-s}\sum_{i=1}^{n} t_i T(x|V\backslash v_i),$$

$$T(x|V)=\int_0^{\infty} T(x-tv|V\backslash v)dt, v\in V.$$

定理 3.7 的证明请见([47])，这里不拟给出．除递推公式外，多元 B 样条还有如下的求导公式．

定理 3.8([51],[53],[54]) 光滑的 Box 样条，单纯形样条和锥样条分别有如下的求导公式，

$$D_y B_V(x)=\sum_{i=1}^{n} t_i \delta_{v_i} B_{V\backslash v_i}(x), \quad y=\sum_{i=1}^{n} t_i v_i;$$

$$D_y T(x|V)=\sum_{i=1}^{n} t_i T(x|V\backslash v_i), y=\sum_{i=1}^{n} t_i v_i;$$

$$D_y M(x|V)=n\sum_{i=1}^{n} t_i M(x|V\backslash v_i), y=\sum_{i=1}^{n} t_i v_i, \sum_{i=1}^{n} t_i=0.$$

Box 样条的求导公式可由(3.14)式推出．其它两个公式也可类似地得到，详细证明请见[52]和[57]。此外，Dahmen-Micchelli[57] 引入了离散锥样条，Dahmen-Micchelli[55] 和 Cohen-Lyche-Riesenfeld[56] 彼此独立地引进了离散 Box 样条．其出发点乃是为了在计算机辅助几何设计中利用重分算法(subdivision olyorithm)生成曲面。 Dahmen-Micchelli[57],[58] 建立了离散 B 样条与线性丢番

图方程解的个数之间的联系，从而使得离散 B 样条可应用于组合计数的问题上去.

设 $V\subset \mathbf{Z}^s$，离散锥样条定义为满足以下条件的 s 元序列 $t(\cdot|V):\mathbf{Z}^s\longmapsto \mathbf{R}$:

$$\sum_{j\in \mathbf{Z}^s} t(j|V)\varphi(j) = \sum_{\alpha\in \mathbf{Z}^n_+} \varphi(V\alpha),$$

其中 $\varphi:\mathbf{Z}^s\longmapsto \mathbf{R}$ 为支集有界映射.

设 $0\bar{\in} V\subset \mathbf{Z}^s$，$h>0$，$h^{-1}$ 是整数. Dahmen-Micchelli 将离散箱样条 $b_h(\cdot|V)$ 定义为从 $h\mathbf{Z}^s$ 到 $\mathbf{R}$ 的满足以下条件的函数:

$$h^s \sum_{j\in h\mathbf{Z}^s} \varphi(j) b_h(j|V) = h^n \sum_{\alpha\in(\mathbf{Z}\cap[0,h^{-1}))^n} \varphi(hV\alpha),$$

其中 $\varphi:\mathbf{Z}^s\longmapsto \mathbf{R}$ 是任意具有有限支集的函数.

离散 B—样条的研究详见[47]、[55]及[56]. 这里只开列出一些基本性质以及它们与连续 B—样条之间的关系.

定理 3.9 $T(x|V) = \sum_{j\in \mathbf{Z}^s} t(j|V)B(x-j-v_0|V)$,

$$B(x-v_0|V) = (-1)^n \delta_V T(x|V),$$

其中 $v_0 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} v_i$，$0\bar{\in} V$.

我们在研究插值与逼近问题时，总是针对某个空间，比如线性空间，来考虑问题. 所以为使得多元 B 样条成为研究这个问题的工具，我们必须考虑其平移所产生的线性空间. 以下我们总假定 $V\subset \mathbf{Z}^s$.

定义 3.10 多元主样条空间 S_V 定义为

$$S_V := \mathrm{span}\{B_V(\cdot - j) \mid j\in \mathbf{Z}^s\}.$$

关于空间 S_V，首先遇到的问题是: $B_V(\cdot - j)$，$j\in \mathbf{Z}^s$ 是否线性无关? 亦即，设 $a:\mathbf{Z}^s\longmapsto \mathbf{R}$ 满足

$$\sum_{j\in \mathbf{Z}^s} a_j B_V(\cdot - j) = 0,$$

是否必有 $a=0$?下面的定理回答了这个问题。

定理 3.11 $\{B_V(\cdot-j), j\in \mathbf{Z}^s\}$ 是线性无关的充要条件是:对于任何满足条件 $\mathrm{span}W=\mathbf{R}^s$ 的 $W\subset V$,如果W中恰有 s 个元素,都有$|\det W|=1$. 我们称这样的V是幺模的(unimodular).

这个定理的必要性属于 de Boor-Höllig[53],而其充分性分别由 Jia[59] 和 Dahmen-Micchelli[60] 互相独立地得到。

用反证法证明定理3.11 的必要性,若存在$W\subset V$使得$|\det W|>1$,则由W生成的格

$$\Lambda=\left\{\sum_{v\in W} vj_v \,\middle|\, j\in \mathbf{Z}^s\right\}$$

是 $\mathbf{Z}^s$ 的真子格,由(3.12),对任意商群 $\mathbf{Z}^s/\Lambda$ 中的元素k,都有

$$\sum_{j\in\Lambda} B_W(\cdot-j-k)=\frac{1}{|\det W|}. \tag{3.17}$$

利用(3.16),在上式中将左端中的W换成 V,等式依然成立。在 $\mathbf{Z}^s/\Lambda$ 中任取两个元素 k_1 和 k_2,则有

$$\sum_{j\in\Lambda}\left(B_V(\cdot-j-k_1)-B_V(\cdot-j-k_2)\right)=0,$$

即 $\{B_V(\cdot-j)|j\in \mathbf{Z}^s\}$ 线性相关.

我们对V中元素的个数用归纳法证明定理 3.11 的充分性,若$n(V)=s$,则 $B_V(\cdot-j), j\in\mathbf{Z}^s$ 的支集两两内部不交(这点可由(3.12)看出)。从而它们是线性无关的. 假设定理 3.11 对所有元素个数小于V的 V' 都成立,往证对V也成立. 不失一般性,设V中含有 $\mathbf{R}^s$ 的标准单位正交基 $e_1,\cdots,e_s$. 否则,设W是 $\mathbf{R}^s$ 的基,因V是幺模的,故有 $|\det W|=1$,从而 $W^{-1}V$ 也是幺模的. 即通过变量代换,W变为一个新坐标系下的标准单位正交基。

若

$$f:=\sum_{j\in\mathbf{Z}^s} a_j B_V(\cdot-j)=0. \tag{3.18}$$

往证 $a_j=0, j\in\mathbf{Z}^s$.

由(3.14),易证当$W\subset V$时,

$$D_W\left(\sum_{j\in Z^s}a_jB_V(\cdot-j)\right)=\sum_{j\in Z^s}\delta_Wa_jB_{V\setminus W}(\cdot-j+\zeta_W),\tag{3.19}$$

其中 $\delta_w a_j=a_j-a_{j-w}$, $\delta_W=\prod_{w\in W}\delta_w,\zeta_W=\frac{1}{2}\sum_{v\in W}v$.

在(3.19)中,特别取 $W=e_1$,有

$$0=D_{e_1}f=\sum_{j\in Z^s}\delta_{e_1}a_jB_{V\setminus e_1}\left(\cdot-j+\frac{e_1}{2}\right).\tag{3.20}$$

若 $\text{span}(V\setminus e_1)=R^s$, 因 $V\setminus e_1$ 也是幺模的,由归纳法假设,得

$$\delta_{e_1}a_j=0,\ j\in Z^s.\tag{3.21}$$

若 $\text{span}(V\setminus e_1)\neq R^s$, 即所有 $V\setminus e_1$ 中元素的第一个分量都是零. 将 $v\in V\setminus e_1$ 的后 $s-1$ 个分量记为 v', 易知 $V'=\{v',v\in V\setminus e_1\}$在 R^{s-1} 中也是幺模的. 且 $n(V')<n(V)$.

设 $B_{e_1}(x)$ 是由 e_1 确定的一元 B—样条(即 $B_{e_1}(x)=1$,如果$-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$, 其它处为零). $B_{V'}(y)$是由 V' 确定的 $s-1$ 元 Box 样条. 利用(3.13)式,易证

$$B_V(x,y)=B_{e_1}(x)B_{V'}(y),\tag{3.22}$$

其中 $x\in R$, $y\in R^{s-1}$.

若 B_V 和 a 满足(3.18),取 $x=j_1$,并利用(3.22)式,得

$$\sum_{j\in Z^{s-1}}a_{j_1,j}B_{V'}(\cdot-j)=0,j_1\in Z.$$

由归纳假设,上式等价于

$$a_j=0,\ j\in Z^s.\tag{3.23}$$

如果对所有 e_i, $1\leqslant i\leqslant s$, 都有 $\text{span}(V\setminus e_i)=R^s$. (3.21)表明

$$\delta_{e_i}a_j=0,1\leqslant i\leqslant s,j\in Z^s.$$

上式等价于所有 a_j 都为同一常数. 从(3.17)式知,该常数为零. 由 (3.17) 式我们还可得到 Box 样条的单位分解(假定V是幺模

的）

$$\sum_{j\in Z^s} B_V(\cdot - j) = 1 \tag{3.24}$$

下面我们将给出一些逼近阶方面的结果。

记 S_V^h 是"收缩"主样条空间（"Scaled" Cardinal Spline Space)，即 $f\in S_V^h$ 的充要条件是 $f(hx)\in S_V$。S_V 的逼近阶定义为

$$\max\{r \mid \mathrm{dist}(f,S_V^h) = O(h^r)\},$$

其中 f 是充分光滑的函数，$\mathrm{dist}(f,S_V^h)$ 是 f 到空间 S_V^h 的距离。

de Boor 与 Höllig，Dahmen 与 Micchelli，Jia 及 Fix 与 Strang 等人都在这方面作了许多工作，这里只简述一些结果。

定理 3.12 记 P_m 为次数 $\leqslant m$ 的多项式空间，$\mathrm{P} = \bigcup_m \mathrm{P}_m$。又设 V^* 是由 V 中所有使得 $\mathrm{span}(V\backslash W) = \mathbf{R}^s$ 的子集 W 所成的集合，则有

$$\mathrm{P}\cap S_V = \bigcap_{W\in V^*} \mathrm{Ker} D_W.$$

该定理由 de Boor 与 Höllig 给出[52]。由定理3.12可得到

推论 3.13 若 $\mathrm{P}_k\subset S_V$，则 $k\geqslant \mu+1$，这里 μ 由命题 3.2 所定义。同时有 $\mathrm{P}_{\mu+1}\subset S_V$。

de Boor-Höllig[63]利用定理 3.12 得到了 S_V 的逼近阶。

定理 3.14 S_V 的逼近阶是 $\mu+2$。

关于逼近阶，[52]中有较详细的介绍。

上面介绍了主样条空间 S_V 的逼近阶。它是通过构造 S_V 的"收缩"空间 S_V^h 来实现逼近目标函数的，其在本质上是通过加细区域来逼近目标函数。通过增加样条的次数是否也可以达到上述目的? Schoenberg[61] 曾证明：存在次数 $\leqslant n$ 的一元主样条序列 $S_n, n\to\infty$ 收敛到 $f\in L_2(\mathbf{R})$ 的充要条件是，f 是整函数且 f 的 Fourier 变换 $\hat{f}$ 在区间 $[-\pi,\pi]$ 之外几乎处处为零。多元的情况更为复杂。de Boor-Höllig-Riemenschneider[62]得到了下面的定理。

定理 3.15 设 mV 是由 m 个 V 组成的可重集合，定义

$$\Omega_V = \{x; |\widehat{B_V}(x+2\pi j)| < \widehat{B_V}(x), j \neq 0\},$$

则存在主样条序列

$$S_m = \sum_j a_{n,j} B_{mV}(\cdot - j), a_n \in l^2(\mathbf{Z}^s)$$

收敛到 $f \in L_2(\mathbf{R}^s)$ 的充要条件是 f 的 Fourier 变换 $\hat{f}$ 在 Ω_V 的外部几乎处处为零.

推论 3.16 如果 $g_m = \sum_j B_{mV}(j)\exp(ij\cdot)$是恒正的，则对任意有界的函数 f，存在唯一的有界样条 $\mathrm{I}mf \in S_{mV}$，使得

$$\mathrm{I}mf(k) = f(k), k \in \mathbf{Z}^s.$$

如果还有 $f \in L_2(\mathbf{R}^s)$，及 $\mathrm{supp}\hat{f} \subset \Omega_V$，则有

$$\|f - \mathrm{I}mf\|_2 \to 0, m \to \infty,$$

上面的结果是定理 3.15 的推论，详细证明请见[52].

特殊规则剖分下样条空间逼近阶的研究，目前大多集中在以整点为顶点的 1-型和 2-型三角剖分$\triangle^{(1)}$和$\triangle^{(2)}$上.

de Boor-Höllig ([63])最早指出 $S_3^1(\Delta^{(1)})$ 的逼近阶是 3 而不是 4. 在[64]中，他们得到了 $S_k^r(\Delta^{(1)})$ 的逼近阶（记为 $m_l(k,r)$）的上界估计:

$$m_l(k,r) \leqslant \min\{2k-2r, k+1\}.$$

Jia 在[55]中证明了

$$m_l(k,r) \geqslant \min\{2k-2r, k+1\} - 2,$$

进一步，Jia ([66])证明上述下界估计是最佳的.

de Boor-Höllig[1]证明了当 $k \geqslant 3r+2$ 时 $m_l(k,r) = k+1$，并猜测当 $k < 3r+2$ 时，$m_l(k,r) \leqslant k$. Jia[2] 声称他已证实了这个猜测. 迄今为止，当 $2k-2r \leqslant 7$ 或 $k \geqslant 2r+2$ 时，$m_l(k,r)$

---

1) C. de Boor and K. Höllig, On the approximation order from smooth bivariate pp functions, ms.

2) R. Q. Jia, Approximation order from spaces of smooth bivariate splines on a three-direction mesh II, ms.

已被确定。特别地，当 $r \leqslant 5$ 时，对所有 k，$m_l(k,r)$ 已知，而当 $2k-3r>8$ 且 $k<2r+2$ 时，已知

$$m_l(k,r)=2k-2r-2 \text{ 或 } 2k-2r-1,$$

但至今还未找到 $m_l(k,r)=2k-2r-1$ 的例子。

关于 $\Delta^{(2)}$ 的逼近阶的结果目前不多，请见[66]和[67]。

除上面介绍的多元 B 样条外，A. Ron, Dahmen, Micchelli 等人还引入了 E 样条（exponential cube spline），并研究了它的性质。E—样条定义 $E_\mu(\boldsymbol{x}|V)$ 如下：

$$\int_{\mathbb{R}^s} f(\boldsymbol{x})E_\mu(\boldsymbol{x}|V)=\int_{[0,1]^n} e^{-\mu\cdot t} f\left(\sum_{i=1}^{n} t_i\boldsymbol{v}_i\right)dt \quad f\in C(\mathbb{R}^s).$$

关于这方面的结果详见[47]和[68]。

§2. B 网方法

B 网方法的研究起源于 Bernstein 多项式。Bernstein 多项式以其独特的结构并成功地用于 Weierstrass 逼近定理的构造性证明中而受到人们的广泛关注。它的各种推广形式也随之出现，其中也包括在物体外形设计中常用的乘积型区域和三角域上的推广。Bernstein 多项式的许多性质都可以在 G. G. Lorentz, 的名著 “Bernstein Polynomials”[69] 中找到。后人(如 P. de Casteljau, P. Bézier 及 S. Coons 等）为设计物体外形构造曲面片又重新发展了乘积型区域和三角域上的 Bernstein 多项式理论。由于历史的原因，现在许多名词和术语都冠以 Bézier 的名字，尽管他本人只考虑过乘积形的 Bernstein 多项式。这里我们也将沿用这些名词和术语。

将 Bernstein 多项式用于多元样条理论的研究，当首推 G. Farin 于 1980 年完成的博士论文中的工作。G. Farin 在其博士论文中考虑了多元样条的 Bézier 坐标和光滑性之间的关系，从而使 B 网方法成为研究多元样条的重要方法之一。de Boor, Höllig

等人对 B 网方法的发展起过重要的作用. 此外,中国学者苏步清、刘鼎元、郭竹瑞、贾荣庆、常庚哲、冯玉瑜等人也做了许多有意义的工作.

我们这里主要介绍二元的 B 网方法并只介绍其基本性质. 有兴趣的读者可参阅 de Boor[70]、Farin [71] 及郭竹瑞、贾荣庆[72]的综述性文章.

设 v_i, $1 \leqslant i \leqslant 3$ 是三角形 σ 按逆时针排列的顶点. 则任意 $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^2$ 可表示为

$$\boldsymbol{x} = \tau_1 \boldsymbol{v}_1 + \tau_2 \boldsymbol{v}_2 + \tau_3 \boldsymbol{v}_3, \tag{3.25}$$

其中 $\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 1$, 并不难得到

$$\tau_1 = \frac{\det(\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}_3 - \boldsymbol{x})}{\det(\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_3 - \boldsymbol{v}_1)}, \quad \tau_2 = \frac{\det(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}_3 - \boldsymbol{x})}{\det(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 - \boldsymbol{v}_2)},$$

$$\tau_3 = \frac{\det(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{x})}{\det(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_3)}.$$

我们称(3.25)为 $\boldsymbol{x}$ 的面积坐标变换,也称为面积坐标表示.显然,这种表示是唯一的.

面积坐标变换具有仿射不变性,简称仿射不变性. 即,若仿射变换 $\Phi: \boldsymbol{x} = \tau_1 \boldsymbol{v}_1 + \tau_2 \boldsymbol{v}_2 + \tau_3 \boldsymbol{v}_3 \to \Phi(\boldsymbol{x}) = \bar{\tau}_1 \Phi(\boldsymbol{v}_1) + \bar{\tau}_2 \Phi(\boldsymbol{v}_2) + \bar{\tau}_3 \Phi(\boldsymbol{v}_3)$, 则有

$$(\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2, \bar{\tau}_3) = (\tau_1, \tau_2, \tau_3).$$

事实上,设 $\Phi: \boldsymbol{x} \to A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$, 则

$$\Phi(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b} = A \sum_{i=1}^{3} \tau_i \boldsymbol{v}_i + \boldsymbol{b} = \sum_{i=1}^{3} \tau_i (A\boldsymbol{v}_i + \boldsymbol{b}).$$

由面积坐标表示的唯一性,便得到上述结论. 这个结果是G.Farin 在[71]中给出的.

命题 3.17 设 $\boldsymbol{x}_i$ 关于三角形 $\sigma = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3]$ 的面积坐标是 $(\tau_1^{(i)}, \tau_2^{(i)}, \tau_3^{(i)})$, 则

$$\det(\boldsymbol{x}_3 - \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1) = \det W \det(\boldsymbol{v}_3 - \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1),$$

其中

$$W=\begin{pmatrix}\tau_1^{(1)} & \tau_1^{(2)} & \tau_1^{(3)}\\ \tau_2^{(1)} & \tau_2^{(2)} & \tau_2^{(3)}\\ \tau_3^{(1)} & \tau_3^{(2)} & \tau_3^{(3)}\end{pmatrix}.$$

证明 设 $\bar{x}_i=(1,x_i^T)^T$，$\bar{v}_i=(1,v_i^T)^T$. 由

$$x_i=\sum_{j=1}^{3}\tau_j^{(i)}v_j,$$

及

$$\tau_1^{(i)}+\tau_2^{(i)}+\tau_3^{(i)}=1,\quad 1\leqslant i\leqslant 3,$$

得

$$(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3)=W(\bar{v}_1,\bar{v}_2,\bar{v}_3).$$

故得

$$\begin{aligned}\det(x_2-x_1,x_3-x_1)&=\det(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3)\\&=\det W\det(\bar{v}_1,\bar{v}_2,\bar{v}_3)\\&=\det W\det(v_2-v_1,v_3-v_1).\end{aligned}\qquad\square$$

以面积坐标为函数的自变量，相当于用三个相关的变量代替两个独立的变量，所以我们要考虑变换前与变换后、函数的偏导数之间的关系，下面的公式是容易得到的.

$$D_{v_j-v_i}\tau_k=\begin{cases}1, & \text{如果 } j=k,\\ -1, & \text{如果 } i=k,\\ 0, & \text{其它.}\end{cases}\tag{3.26}$$

设 $y=x_2-x_1$，x_i 的面积坐标为 $\tau^{(i)}=(\tau_1^{(i)},\tau_2^{(i)},\tau_3^{(i)})$，$i=1,2$，并记 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\tau^{(2)}-\tau^{(1)}$. 函数 $f(x)$ 的自变量 x 用面积坐标 τ 替换后得到的函数仍记作 $f(\tau)$. 注意 $x_2-x_1=\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+\alpha_3v_3=\alpha_2(v_2-v_1)+\alpha_3(v_3-v_1)$，我们有

$$\begin{aligned}D_yf(x)=D_{x_2-x_1}f(x)&=\alpha_2\frac{\partial f(x)}{\partial(v_2-v_1)}+\alpha_3\frac{\partial f(x)}{\partial(v_3-v_1)}\\&=\alpha_2\frac{\partial f(\tau)}{\partial(v_2-v_1)}+\alpha_3\frac{\partial f(\tau)}{\partial(v_3-v_1)}\\&=\alpha_2\Big(\frac{\partial f(\tau)}{\partial\tau_1}\frac{\partial\tau_1}{\partial(v_2-v_1)}\end{aligned}$$

$$+\frac{\partial f(\boldsymbol{\tau})}{\partial \tau_2}\frac{\partial \tau_2}{\partial(\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1)}$$

$$+\frac{\partial f(\boldsymbol{\tau})}{\partial \tau_3}\frac{\partial \tau_3}{\partial(\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1)}\Big)$$

$$+\alpha_3\Big(\frac{\partial f(\boldsymbol{\tau})}{\partial \tau_1}\frac{\partial \tau_1}{\partial(\boldsymbol{v}_3-\boldsymbol{v}_1)}$$

$$+\frac{\partial f(\boldsymbol{\tau})}{\partial \tau_2}\frac{\partial \tau_2}{\partial(\boldsymbol{v}_3-\boldsymbol{v}_1)}$$

$$+\frac{\partial f(\boldsymbol{\tau})}{\partial \tau_3}\frac{\partial \tau_3}{\partial(\boldsymbol{v}_3-\boldsymbol{v}_1)}\Big)$$

$$=\alpha_1\frac{\partial f(\boldsymbol{\tau})}{\partial \tau_1}+\alpha_2\frac{\partial f(\boldsymbol{\tau})}{\partial \tau_2}+\alpha_3\frac{\partial f(\boldsymbol{\tau})}{\partial \tau_3},$$

即当 $|\boldsymbol{\alpha}|=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0$ 时，有

$$D_{\boldsymbol{y}}f(\boldsymbol{x})=D_{\alpha}f(\boldsymbol{\tau}), \tag{3.27}$$

其中 $\boldsymbol{y}=\alpha_1\boldsymbol{v}_1+\alpha_2\boldsymbol{v}_2+\alpha_3\boldsymbol{v}_3$, $\boldsymbol{x}=\tau_1\boldsymbol{v}_1+\tau_2\boldsymbol{v}_2+\tau_3\boldsymbol{v}_3$ 及 $\tau_1+\tau_2+\tau_3=1$.

为叙述下面的结果，我们还需引入一些记号. 除用 $|\boldsymbol{\alpha}|=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$ 表示向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的长度外，当 $\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in \mathbf{Z}_+^3$ 时，$\boldsymbol{\tau}^{\boldsymbol{\lambda}}:=\tau_1^{\lambda_1}\tau_2^{\lambda_2}\tau_3^{\lambda_3}$ 代表多重幂，而 $\boldsymbol{\lambda}!:=\lambda_1!\lambda_2!\lambda_3!$ 表示多重阶乘.

n 次 Bernstein 多项式定义为

$$B_{\boldsymbol{\lambda}}^n(\boldsymbol{\tau})=\frac{n!}{\boldsymbol{\lambda}!}\boldsymbol{\tau}^{\boldsymbol{\lambda}}=\frac{n!}{\lambda_1!\lambda_2!\lambda_3!}\tau_1^{\lambda_1}\cdot\tau_2^{\lambda_2}\cdot\tau_3^{\lambda_3},\quad |\boldsymbol{\lambda}|=n, \tag{3.28}$$

其中 $\boldsymbol{\lambda}\in \mathbf{Z}_+^3$. 当 $\boldsymbol{\lambda}\notin \mathbf{Z}_+^3$ 时，$B_{\boldsymbol{\lambda}}^{(n)}(\tau)$ 定义为零.

Berstein 多项式满足下面基本性质

(i) $B_{\boldsymbol{\lambda}}^n(\tau)\geqslant 0$, 如果 $\boldsymbol{\tau}\in\sigma=[\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3]$. (3.29)

(ii) Bernstein 多项式具有单位分解性质，即

$$\sum_{|\boldsymbol{\lambda}|=n}B_{\boldsymbol{\lambda}}^n(\boldsymbol{\tau})=1. \tag{3.30}$$

(iii) $n(\{B_{\boldsymbol{\lambda}}^n(\tau)\mid|\boldsymbol{\lambda}|=n\})=\binom{n+2}{2}$, 且 $\{B_{\boldsymbol{\lambda}}^n(\tau)\mid|\boldsymbol{\lambda}|=$

$n\}$ 是多项式间 P_n 的基底. 这里 $n(A)$ 是集合 A 的元素个数.

iv) $B_\lambda^n(\tau)$ 在点 $\tau=\lambda/n$ 处取得唯一的极大值.

由性质 (iii), 任何多项式 $p\in\mathrm{P}_n$ 都可唯一地表示为

$$p(\tau)=\sum_{|\lambda|=n} b_\lambda B_\lambda^n(\tau), \tag{3.31}$$

其中系数 $\{b_\lambda\,|\,|\lambda|=n\}$ 称为 Bézier 坐标. 将插值于

$$\left\{\left(\frac{\lambda}{n},b_\lambda\right)\Big|\,|\lambda|=n\right\}$$

的分片线性函数可称为 p 关于 σ 的 Bézier 网或控制网. 而将(3.31)式称作多项式 p 的 Bernstein 多项式或 B—形式. 不难证明 Bézier 网与多项式之间是一一对应的.

从 Bézier 网中可以看出, 点集 $\left\{\frac{\lambda}{n}\Big|\,|\lambda|=n\right\}$具有特殊的地位,它也称作 Bézier 点. Bézier 点恰好是三角形 σ 上的 Lagrange 插值问题的适定结点组(见[71]). 事实上,记

$$L_\lambda^n(\tau)=\frac{n^n}{\lambda!}\prod_{r=0}^{\lambda_1-1}\prod_{s=0}^{\lambda_2-1}\prod_{t=0}^{\lambda_3-1}\left(\tau_1-\frac{r}{n}\right)\left(\tau_2-\frac{s}{n}\right)\left(\tau_3-\frac{t}{n}\right).$$

则 $L_\lambda^n(\tau)$ 显然满足

$$L_\lambda^n\left(\frac{\beta}{n}\right)=\delta_{\lambda,\beta},$$

这里 $\delta_{\lambda,\beta}$ 是 Kronecher 符号. 由上式不难得到, 任何一个 n 次多项式 $p\in\mathrm{P}_n$ 都可唯一地表成

$$p(\tau)=\sum_{|\lambda|=n} p\left(\frac{\lambda}{n}\right)L_\lambda^n(\tau),$$

即 Bézier 点 $\left\{\frac{\lambda}{n}\Big|\,|\lambda|=n\right\}$是适定结点组.

多项式的 Bézier 网表示具有很好的保形性. 具体地说, 有下面的定理:

定理 3.18 由(3.31)定义的多项式曲面 $\pi:=\{(\tau,p(\tau))\,|\,\tau\in\sigma\}$包含在 p 的 Bézier 网的凸包中.

证明 由凸包的定义，p 的 Bézier 网$\mathscr{B}$的凸包为

$$[\mathscr{B}]=\left\{\sum_{|\lambda|=n} t_\lambda\left(\frac{\lambda}{n},b_\lambda\right)\middle|\sum_{|\lambda|=n} t_\lambda=1,\quad t_\lambda\geqslant 0\right\}.$$

令

$$\pi_\tau=\left\{\left(\boldsymbol{\tau},\ \sum_{|\lambda|=n} t_\lambda b_\lambda\right)\middle|\sum_{|\lambda|=n}\frac{\lambda}{n}t_\lambda=\boldsymbol{\tau}\right\},$$

其中 $|\boldsymbol{\lambda}|=\tau_1+\tau_2+\tau_3=1$，$t_\lambda\geqslant 0$. 显然，

$$\pi_\tau\subset[\mathscr{B}] \tag{3.32}$$

另一方面，可证得

$$\sum_{|\lambda|=n}\frac{\lambda}{n}B_\lambda^n(\boldsymbol{\tau})=\boldsymbol{\tau}. \tag{3.33}$$

事实上，

$$\begin{aligned}\sum_{|\lambda|=n}\frac{\lambda_1}{n}B_\lambda^n(\boldsymbol{\tau})&=\sum_{|\lambda|=n}\frac{\lambda_1}{n}\cdot\frac{n!}{\lambda_1!\lambda_2!\lambda_3!}\tau_1^{\lambda_1}\tau_2^{\lambda_2}\tau_3^{\lambda_3}\\&=\tau_1\sum_{|\lambda|=n}\frac{(n-1)!}{(\lambda_1-1)!\lambda_2!\lambda_3!}\tau_1^{\lambda_1-1}\tau_2^{\lambda_2}\tau_3^{\lambda_3}\\&=\tau_1.\end{aligned}$$

同理 $\sum_{|\lambda|=n}\frac{\lambda_i}{n}B_\lambda^n(\boldsymbol{\tau})=\tau_i, i=2,3$，即(3.33)成立。

由(3.32)及(3.33)，曲面 π_λ 上的任一点

$$(\boldsymbol{\tau},p(\boldsymbol{\tau}))=\left(\boldsymbol{\tau},\ \sum_{|\lambda|=n}b_\lambda B_\lambda^n(\boldsymbol{\tau})\right)\in\pi_\lambda\subset[\mathscr{B}],$$

即 $\pi_\lambda\subset[\mathscr{B}]$.

一般地，n 次多项式可以看作是 $n+1$ 次多项式。 所以低次 Bernstein 多项式可以表示成高次 Bernstein 多项式，这在许多场合下具有技巧性的意义。

命题 3.19 （升阶公式） 令 $\boldsymbol{\varepsilon}^1=(1,0,0)$，$\boldsymbol{\varepsilon}^2=(0,1,0)$，$\boldsymbol{\varepsilon}^3=(0,0,1)$，

$$b_\mu^{(1)}=\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{3}\mu_i b_{\mu-\varepsilon^i},\quad|\boldsymbol{\mu}|=n+1, \tag{3.34}$$

则

$$\sum_{|\lambda|=n} b_\lambda B_\lambda^n(\tau) = \sum_{|\mu|=n+1} b_\mu^{(1)} B_\mu^{n+1}(\tau). \tag{3.35}$$

命题 3.19 就是所谓的升阶公式。反复利用升阶公式，经过 i 次升阶则可得

$$\sum_{|\lambda|=n} b_\lambda B_\lambda^n(\tau) = \sum_{|\mu|=n+i} b_\mu^{(i)} B_\mu^{(n+i)}(\tau), \tag{3.36}$$

其中

$$b_\mu^{(i)} = \sum_{|\lambda|=n} b_\lambda \binom{\mu}{\lambda} \Big/ \binom{n+i}{n}, \tag{3.37}$$

这里$\binom{\mu}{\lambda} = \frac{\mu!}{(\mu-\lambda)!\lambda!} = \binom{\mu_1}{\lambda_1}\binom{\mu_2}{\lambda_2}\binom{\mu_3}{\lambda_3}$.

我们先证(3.35)式，由 $\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 1$，有

$$\begin{aligned} B_\lambda^n(\tau) &= (\tau_1 + \tau_2 + \tau_3) B_\lambda^n(\tau) \\ &= \frac{1}{n+1}[(\lambda_1 + 1)B_{\lambda+e^1}^{n+1} + (\lambda_2 + 1)B_{\lambda+e^2}^{n+1} \\ &\quad + (\lambda_3 + 1)B_{\lambda+e^3}^{n+1}]. \end{aligned}$$

将上式代入(3.35)的左端并计算 Berstein 多项式 B_μ^{n+1}, $|\mu| = n + 1$ 的系数，即可得到(3.35)的右端。

为得到(3.36)，显然只需证明(3.37)，当 $i = 1$ 时，不难验证(3.37)等价于(3.34)，假设(3.37)当 $i = m - 1$ 时成立．对于 $i = m$，由(3.34)(用 $n + m - 1$ 替换 n)可知，当 $|\mu| = n + m$时，

$$\begin{aligned} b_\mu^{(m)} &= \frac{1}{n+m} \sum_{i=1}^{3} \mu_i b_{\mu-e^i}^{(m-1)} \\ &= \frac{1}{n+m} \sum_{i=1}^{3} \mu_i \sum_{|\lambda|=n} b_\lambda \binom{\mu - e^i}{\lambda} \Big/ \binom{n+m-1}{n} \\ &= \sum_{|\lambda|=n} b_\lambda \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{m} \mu_i \binom{\mu - e^i}{\lambda} \Big/ \binom{n+m}{n} \\ &= \sum_{|\lambda|=n} b_\lambda \frac{|\mu| - |\lambda|}{m} \binom{\mu}{\lambda} \Big/ \binom{n+m}{n} \end{aligned}$$

$$= \sum_{|\lambda|=n} b_\lambda \binom{\mu}{\lambda} \Big/ \binom{n+m}{n},$$

即(3.37)成立。(3.37)式是 J. Zhou[73]得到的。

在升阶过程中，所有的 Bézier 网 $\mathscr{B}_i$ 都对应着同一多项式 $p(\tau) = \sum_{|\lambda|=n} b_\lambda B_\lambda^n(\tau)$,所以显然有

定理 3.20[73] 对 $\tau \in \sigma$,一致地有

$$\lim_{i\to\infty} \mathscr{B}_i(\tau) = p(\tau).$$

证明 利用(3.37)式,经过简单的计算可得

$$b_\mu^{(i)} = \sum_{|\lambda|=n} b_\lambda \frac{n!}{\lambda!} \prod_{j=0}^{\lambda_1-1} \frac{\mu_1 - j}{n+i-j} \prod_{j=0}^{\lambda_2-1} \frac{\mu_2 - j}{n+i-\lambda_1} \prod_{j=0}^{\lambda_3-1} \frac{\mu_3 - j}{\lambda_3 + i - j}$$

若

$$\lim_{i\to\infty} \frac{\mu}{n+i} = \tau,$$

则关于 $\tau \in \sigma$,一致地有

$$\lim_{i\to\infty} b_\mu^{(i)} = p(\tau).$$

再利用 $p(\tau)$ 在 σ 上的一致连续性并注意 $\mathscr{B}_i$ 是以 $\left\{\left(\frac{\lambda}{n+i}, b_\lambda^{(i)}\right) \Big| |\lambda| = n+i\right\}$为顶点的分片线性多项式,即可证明定理 3.20 成立。

升阶公式是通过构造高次的 Bézier 网来逼近一个多项式。由定理 3.20，当升到一定的阶数时，从求值角度上讲，所构造的 Bézier 网就可以代替所求多项式。所以升阶公式是求多项式值的整体算法。 下面要介绍的 de Casteljau 算法则是求多项式一点处值的迭代算法。从形式上看，升阶过程是用高次多项式表示低次多项式,而 de Casteljau 算法则是用低次多项式表示高次多项式。从效果上看升阶过程是整体的逼近算法,而 de Casteljau 算

法则是求一点处值的精确算法。

定理 3.21 (de Casteljau 算法) 设 n 次多项式

$$p(\tau)=\sum_{|\lambda|=n} b_\lambda B_\lambda^n(\tau).$$

若定义

$$b_\lambda^{(0)}(\tau)=b_\lambda,$$

$$b_\lambda^{(r)}(\tau)=\sum_{j=1}^{3}\tau_j b_{\lambda+e^j}^{(r-1)}(\tau),\quad |\lambda|=n-r,$$

则

$$p(\tau)=\sum_{|\lambda|=n-r} b_\lambda^{(r)}(\tau)B_\lambda^{n-r},\ 0\leqslant r\leqslant n. \tag{3.38}$$

特别地,取 $r=n$,则得

$$p(\tau)=b_0^{(n)}(\tau). \tag{3.39}$$

证明 当 $r=0$ 时,由 $b_\lambda^{(r)}(\tau)$ 的定义直接可得(3.38),对 r 用归纳法,

$$p(\tau)=\sum_{|\lambda|=n-r} b_\lambda^{(r)}(\tau)B_\lambda^{n-r}(\tau)$$

$$=\sum_{|\lambda|=n-r} b_\lambda^{(r)}(\tau)\sum_{i=1}^{3}\tau_i B_{\lambda-e^i}^{n-r-1}(\tau)$$

$$=\sum_{|\lambda|=n-r-1}\sum_{i=1}^{3}\tau_i b_{\lambda+e^i}^{(r)}(\tau)B_\lambda^{n-r-1}(\tau)$$

$$=\sum_{|\lambda|=n-r-1} b_\lambda^{(r+1)}(\tau)B_\lambda^{n-r-1}(\tau).$$

这就完成了定理 3.21 的证明,这里及以后的论证中,$e^i(1\leqslant i\leqslant 3)$ 总是指命题 3.19 中所定义的记号。

de Casteljau 算法还可以用于函数的求导公式。这在建立多元样条光滑关系及插值问题中是极有意义的。

记 $D^\lambda f(\tau)=\dfrac{\partial^{|\lambda|}}{\partial\tau_1^{\lambda_1}\partial\tau_2^{\lambda_2}\partial\tau_3^{\lambda_3}}f(\tau)$, $D_\alpha f(\tau)=\alpha_1\dfrac{\partial}{\partial\tau_1}f(\tau)+\alpha_2\dfrac{\partial}{\partial\tau_2}f(\tau)+\alpha_3\dfrac{\partial}{\partial\tau_3}f(\tau)$($f(\tau)$ 表示沿 α 的方向导数),由标准的

求导公式，有

$$D_\alpha^r f(\tau) = \sum_{|\lambda|=r} B_\lambda^r(\alpha) D^\lambda f(\tau). \tag{3.40}$$

特别地，当$|\alpha| = 0$时，注意(3.27)，上式就是 $f(x)$ 沿方向 $y = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3$ 的 r 次方向导数。另外，(3.40)中的 $B_\lambda^r(\alpha)$ 仍是有意义的，尽管此时$|\alpha| = 0$而不是 1。

在(3.40)中，取 $f(\tau) = B_\lambda^n(\tau)$，则得到下面的公式：

$$D_\alpha^r B_\lambda^n(\tau) = \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{|\mu|=r} B_\mu^r(\alpha) B_{\lambda-\mu}^{n-r}(\tau). \tag{3.41}$$

在(3.40)中取 $f(\tau) = p(\tau)$，并利用(3.41)，可证

定理 3.22[73] n 次多项式 $p(\tau)$ 的 r 次方向导数由下述公式给出

$$D_\alpha^r p(\tau) = \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{|\lambda|=r} b_\lambda^{(n-r)}(\tau) B_\lambda^r(\alpha).$$

证明 首先，对 r 用归纳法不难证明

$$b_\lambda^{(r)}(\tau) = \sum_{|\mu|=r} b_{\lambda+\mu} B_\mu^r(\tau); |\lambda| = n - r. \tag{3.42}$$

再利用(3.41)，得

$$\begin{aligned} D_\alpha^r p(\tau) &= \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{|\lambda|=n} \sum_{|\mu|=r} b_\lambda B_\mu^r(\alpha) B_{\lambda-\mu}^{n-r}(\tau) \\ &= \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{|\lambda|=n-r} \sum_{|\mu|=r} b_{\lambda+\mu} B_\mu^r(\alpha) B_\lambda^{n-r}(\tau) \\ &= \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{|\mu|=r} B_\mu^r(\alpha) \sum_{|\lambda|=n-r} b_{\lambda+\mu} B_\lambda^{n-r}(\tau). \end{aligned} \tag{3.43}$$

将(3.42)代入上式，即得所需结果，证毕。

综合(3.42)、(3.43)及定理 3.22，可得定理 3.22 的一个对称形式：

推论 3.23

$$D_\alpha^r p(\alpha) = \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{|\lambda|=n-r} b_\lambda^{(r)}(\alpha) B_\lambda^{n-r}(\tau).$$

由(3.42)，我们还可得到求多项式 $p(\tau)$ 的混合偏导数的公式

$$D^{\lambda}p(\tau)=\frac{n!}{(n-r)!}\,b_{\lambda}^{(n-r)}(\tau),\quad |\lambda|=r. \tag{3.44}$$

事实上，

$$\begin{aligned}
D^{\lambda}p(\tau) &= \sum_{|\mu|=n} b_{\mu}D^{\lambda}B_{\mu}^{n}(\tau)\\
&=\frac{n!}{(n-r)!}\sum_{|\mu|=n} b_{\mu}B_{\mu-\lambda}^{n-r}(\tau)\\
&=\frac{n!}{(n-r)!}\sum_{|\lambda|=n-r} b_{\mu-\lambda}B_{\mu}^{n-r}(\tau)\\
&=\frac{n!}{(n-r)!}\,b_{\lambda}^{(n-r)}(\tau).
\end{aligned}$$

有了上面的准备，我们将给出定义在两个相邻三角形上 n 次多项式之间的 C^r 光滑连接条件。

定理 3.24[74] 设 $p(\tau)$ 和 $\bar{p}(\bar{\tau})$ 分别是定义在相邻三角形 $\sigma=[v_1,\ v_2,\ v_3]$和 $\bar{\sigma}=[\bar{v}_1,v_2,v_3]$ 上的 n 次多项式，$\{b_{\lambda},|\lambda|=n\}$和 $\{\bar{b}_{\lambda},|\lambda|=n\}$ 分别是 $p(\tau)$ 和 $\bar{p}(\bar{\tau})$ 的 Bézier 坐标，τ 和 $\bar{\tau}$ 分别是 x 关于 σ 和 $\bar{\sigma}$ 的面积坐标。则 $p(\tau)$ 和 $\bar{p}(\bar{\tau})$之间 C^r 光滑连接的充要条件是

$$\bar{b}_{\lambda^s}=b_{\lambda^0}^{(s)}(\hat{\tau}),\quad s=0,\ 1,\cdots,r, \tag{3.45}$$

其中 $\hat{\tau}$ 是关于 σ 的面积坐标，$\lambda^s=(s,\lambda_2,\ \lambda_3)$，$\lambda^0=(0,\ \lambda_2,\lambda_3)$，$\lambda_2+\lambda_3=n-s$。

证明 设向量

$$y=\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+\alpha_3v_3=\bar{\alpha}_1\bar{v}_1+\bar{\alpha}_2v_2+\bar{\alpha}_3v_3, \tag{3.46}$$

其中$|\alpha|=|\bar{\alpha}|=0$。由推论 3.23 及(3.27)，得

$$D_y^sp(x)=D_\alpha^sp(\tau)=\frac{n!}{(n-s)!}\sum_{|\lambda|=n-s} b_{\lambda}^{(s)}(\alpha)B_{\lambda}^{n-s}(\tau), \tag{3.47}$$

$$D_y^s\bar{p}(x) = D_y^s\bar{p}(\bar{\tau}) = \frac{n!}{(n-s)!}\sum_{|\lambda|=n-s}\bar{b}_\lambda^{(s)}(\bar{\alpha})B_\lambda^{n-s}(\bar{\tau}).$$

(3.48)

取 $y = \bar{v}_1 - v_2$，则

$$\bar{\alpha} = (1,-1,0), \alpha = \bar{\tau} - \varepsilon^2. \tag{3.49}$$

注意 $p(x)$ 与 $\bar{p}(x)$ 之间 c^r 光滑连接的充要条件是

$$D_y^s p(x)|[v_2, v_3] = D_y^s\bar{p}(x)|[v_2, v_3], \ 0 \leqslant s \leqslant r. \tag{3.50}$$

由(3.47)和(3.48)及 $\tau|[v_2, v_3] = \bar{\tau}|[v_2, v_3]$知，(3.50)等价于

$$b_{\lambda^0}^{(s)}(\alpha) = \bar{b}_{\lambda^0}^{(s)}(\bar{\alpha}), 0 \leqslant s \leqslant r \leqslant n, |\lambda^0| = n-s. \tag{3.51}$$

将(3.49)代入(3.51)得

$$\begin{aligned}\bar{b}_{\lambda^0}^{(s)}(\bar{\alpha}) &= \sum_{|\mu|=s}\bar{b}_{\lambda^0+\mu}B_\mu^s(\bar{\alpha}) \\ &= \sum_{\mu_1+\mu_2=s}(-1)^{\mu_2}\binom{s}{\mu_2}\bar{b}_{\lambda^0+(\mu_1,\mu_2,0)} \\ &= \sum_{i=1}^{s}(-1)^i\frac{s!}{i!(s-i)!}\bar{b}_{\lambda^0+(s-i)e^1+ie^2}.\end{aligned} \tag{3.52}$$

$$\begin{aligned}\bar{b}_{\lambda^0}^{(s)}(\alpha) &= \sum_{|\mu|=s}b_{\lambda^0+\mu}B_\mu^s(\alpha) \\ &= \sum_{|\mu|=s}\frac{s!}{\mu!}b_{\lambda^0+\lambda}\bar{\tau}_1^{\mu_1}(\bar{\tau}_2-1)^{\mu_2}\bar{\tau}_3^{\mu_3} \\ &= \sum_{|\mu|=s}\frac{s!}{\mu!}b_{\lambda^0+\mu}\bar{\tau}_1^{\mu_1}\bar{\tau}_3^{\mu_3}\sum_{i=1}^{\mu_2}(-1)^i\binom{\mu_2}{i}\bar{\tau}_2^{\mu_2-i}.\end{aligned}$$

令 $\mu = \beta + i\varepsilon^2$，上式等于

$$\begin{aligned}&\sum_{|\mu|=s}\sum_{i=1}^{\mu_2}(-1)^i\binom{s}{i}b_{\lambda^0+\mu}B_\beta^{s-i}(\bar{\tau}) \\ &= \sum_{i=0}^{s}(-1)^i\binom{s}{i}\sum_{|\beta|=s-i}b_{\lambda^0+\beta+ie^2}B_\beta^{s-i}(\bar{\tau}) \\ &= \sum_{i=0}^{s}(-1)^i\binom{s}{i}b_{\lambda^0+ie^2}^{(s-i)}(\bar{\tau})\end{aligned}$$

将上式及(3.52)代入(3.51)中，即得

$$\bar b_{\lambda^0+(s-i)\epsilon^1+i\epsilon^2} = b^{(s-i,i)}_{\lambda^0+i\epsilon^2}(\bar\tau),\quad 0 \leqslant i \leqslant s \leqslant r,\quad |\lambda^0| = n - s.$$

它显然与(3.45)等价。□

定理 3.24 在曲面构造及多元样条空间结构的研究等方面起着非常重要的作用。它的一元形式是 E. Stärk[75]在其博士论文中得到的。

推论 3.25 设 $p(\tau)$ 与 $\bar p(\bar\tau)$ 如定理 3.24 所定义，则 $p(\tau)$ 与 $\bar p(\bar\tau)$ 之间 C^1 光滑连接的充要条件是：

1) $b_{\lambda^0} = \bar b_{\lambda^0}$, $|\lambda^0| = n$;

2) $(\bar x_{\lambda^1}, \bar b_{\lambda^1})$, $(x_{\lambda^1}, b_{\lambda^1})$, $(x_{\lambda^0+\epsilon^2}, b_{\lambda^0+\epsilon^2})$ 和 $(x_{\lambda^0+\epsilon^3}, b_{\lambda^0+\epsilon^3})$ 四点共面，其中 $x_\lambda = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$, $\bar x_\lambda = \lambda_1 \bar v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$, $\lambda^1 = \lambda^0 + \epsilon^1$.

由定理 3.24，1)是显然的。所以只需证明 2)。从(3.45)知

$$\begin{aligned}\bar b_{\lambda^1} = b^{(1)}_{\lambda^0}(\bar\tau) &= \bar\tau_1 b_{\lambda^0+\epsilon^1} + \bar\tau_2 b_{\lambda^0+\epsilon^2} + \bar\tau_3 b_{\lambda^0+\epsilon^3}\\ &= \bar\tau_1 b_{\lambda^1} + \bar\tau_2 b_{\lambda^0+\epsilon^2} + \bar\tau_3 b_{\lambda^0+\epsilon^3}.\end{aligned}\tag{3.53}$$

另一方面，

$$\begin{aligned}\bar x_{\lambda^1} &= \bar v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3\\ &= \bar\tau_1 v_1 + \bar\tau_2 v_2 + \bar\tau_3 v_3 + \lambda_3 v_2 + \lambda_3 v_3\\ &= \bar\tau_1(v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3) + \bar\tau_2((\lambda_2 + 1)v_2\\ &\quad + \lambda_3 v_3) + \bar\tau_3(\lambda_2 v_2 + (\lambda_3 + 1)v_3)\\ &= \bar\tau_1 x_{\lambda^1} + \bar\tau_2 x_{\lambda^0+\epsilon^2} + \bar\tau_3 x_{\lambda^0+\epsilon^3}.\end{aligned}$$

因而可知 2)成立。

定理 3.24 可以毫无困难地推广到高维空间中去[70]。

与二元情况类似，定义

$$B^n_\lambda(\tau) = \frac{n!}{\lambda!}\tau^\lambda = \frac{n!}{\lambda_1!\cdots\lambda_m!}\tau_1^{\lambda_1}\cdots\tau_m^{\lambda_m},$$

$$b^{(s)}_\lambda(\tau) = \sum_{|\mu|=s} b_{\lambda+\mu} B^s_\mu(\tau),\quad |\lambda| = n - s.$$

并记 n 次多项式 $p(\tau) = \sum_{|\lambda|=n} b_\lambda B^n_\lambda(\tau)$。则有

定理 3.26 设 $p(\boldsymbol{v})$ 和 $\bar{p}(\bar{\boldsymbol{v}})$ 分别是定义在单纯形 $\sigma=[v_1,\cdots,v_{m+1}]$ 和 $\bar{\sigma}=[\bar{v}_1,v_2,\cdots,v_{m+1}]$ 上的 n 次多项式，则 $p(\boldsymbol{v})$ 和 $\bar{p}(\bar{\boldsymbol{v}})$ 是 c^r 光滑连接的充要条件为

$$\bar{b}_{\lambda^s}=b^{(s)}_{\lambda}(\hat{e}),\quad s=0,1,\cdots,r,$$

其中的记号都与定理 3.24 中的类似。

众所周知，在一元情形下，Bézier 多项式具有保凸性质，即当 Bézier 网是凸多边形时，由其所确定的多项式也是凸的。对于二元情形，也有同样的结论。

定理 3.27 当 Bézier 网$\left\{\left(\frac{\lambda}{n},\ b_\lambda\right);|\lambda|=n\right\}$凸时，由其决定的 n 次多项式也是凸的。

该定理是常庚哲和冯玉瑜[77]得到的。最初，常庚哲和 Dauis[76] 得到了下面的

定理 3.28 当 Bézier 网$\left\{\left(\frac{\lambda}{n},\ b_\lambda\right)\Big|\ |\lambda|=n\right\}$满足条件

$$(b_{\mu+e^1+e^2}-b_{\mu+e^2+e^3})-(b_{\mu+e^1+e^3}-b_{\mu+2e^3})\geqslant 0,$$
$$(b_{\mu+e^2+e^3}-b_{\mu+e^1+e^3})-(b_{\mu+e^1+e^2}-b_{\mu+2e^1})\geqslant 0,$$
$$(b_{\mu+e^1+e^3}-b_{\mu+e^1+e^2})-(b_{\mu+e^2+e^3}-b_{\mu+2e^2})\geqslant 0,$$

时 $(|\mu|=n-2)$，由其确定的 n 次多项式 $p(\boldsymbol{v})$ 是凸的。

$p(\boldsymbol{v})$ 是凸的充要条件是常庚哲和冯玉瑜[78]得到的。

凸性的研究是一个非常重要而困难的困难。目前关于凸性的讨论从本质上讲还只局限在一个三角形上。而整体凸性的研究既实用也更为困难。比如，如何构造在给定的结点上插值已有数据的凸曲面，是至今也未解决的问题。有兴趣的读者可参阅 [71]，[78]等文献。

罗笑南在其博士论文中通过提高维数技巧提出了多元 B 形式超曲面的概念，并说明乘积型 Bézier 曲面和非乘积型 Bézier 曲面都可以看成多元 B 形式下的超曲面。

设 δ 是 $\mathbf{R}^m$ 中 m 维多面体，其顶点是 $v_0,\cdots,v_m,n\geqslant m$。我们构造一个 n 单纯形 $\sigma=[u_0,\cdots,u_n]$，使得

$$\boldsymbol{u}_i=(\boldsymbol{v}_i,\ \boldsymbol{w}_i),\ 0\leqslant i\leqslant n,\ \boldsymbol{w}_i\in\mathbb{R}^{n-m}.$$

一般地，我们还要求 σ 的体积和 δ 的体积相等. σ 上的 k 次多项式为

$$p(\boldsymbol{x})=\sum_{|\lambda|=k}b_\lambda B_\lambda^k(\boldsymbol{\tau}),\ \boldsymbol{x}\in\sigma,$$

其中 $\boldsymbol{\tau}$ 是 $\boldsymbol{x}$ 关于 σ 的重心坐标.

定义 3.29 设 $\rho\subset\sigma$ 是 σ 中的子流形，则

$$p(\boldsymbol{x})=\sum_{|\lambda|=k}b_\lambda B_\lambda^k(\boldsymbol{\tau}),\boldsymbol{x}\in\rho$$

称为 σ 上(关于 $p(\boldsymbol{x})$) 的超曲面.

设 $\boldsymbol{v}_0$, $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中凸四边形的四个顶点，$\sigma=[\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_3]$是如上构造的四面体. 取 $k=2$，$\rho=[\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3]$，则不难验证 $p(\boldsymbol{x})$，$\boldsymbol{x}\in\rho$ 是 ρ 上的二次 Bézier 多项式(曲面). 若取

$$\rho=\{ts\boldsymbol{u}_0+t(1-s)\boldsymbol{u}_1+(1-t)s\boldsymbol{u}_2+(1-t)(1-s)\boldsymbol{u}_3|0\leqslant t,\ s\leqslant 1\},$$

则 $p(\boldsymbol{x})$，$\boldsymbol{x}\in\rho$ (令 $b_{0,1,1,0}=b_{1,0,0,1}$) 是双二次 Bézier 曲面。若取

$$\rho=\{t^2\boldsymbol{u}_0+(1-t)t\boldsymbol{u}_1+(1-t)t\boldsymbol{u}_2+(1-t)^2\boldsymbol{u}_3;0\leqslant t\leqslant 1\},$$

则 $p(\boldsymbol{x})$，$\boldsymbol{x}\in\rho$ 是四次 Bézier 曲线.

以上的例子基本取自[79]中. 下面的定理也取自该论文.

定理 3.30 双 n 次 Bézier 曲面是四面体上的 n 次多项式的一个超平面.

该定理的证明可参考上面的例子，这里就不详细证明了.

罗笑南在其博士论文中还构造了正四边形域正六边形域和正八边形域上的超曲面，这里也不详细论述了.

§ 3. 构造二元样条的积分方法

这里将介绍一种构造样条函数的积分方法. 我们将利用积分

方法给出样条函数在均匀剖分下的积分递推关系。一般说来，如果起始的样条函数有最小的支集，那么通过积分方法可以得到具有更高光滑度而支集仍为最小的样条函数。换句话说，我们可以递推地给出 B 样条函数。为了清楚起见，我们仅讨论二维情形，这些结果都可以直接推广到高维情形。

首先先引进一些记号。

用剖分 $\Delta^{(1)}$: $x=i$, $y=j$, $x-y=k$ 和剖分 $\Delta^{(2)}$: $x=i$, $y=j$, $x-y=k$, $x+y=k$ 分别记均匀 1-型三角剖分和 2-型三角剖分。设

$$\tau'_{ij}=\{(x,y):i\leqslant x\leqslant i+1,j\leqslant y\leqslant j+1,x-i\leqslant y-j\},$$

$$\tau''_{ij}=\{(x,y):i\leqslant x\leqslant i+1,j\leqslant y\leqslant j+1,x-i\geqslant y-j\},$$

分别是 $\Delta^{(1)}$ 的两个胞腔。设

$$\omega_{ij}^{(1)}=\{(x,y):i\leqslant x\leqslant i+1,\ j\leqslant y\leqslant j+1,$$
$$x-i\leqslant y-j,x-i\leqslant j+1-y\},$$

$$\omega_{ij}^{(2)}=\{(x,y):i\leqslant x\leqslant i+1,\ j\leqslant y\leqslant j+1,$$
$$x-i\leqslant y-j,x-i\geqslant j+1-y\},$$

$$\omega_{ij}^{(3)}=\{(x,y):i\leqslant x\leqslant i+1,\ j\leqslant y\leqslant j+1,$$
$$x-i\geqslant y-j,\ x-i\geqslant j+1-y\},$$

$$\omega_{ij}^{(4)}=\{(x,y):\ i\leqslant x\leqslant i+1,\ j\leqslant y\leqslant j+1,$$
$$x-i\geqslant y-j,\ x-i\leqslant j+1-y\},$$

分别是 $\Delta^{(2)}$ 的四个胞腔。

设 $B(x,\ y)\in S_k^\mu(\Delta^{(i)})$，其支集的边界为 T，则称 $B(x,y)$ 为局部支集样条。而 B 样条乃是具有最小支集的局部样条。

由第 2 章可知，在 $S_k^\mu(\Delta^{(1)})$ 中存在非平凡局部支集样条的必要条件是 k,μ 满足 $k\geqslant(3\mu+1)/2$。而对 $S_k^\mu(\Delta^{(2)})$ 来说则是 $k>(4\mu+1)/3$。我们将证明上述必要条件实质上也是充分条件。设 d 满足 $d>(3\mu+1)/2$ 的最小正数（对 $\Delta^{(2)}$ 来说 $d>(4\mu+1)/3$），则 $S_d^\mu(\Delta^{(i)})$，$i=1$，2 是在所有 μ 次光滑的函数中次数最低的样条空间，而且该空间中含有 B 样条。如所知，在 $S_d^\mu(\Delta^{(i)})$ 中，Box 样条可以不具备最小支集的性质。因此可以说

积分方法优于 Box 样条方法。另外，我们还将给出利用积分方法解决非均匀剖分下构造样条的例子。对于矩形域D及其上的加细剖分 $\Delta_{mn}^{(i)}$，$i=1,2$，我们还将给出由B样条构成的 $S_d^\mu(\Delta_{mn}^{(i)},D)$ 的基底。

3.1 $S_d^\mu(\Delta^{(1)})$ 中B样条的存在性及其构造

引理 3.31 如果 $B(x,y)$ 是 $S_d^\mu(\Delta^{(1)})$ 局部支集样条，设其支集为 T，$A(T)=(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6)$，这里 a_i 表示六边形T的第 i 个边所含胞腔数，(如图 3.1)，则

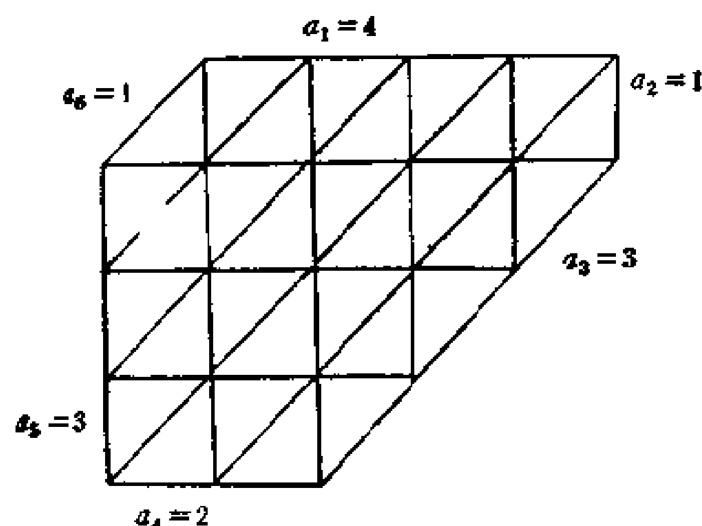


图 3.1

$$B^{(1)}(x,y)=\int_x^{x+1}B(u,y)du,$$

$$B^{(2)}(x,y)=\int_y^{y+1}B(x,u)du,$$

$$B^{(3)}(x,y)=\int_x^{x+1}B(u,u-x+y)du$$

$$=\int_y^{y+1}B(u-y+x,u)du$$

是 $S_{d+1}^\mu(\Delta^{(1)})$ 中以 $T^{(1)},T^{(2)},T^{(3)}$ 为支集的局部支集样条，其中

$$A(T^{(1)})=(a_1+1,\ a_2,\ a_3,\ a_4+1,\ a_5,\ a_6),$$

$$A(T^{(2)})=(a_1,a_2+1,\ a_3,\ a_4,\ a_5+1,\ a_6),$$

$$A(T^{(3)})=(a_1,\ a_2,\ a_3+1,\ a_4,\ a_5,\ a_6+1).$$

注意d的定义，当 $\mu=2s$ 时，$d=3s+1$；当 $\mu=2s+1$

时，$d = 2s + 1$. 因此只须考虑 $S^{2s}_{3s+1}(\Delta^{(1)})$ 和 $S^{2s+1}_{3s+3}(\Delta^{(1)})$中 B 样条的存在性和构造问题.

设 $B_0(x,y)$ 是 $S^0_1(\Delta^{(1)})$ 中的 B 样条. 其支集如图 3.2，它的

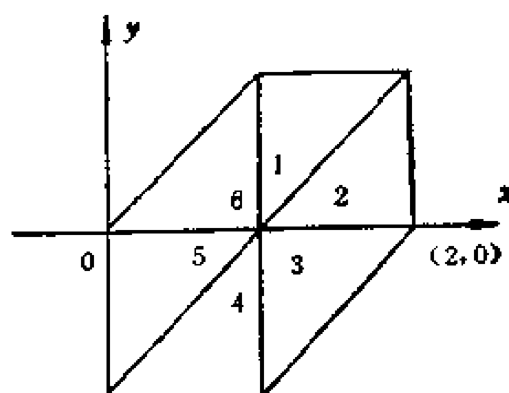


图 3.2

第 i 个胞腔上的表示式为 $p_i(x, y)$, $i = 1,2,\cdots,6$,其中

$$p_1(x, y) = 1 - y,\ p_2(x, y) = 2 - x,$$

$$p_3(x, y) = 2 - x + y,\ p_4(x, y) = 1 + y,$$

$$p_5(x, y) = x,\ p_6(x, y) = x - y.$$

定理 3.32 $S^{\mu}_{k}(\Delta^{(1)})$ 中存在 B 样条的充分必要条件是

$$k > (3\mu + 1)/2.$$

并且可以通过如下的积分递推关系来构造局部支集样条.

1) 如果 $S^{2s}_{3s+1}(\Delta^{(1)})$ 中的 B 样条 $B_{2s}(x,y)$ 的支集为 T_{2s}，并且 $A(T_{2s}) = (a_1, a_2, \cdots, a_6)$,则

$$B^{(1)}_{2s+1}(x,y) = \int_{y}^{y+1} dv \int_{v-y+x}^{v-y+x+1} B_{2s}(u,v)du,$$

$$B^{(2)}_{2s+1}(x,y) = \int_{x}^{x+1} du \int_{v-x+y}^{v-x+y+1} B_{2s}(u,v)dv$$

分别是 $S^{2s+1}_{3s+3}(\Delta^{(1)})$ 中以 $T^{(1)}_{2s+1}, T^{(2)}_{2s+1}$ 为支集的线性无关的局部支集样条,其中

$$A(T^{(1)}_{2s+1}) = (a_1 + 1,\ a_2,\ a_3 + 1,\ a_4 + 1, a_5,\ a_6 + 1),$$

$$A(T^{(2)}_{2s+1}) = (a_1,\ a_2 + 1,\ a_3 + 1,\ a_4,\ a_5 + 1,\ a_6 + 1).$$

2) $B_{2s+2}(x,y) = \int_{x}^{x+1} B^{(2)}_{2s+1}(t, y)dt$ 是 $S^{2s+2}_{3s+4}(\Delta^{(1)})$中以 T_{2s+2}

为支集的 B 样条，其中

$$A(T_{2s+2})=(a_1+1,\ a_2+1,\ a_3+1,\ a_4+1,\ a_5+1,\ a_6+1).$$

证明 由于

$$\frac{\partial}{\partial x}B_{2s+2}(x,y),\ \frac{\partial}{\partial y}B_{2s+2}(x,\ y)\in S^{2s+1}_{3s+3}(\Delta_1).$$

再由引理 3.31 及积分性质，即可知道上述结果是成立的。如此得到的局部支集样条序列 $\{B_{2s}(x,\ y),\ B^{(1)}_{2s+1}(x,\ y),\ B^{(2)}_{2s+1}(x,\ y),\ s=0,1,2,\cdots\}$ 可以经 $B_0(x,y)$ 而得到；$B_{2s}(x,y)$ 是 $S^{2s}_{3s+1}(\Delta^{(1)})$ 中以 T_{2s} 为支集的样条，而 $B^{(1)}_{2s+1}(x,y),B^{(2)}_{2s+1}(x,y)$ 是 $S^{2s+1}_{3s+3}(\Delta^{(1)})$ 中以 $T^{(1)}_{2s+1}$，$T^{(2)}_{2s+1}$ 为支集的样条，其中

$$A(T_{2s})=(s+1,s+1,\ s+1,\ s+1,\ s+1,s+1),$$
$$A(T^{(1)}_{2s+1})=(s+2,\ s+1,\ s+2,\ s+2,s+1,s+2),$$
$$A(T^{(2)}_{2s+1})=(s+1,\ s+2,s+2,s+1,s+2,\ s+2).$$

□

根据定理 3.32，空间 $S^\mu_k(\Delta^{(1)})(k>(3\mu+1)/2)$ 含有 B 样条。取 B 样条 $B_{\mu 0}(x,y)\in S^{\mu_0}_{k_0}(\Delta^{(1)})\subset\{S^\mu_k(\Delta^{(1)}):\ k>(3\mu+1)/2\}$，并设 $B_{0,0,0}(x,\ y)=B_{\mu 0}(x,\ y)$，则我们可以得到下列性质：

命题 3.33 对 $k_1,k_2,\ k_3=0,1,2\cdots$，如果

$$B_{k_1+1,k_2,k_3}(x,y)=\int_x^{x+1}B_{k_1,k_2,k_3}(u,y)du,$$

$$B_{k_1,k_2+1,k_3}(x,y)=\int_y^{y+1}B_{k_1,k_2,k_3}(x,u)du,$$

$$B_{k_1,k_2,k_3+1}(x,y)=\int_x^{x+1}B_{k_1,k_2,k_3}(u,u-x+y)du,$$

则 $B_{k_1,k_2,k_3}(x,y)$ 是 $S^\mu_k(\Delta^{(1)})$ 中的局部支集样条，这里

$$k=k_0+k_1+k_2+k_3,\ \mu=\mu_0+k_1+k_2+k_3-\max(k_1,\ k_2,\ k_3).$$

命题 3.34 选 $B_{0,0,0}(x,y)=B_0(x,y)\in S^0_1(\Delta^{(1)})$，如命题 3.33，则

$$\{B\}=\{B_{s+t,s,s},\ B_{s+t-1,s+1,s},\cdots,B_{s,s+t,s},\ B_{s,s+t-1,s+1},$$
$$B_{s,s+t-2,s+2}\cdots,B_{s,s,s+t};\ t=0,1,2,\cdots,k-3s-1\}$$

是 $\tilde{S}_k^{2s}(\Delta^{(1)})$，$k>3s+1$ 的一组基底；

$$\{B\}=\{B_{s+t-1,s+1,s}B_{s+t-2,s+2,s},\cdots,\ B_{s+1,s+t-1,s},B_{s,s+t-1,s+1},$$
$$B_{s,s+t-2,s+2},\cdots,\ B_{s+1,s,s+t-1};\ t=2,3,\cdots,k-3s-1\}$$

是 $\tilde{S}_k^{2s+1}(\Delta^{(1)})$，$k\geqslant 3s+3$ 中的一组基底，这里 $\tilde{S}_k^{\mu}(\Delta^{(1)})$ 是 $S_k^{\mu}(\Delta^{(1)})$ 中由局部支集样条所构成的子空间。

证明 $\{B\}$的线性无关性可由它们的 Fourier 变换得到。由第 2 章中的维数公式，很容易证明 $\tilde{S}_k^{\mu}(\Delta^{(1)})$ 的维数恰好等于 $\{B\}$ 中元素的个数。 □

命题 3.35 象命题 3.33 那样选择 $B_0(x,y)$作为 $B_{0,0,0}(x,y)$，则有

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}B_{k_1,k_2,k_3}(x+m,\ y+n)=1,(x,y)\in R^2,$$

和

$$\iint_{-\infty}^{+\infty}B_{k_1,k_2,k_3}(x,\ y)dxdy=1.$$

证明 $B_{0,0,0}(x,y)$ 显然具有上述性质。由 $B_{k_1,k_2,k_3}(x,\ y)$的定义，可知这些性质是成立的。 □

命题 3.36 $B_{k_1,k_2,k_3}(x,y)$ 的 Fourier 变换是

$$F(B_{k_1,k_2,k_3}(x,\ y))(u,\ v)=g^{k_1+1}(u)g^{k_2+1}(v)g^{k_3+1}(u+v),$$

这里 $g(t)=(e^{it}-1)/it$。

证明 设

$$b(x)=\begin{cases}1 & x\in(-1,0),\\ 0 & x\notin(-1,0).\end{cases}$$

则

$$F(b(x))(t)=g(t),$$

且

$$F(B_0(x,\ y))(u,\ v)=g(u)g(v)g(u+v).$$

注意到

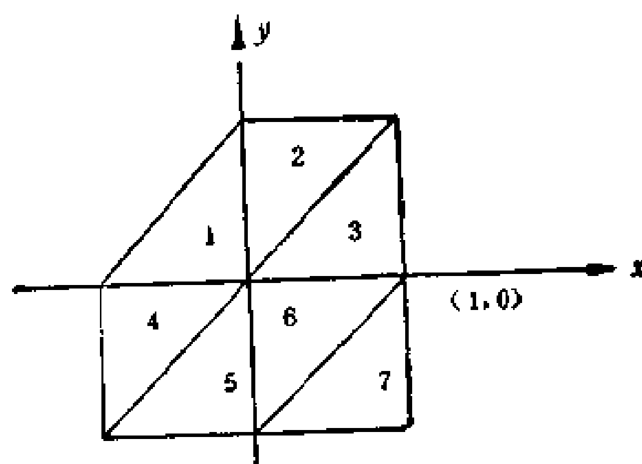


图 3.3

$$\int_x^{x+1} B(u,y)du = B(x,y)*b(u).$$

设 $\bar{B}_0(x,y)\in S_2^0(\Delta^{(1)})$，其支集如图 3.3，其在第 i 个胞腔上的表达式为 $q_i, i=1,2,\cdots,6$，其中

$$q_1(x,y)=\frac{1}{2}(x-y+1)^2,$$

$$q_2(x,y)=(1-y)\left(x-\frac{y}{2}+\frac{1}{2}\right),$$

$$q_3(x,y)=(1-x)\left(\frac{3}{2}x-y+\frac{1}{2}\right),$$

$$q_4(x,y)=\frac{1}{2}(x+1)^2,$$

$$q_5(x,y)=(y+1)\left(x-\frac{y}{2}+\frac{1}{2}\right),$$

$$q_6(x,y)=x(1-x)+\frac{1}{2}(y-x+1)(x-y+1),$$

$$q_7(x,y)=(1-x)(y+1).$$

命题 3.37 选 $B_0(x,y)$ 作为初始样条，由定理 3.32 的积分递推关系，可以构造 $B_{2s}(x,y)$. 则 $B_{2s}(x,y)$ 是 $S_{2s+1}^{2s}(\Delta^{(1)})$ 中唯一的最小支集 B 样条，$s=0,1,2,\cdots$. 以如上所选 $\bar{B}_0(x,y)$ 作初始样条，按定理 3.32 的积分递推关系可以构造 $B_{2s+1}^{(1)}(x,y)$，

$B^{(2)}_{2s+1}(x,y)$，则 $B^{(1)}_{2s+1}(x,y)$，$B^{(2)}_{2s+1}(x,y)$ 是 $S^{2s+1}_{3s+3}(\Delta^{(1)})$ 中的 B 样条，$s=0,1,2,\cdots$.

只须利用 Fourier 变换，并对比 Box 样条即可知本命题为真。

由命题 3.37 可见，适当地选择了始初的样条函数，则可通过积分方法而得到 B 样条。

3.2　$S^{\mu}_{d}(\Delta^{(1)}_{mn},D)$ 的基底

设 $D=\{(x,y):a\leqslant x\leqslant b,c\leqslant y\leqslant d\}$，$h=(b-a)/m,l=(d-c)/n$，$x_i=a+ih$，$y_j=c+jl$ （$i=0,1,2,\cdots,m$；$j=0,1,2,\cdots,n$），并且 D 的剖分 $\Delta^{(1)}_{mn}$ 由直线

$$x=x_i,y=y_j,(x-x_i)/h=(y-y_j)/l,$$
$$i=0,1,2,\cdots,m;j=0,1,2,\cdots,n$$

组成。对每个非负整数 μ，我们将给出 $S^{\mu}_{d}(\Delta^{(1)}_{mn},D)$ 的基底。

定理 3.38　对每个非负整数 $s\geqslant 0$，$S^{2s}_{3s+1}(\Delta^{(1)}_{mn},D)$ 的基底为

$$\begin{aligned}E^{2s}=\{&B_{2s}((x-x_i)/h-2,(y-y_j)/l-1),\\&(x-x_0)^u(y-y_j)_+^{v+2s+1},(y-y_0)^u(x_i-x)_+^{v+2s+1},\\&((x-x_0)/h+(y-y_0)/l)^u\times((y-y_0)/\\&l-x(x-x_0)/h+r)_+^{v+2s+1},(x-x_0)^p(y-y_0)^q,\\&i=1,2,\cdots,m-1,j=1,2,\cdots,n-1,\\&r=1-n,2-n,\cdots,m-1,0\leqslant u+v\leqslant s,\\&\quad 0\leqslant p+q\leqslant 3s+1\};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E^{2s+1}=\{&B^{(1)}_{2s+1}((x-x_i)/h-1,(y-y_j)/l-1),\\&B^{(2)}_{2s+1}((x-x_i)/h-1,(y-y_j)/l-1),\\&(x-x_0)^u(y-y_j)_+^{v+2s+2},\ (y-y_0)^u(x_i-x)_+^{v+2s+2},\\&((x-x_0)/h+(y-y_0)/l)^u\times(r-(x-x_0)/\\&h+(y-y_0)/l)_+^{v+2s+1},\ (x-x_0)^p(y-y_0)^q,\\&i=1,2,\cdots,m-1,j=1,2,\cdots,n-1,\\&\quad r=1-n,\ 2-n,\cdots,m-1,\\&0\leqslant u+v\leqslant s+1,\ 0\leqslant p+q\leqslant 3s+3\},\end{aligned}$$

这里 $B_{2s}(x,y)$，$B^{(1)}_{2s+1}(x,y)$ 和 $B^{(2)}_{2s+1}(x,y)$ 为由命题 3.37 所定义

的 B 样条。

证明 由第二章中的维数公式：

$$\dim S_k^\mu(\Delta_{mn}^{(1)}, D) = \binom{k+2}{2} + (2m+2n-3)\binom{k-\mu+1}{2} + d_k^\mu(3)(m-1)(n-1),$$

其中

$$d_k^\mu(n) = \frac{1}{2}\left(k-\mu-[(\mu+1)/(n-1)]\right)_+ \cdot \left((n-1)k-(n+1)\mu+n-3+(n-1)\left[\frac{\mu+1}{n-1}\right]\right),$$

可知 E^{2s} 和 E^{2s+1} 的维数分别等于 $S^{2s}_{3s+1}(\Delta^{(1)})$ 和 $S^{2s+1}_{3s+3}(\Delta^{(1)})$ 的维数。所以我们只须证明 E^{2s} 和 E^{2s+1} 都是线性无关的即可，此处仅证 E^{2s+1} 是线性无关的。

假设有 $a_{ij}^{(1)}$，$a_{ij}^{(2)}$，b_{juv}，c_{juv}，d_{ruv}，e_{pq}，使得

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{n-1}\left[a_{ij}^{(1)}B_{3s+1}^{(1)}\left(\frac{(x-x_i)}{h-1}, \frac{(y-y_j)}{l-1}\right)\right. \\
&\qquad \left. + a_{ij}^{(2)}B_{2s+1}^{(2)}\left(\frac{(x-x_i)}{h-1}, \frac{(y-y_j)}{l-1}\right)\right] \\
&\qquad + \sum_{0\leqslant u+v\leqslant s+1}\left[\sum_{j=1}^{n-1} b_{juv}(x-x_0)^u(y-y_j)_+^{v+2s+2}\right. \\
&\qquad + \sum_{i=1}^{m-1} c_{iuv}(y-y_0)^u(x_i-x)_+^{v+2s+1} \\
&\qquad + \sum_{r=1-n}^{m-1} d_{ruv}\left(\frac{(x-x_0)}{h}+\frac{(y-y_0)}{l}\right)^u\left(\frac{r+(y-y_0)}{l}\right. \\
&\qquad \left.\left. -\frac{(x-x_0)}{h}\right)_+^{v+2s+2}\right] \\
&\qquad + \sum_{0\leqslant p+q\leqslant 3s+3} e_{pq}(x-x_0)^p(y-y_0)^q = 0.
\end{aligned} \tag{3.54}$$

设

$$r_{ij}^{(1)} = \{(x,y): x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}, y_j \leqslant y \leqslant y_{j+1}, (x - x_i)/h$$
$$\leqslant (y - y_i)/l\},$$
$$r_{ij}^{(2)} = \{(x,y): x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}, y_j \leqslant y \leqslant y_{j+1}, (\tau - x_i)/h$$
$$\leqslant (y - y_i)/l\},$$
$$i = 0,1,\cdots,m-1; j = 0,1,\cdots,n-1.$$

如果 $(x,y) \in r_{m-1,0}^{(2)}$, (3.54)变成

$$\sum_{0 \leqslant p+q \leqslant 3s+3} e_{pq}(x - x_s)^p (y - y_s)^q = 0,$$

从而

$$e_{pq} = 0, 0 \leqslant p + q \leqslant 3s + 3.$$

设 $(\tau,y) \in r_{m-1,0}^{(1)}, r_{m-1,1}^{(2)}, r_{m-1,1}^{(1)}, r_{m-1,2}^{(2)}, r_{m-1,2}^{(1)}, \cdots, r_{m-1,n-1}^{(2)}, r_{m-1,n-1}^{(1)}$,
从 (3.54) 可逐次推出

$$d_{ruv} = 0, r = m-1, m-2, \cdots, m-n; 0 \leqslant u+v \leqslant s+1,$$
$$b_{juv} = 0, j = 1,2,\cdots,n-1; 0 \leqslant u+v \leqslant s+1.$$

再设$(x,y) \in r_{m-2,n-1}^{(2)}, r_{m-2,n-1}^{(1)}, r_{m-3,n-1}^{(2)}, r_{m-3,n-1}^{(1)}, \cdots, r_{0,n-1}^{(2)}, r_{0,n-1}^{(1)}$,
则从(3.54)可逐次推得

$$d_{ruv} = 0,\ r = m-n-1,\ m-n-2, \cdots, 1-n;$$
$$0 \leqslant u+v \leqslant s+1,$$
$$c_{iuv} = 0,\ i = 1,2,\cdots,m-1,\ 0 \leqslant u+v \leqslant s+1.$$

由于

$$B_{2s+1}^{(1)}(x,y) = \int_x^{x+1} f(u,y)du,$$
$$B_{2s+1}^{(2)}(x,y) = \int_y^{y+1} f(x,u)du,$$
$$B_{2s+1}^{(1)}((x - x_{m-1})/h - 1,\ (y - y_{n-1})/l - 1)$$

和

$$B_{2s+1}^{(2)}((x - x_{m-1})/h - 1,\ (y - y_{n-1})/l - 1)$$

于 $r_{m-2,n-2}^{(1)}$ 上线性无关的,逐次设$(x,y) \in r_{m-2,n-2}^{(1)}, r_{m-3,n-2}^{(1)}, \cdots,$
$r_{0,n-2}^{(1)}, r_{m-2,n-3}^{(1)}, r_{m-3,n-3}^{(1)}, \cdots, r_{0,n-3}^{(1)}, \cdots, r_{m-2,0}^{(1)}, r_{m-3,0}^{(1)}, \cdots, r_{0,0}^{(1)}$,
即可从(3.54)依次推出

$a_{ij}^{(1)} = a_{ij}^{(2)} = 0, i = 1,2,\cdots, m-1; j = 1,2,\cdots, n-1$,
从而 $E^{2\nu+1}$ 是线性无关的.

3.3 $S_k^\mu(\Delta^{(2)})$ 中局部支集样条的存在性及其构造

用 T 表示如图 3.4 所示的八边形，$A(T) = \{a_1, \cdots, a_8)$，这里

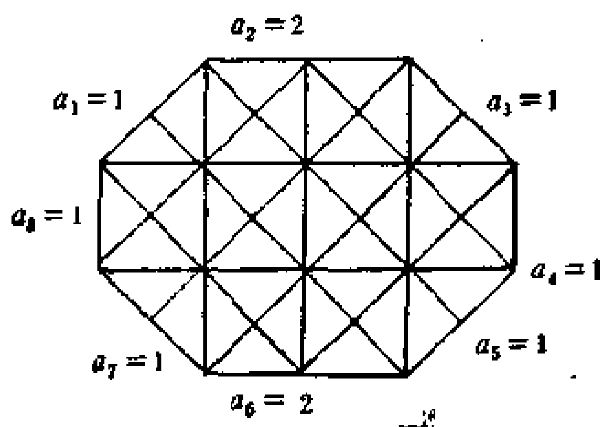


图 3.4

a_i 表示包含在第 i 条边上矩形的个数，$i = 1,2,\cdots,8$. 显然有

引理 3.39 如果 $B(x,y) \in S_k^\mu(\Delta^{(2)})$，且其支集为 T，$A(T) = (a_1, \cdots, a_8)$，则

$$B_1(x,y) = \int_{x-1}^{x} B(u,y)du$$

和

$$B_2(x,y) = \int_{y-1}^{y} B(x,u)du$$

属于 $S_{k+1}^\mu(\Delta^{(2)})$，且 $B_1(x,y)$ 和 $B_2(x,y)$ 的支集为 T_1 和 T_2，其定义为

$A(T_1) = (a_1,\ a_2+1,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6+1,\ a_7,\ a_8)$,

$A(T_2) = (a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4+1,\ a_5,\ a_6,\ a_7,\ a_8+1)$.

引理 3.40 如果 $B(x,y) \in S_k^\mu(\Delta^{(2)})$，其支集为 T，$A(T) = (a_1, \cdots, a_8)$，则

$$B_3(x,y) = \int_{x-1}^{x} B(u, y-x+u)du$$

和

$$B_4(x,y)=\int_x^{x+1} B(u, y+x-u)du$$

属于 $S^{\mu}_{d+1}(\Delta^{(2)})$，并且 $B_3(x, y)$，$B_4(x,y)$的支集分别为 T_3，T_4，这里

$$A(T_3)=(a_1+1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5+1,\ a_6,\ a_7,\ a_8),$$

$$A(T_4)=(a_1,\ a_2,\ a_3+1,\ a_4,\ a_5,\ a_6,\ a_7+1,\ a_8).$$

以下讨论 $S^{\mu}_{d}(\Delta^{(2)})$ 中的局部支集样条的存在性及其构造。当 $\mu=1, d=2$ 时，已知在 $S^1_2(\Delta^{(2)})$ 中存在 B 样条。如果人们能够在 $S^{3k+1}_{4k+2}(\Delta^{(2)})$ 中找到局部支集的 B 样条，$k=0,1,\cdots$，则可以通过下述步骤得到更为光滑的局部支集样条。

i) 由 $B(x,y)\in S^{3k+1}_{4k+2}(\Delta^{(2)})$ 构造 $B_2^{(j)}(x,y)\in S^{3k+2}_{4k+4}(\Delta^{(2)})$，$j=1,2,3$，$B(x,y)$ 的支集为 T，

$$A(T)=(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6,\ a_7,\ a_8),$$

并且

$$B_1^{(1)}(x,y)=\int_x^{x+1} B(s,y)ds,$$

$$B_1^{(2)}(x,y)=\int_y^{y+1} B(x,t)dt,$$

$$B_1^{(3)}(x,y)=\int_x^{x-1} B(s,y+x-s)ds,$$

$$B_2^{(1)}(x,y)=\int_x^{x+1} B_1^{(1)}(v,v+y-x)dv$$
$$=\int_y^{y+1} dv\int_{v+x-y}^{v+x-y+1} B(s,v)ds,$$

$$B_2^{(2)}(x,y)=\int_x^{x+1} B_1^{(2)}(v,v+y-x)dv$$
$$=\int_x^{x+1} dv\int_{v+y-x}^{v+y-x+1} B(v,t)dt,$$

$$B_2^{(3)}(x,y)=\int_x^{x+1} B_1^{(3)}(v,v+y-x)dv$$
$$=\frac{1}{2}\int_{x+y}^{x+y+2} dv\int_{(v+y-x)/2}^{(v+y-x-2)/2} B(s,v-s)ds.$$

$B_2^{(j)}(x, y)$，$j=1,2,3$ 为 $S^{3k+2}_{4k+4}(\Delta^{(2)})$ 的以 $T_2^{(1)}, T_2^{(2)}, T_2^{(3)}$ 为

支集的所有局部支集样条，其中

$$A(T_2^{(1)})=(a_1,\ a_2+1,\ a_3+1,\ a_4,\ a_5,a_6+1,a_7+1,a_8),$$

$$A(T_2^{(2)})=(a_1,a_2,a_3+1,\ a_4+1,\ a_5,\ a_6,a_7+1,a_8+1),$$

$$A(T_2^{(3)})=(a_1+1,\ a_2,a_3+1,a_4,a_5+1,a_6,a_7+1,a_8).$$

ii) 由 $B_2^{(i)}(x,\ y)\in S_{4k+4}^{3k+2}(\Delta^{(2)})$，$i=1,2,3$，构造局部支集样条

$$B_3^{(1)}(x,\ y)=\int_x^{x-1}B_2^{(1)}(u,\ y+x-u)du$$

$$=\int_x^{x-1}du\int_{y+x-u}^{y+x-u+1}dv\int_{v-2u-x-y}^{v-2u-x-y+1}B(s,v)ds$$

$$B_3^{(2)}(x,\ y)=\int_x^{x-1}B_2^{(2)}(u,y+x-u)du$$

$$=\int_x^{x-1}du\int_u^{u+1}dv\int_{v-2u+x+y}^{v-2u+x+y+1}B(v,t)dt,$$

它们的支集分别为 $T_3^{(1)}$，$T_3^{(2)}$，其中

$$A(T_3^{(1)})=(a_1+1,\ a_2+1,\ a_3+1,\ a_4,\ a_5+1,\ a_6+1,\ a_7+1,\ a_8),$$

$$A(T_3^{(2)})=(a_1+1,\ a_2,a_3+1,\ a_4+1,\ a_5+1,a_6,\ a_7+1,\ a_8+1).$$

iii) 构造

$$B_4(x,y)=\int_x^{x+1}B_3^{(2)}(s,y)ds$$

$$=\int_x^{x+1}ds\int_s^{s-1}du\int_u^{u+1}dv\int_{v-2u+y+s}^{v-2u+y+s+1}B(v,t)dt.$$

它是以 T_4 为支集的 $S_{4k+6}^{3k+4}(\Delta^{(2)})$ 中的局部支集样条，其中

$$A(T_4)=(a_1+1,\ a_2+1,\ a_3+1,\ a_4+1,\ a_5+1,\ a_6+1,\ a_7+1,\ a_8+1),$$

重复以上过程，便可得到 $S_k^{\mu}(\Delta^{(2)})$ 中的所有局部支集样条。

定理 3.41 $S_k^{\mu}(\Delta^{(2)})$ 中存在局部支集样条的充分必要条件是

$$k>\frac{4\mu+1}{3}.$$

借助于上述的积分递推方法，即可得到 $S_k^{\mu}(\Delta^{(2)})$ 的局部支集样

条.

以下给出 $S_k^\mu(\Delta_{mn}^{(2)},D)$ 的基底，这里 $D=\{(x,y):\ a\leqslant x\leqslant b,\ c\leqslant y\leqslant d\}$，$h=(b-a)/m$，$l=(d-c)/n$，$\Delta_{mn}^{(2)}$ 是由直线 $x=x_i=a+ih$，$y=y_j=c+jl, x+y=x_i+y_j, x-y=x_i-y_j$，$i=0,1,\cdots,m$；$j=0,1,\cdots,n$. 构成$D$的剖分. 容易证明

定理 3.42 $S_{4k+4}^{3k+2}(\Delta_{mn}^{(2)},\Delta)$ 的基底为

$$
\begin{aligned}
P^{3k+2}=\{&B_{3k+2}^{(1)}((x-x_i)/h,\ (y-y_j)/l),\ B_{3k+2}^{(2)}((x-x_i)/h,\\
&(y-y_j)/l),\ B_{3k+2}^{(3)}((x-x_i)/h,\ (y-y_j)/l),\\
&(x-x_m)^s(y_j-y)_+^{t+3k+3},\ (i=1,2,\cdots,m,\\
&j=1,2,\cdots,\ n-1,\ 0\leqslant s+t\leqslant k+1,\ (s,\ t)\\
&\neq(s_{3k+2}^r,\ t_{3k+2}^r),r=1,2,3);(y-y_0)^s(x_i-x)_+^{3k+3+t}(i\\
&=1,\ 2,\cdots,\ m-1,\ 0\leqslant s+t\leqslant k+1);\ (x-x_0\\
&+y-y_0)^s((x-x_0)/h+(y-y_0)/l-u)_+^{t+3k+3}(u\\
&=1,2,\cdots,m+n-1,\ 0\leqslant s+t\leqslant k+1);(x-x_0\\
&+y-y_0)^s((y-y_0)/l-(x-x_0)/h-v)_+^{t+3k+3}(v\\
&=1-n,\ 2-n,\cdots,m-1-n,\ 0\leqslant s+t\\
&\leqslant k+1);(x-x_0)^p(y-y_0)^q(0\leqslant p+q\leqslant 4k+4)\};
\end{aligned}
$$

$S_{4k+5}^{3k+3}(\Delta_{mn}^{(2)},D)$ 的基底为

$$
\begin{aligned}
P^{3k+3}=\{&B_{3k+3}^{(1)}((x-x_i)/h,\ (y-y_j)/l),B_{3k+3}^{(2)}((x-x_i)/h,\\
&(y-y_j)/l)\ (i=1,2,\cdots,m,j=1,2,\cdots,n-1);\\
&(x-x_m)^s(y_j-y)_+^{t+3k+4}(j=1,2,\cdots,n-1,\\
&0\leqslant s+t\leqslant k+1,\ (s,t)\neq(s_{3k+3}^r,\ t_{3k+3}^r),\ r=1,2);\\
&(y-y_0)^s(x_i-x)_+^{3k+4+t}(i=1,2,\cdots,m-1,\\
&0\leqslant s+t\leqslant k+1);(x-x_0+y-y_0)^s((x-x_0)/h\\
&+(y-y_0)/l-u)_+^{3k+4+t}(u=1,2,\cdots,m+n-1,\\
&0\leqslant s+t\leqslant k+1);\ (x-x_0+y-y_0)^s(-(x\\
&-x_0)/h+(y-y_0)/l-v)_+^{3k+4+t}(v=1-n,\ 2\\
&-n,\cdots m-1-n,\ 0\leqslant s+t\leqslant k+1);(x-x_0\\
&+y-y_0)^s((x-x_0)/h-(y-y_0)/l+v)_+^{t+3k+4}(v
\end{aligned}
$$

$= m-n,\ m-n+1,\cdots,m-1,\ 0\leqslant s+t$

$\leqslant k+1);(x-x_{0})^{p}(y-y_{0})^{q}(0\leqslant p+q\leqslant 4k+5)\};$

$S_{4k+6}^{3k+4}(\Delta_{mn}^{(2)},D)$ 的基底为

$$
\begin{aligned}
P^{3k+4}=\{&B_{3k+4}((x-x_{i})/h,\ (y-y_{j})/l)(i=1,2,\cdots,m,\ j\\
&=1,2,\cdots,n-1);\ (x-x_{m})^{s}(y_{j}-y)_{+}^{3k+5+t}(j\\
&=1,2,\cdots,n-1,\ 0\leqslant s+t\leqslant k+1);(y-y_{0})^{s}(x_{i}\\
&-x)_{+}^{3k+5+t}(i=1,2,\cdots,m-1,0\leqslant s+t\\
&\leqslant k+1,(s,t)\neq(s_{3k+4},t_{3k+4}));(x-x_{0}-y+y_{0})^{s}((x\\
&-x_{0})/h+(y-y_{0})/l-u)_{+}^{t+3k+5}(u=1,2,\cdots,m\\
&+n-1,\ 0\leqslant s+t\leqslant k+1);\ (x-x_{0}+y\\
&-y_{0})^{s}((y-y_{0})/l-(x-x_{0})/h-v)_{+}^{t+3k+5}(v\\
&=1-n,\ 2-n,\cdots,m-1-n,\ 0\leqslant s+t\leqslant k\\
&+1);\ (x-x_{0}+y-y_{0})^{s}((x-x_{0})/h-(y\\
&-y_{0})/l+v)_{+}^{t+3k+5}(v=m-n,m-n+1,\cdots,m\\
&-1,\ 0\leqslant s+t\leqslant k+1);\ (x-x_{0})^{p}(y-y_{0})^{q}\ (0\\
&\leqslant p+q\leqslant 4k+6)\},
\end{aligned}
$$

此处 $(s_{3k+2}^{r},\ t_{3k+2}^{r})=(b_{r},\ c_{r}),\ r=1,2,3$ 满足

$$
\det\begin{pmatrix} z_{b_{1},c_{1}}^{(1)} & z_{b_{2},c_{2}}^{(1)} & z_{b_{3},c_{3}}^{(1)}\\ z_{b_{1},c_{1}}^{(2)} & z_{b_{2},c_{2}}^{(2)} & z_{b_{3},c_{3}}^{(2)}\\ z_{b_{1},c_{1}}^{(3)} & z_{b_{2},c_{2}}^{(3)} & z_{b_{3},c_{3}}^{(3)}\end{pmatrix}\neq 0,
$$

而 $z_{bc}^{(r)},r=1,2,3,$可由下式求得

$$
B_{3k+2}^{(r)}=\sum_{0\leqslant b+c\leqslant k+1} z_{bc}^{(r)}x^{b}y^{c+3k+3},\ (x,y)\in w_{m-1,n-2}^{(1)},
$$

$r=1,2,3,$

并且 $(s_{3k+3}^{r},\ t_{3k+3}^{r})=(d_{r},\ e_{r});\ r=1,2$ 满足

$$
\det\begin{pmatrix} w_{d_{1},e_{1}}^{(1)} & w_{d_{2},e_{2}}^{(1)}\\ w_{d_{1},e_{1}}^{(2)} & w_{d_{2},e_{2}}^{(2)}\end{pmatrix}\neq 0,
$$

而 $w_{de}^{(r)},\ r=1,2$ 可由下式求得

$$
B_{3k+3}^{(r)}=\sum_{0\leqslant d+e\leqslant k+1} w_{de}^{(r)}x^{d}y^{e+3k+4},\ (x,\ y)\in w_{m-1,n-1}^{(1)},\ r
$$

$=1, 2,$

剩下的 $(s_{3k+4},\ t_{3k+4})=(g,\ h)$ 可由下式求得

$$B_{3k+4}=\sum_{0\leqslant g+h\leqslant k+1} v_{gh}x^{g}y^{h+3k+5},\ (x,\ y)\in w^{(2)}_{(m-1)(m-2)}$$

其中 $v_{gh}\neq 0$。

第四章 高维样条

前几章我们对多元样条做了整体的概述并侧重讨论了二元样条．本章将介绍二元以上的样条，简称高维样条．

熟知二元样条的研究较一元情况远为困难．主要原因是维数的增加导致了剖分的复杂性，并由此引起了样条空间结构的奇异变化，即样条空间的维数依赖剖分的几何性质．这种困难同样存在于高维样条的研究中．表现之一是高维样条空间奇异结构性质的固有性——定义在同一剖分上的光滑阶数固定的高维样条空间结构的奇异性不会随样条次数的增加而消失．这点与二元样条有明显的不同．研究高维样条的另一个难点是刻划其光滑性的关系更为复杂．能否找到简洁而明显的关系是研究高维样条的关键之一．本章将介绍的多元样条研究的协调插值法正是在这方面的尝试．这种方法是作者之一在[81]、[82]中引进的．在理论上，协调插值法与光滑余因子协调法及第六章要介绍的 B 网方法是等价的(限制在单纯形剖分上)．

本章的内容主要取材于[81]中的工作．我们将介绍协调插值方法的一般理论及其在研究高维样条空间的维数、高维样条一点维数问题、以及高维样条的细分等问题中的应用，最后还将介绍求样条函数空间维数的参数引入法．我们将看到，用该方法求维数不必同时求出基函数．所以一些传统方法不能或很难解决的问题，都可以用该方法较好地解决．

§1. 协调插值法

本章仍然用 D 表示 $\mathbb{R}^n$ 中的区域，如无特别声明，D 为多面体区域，D 上的单纯形剖分依然记为Δ，等等．与二元情况类似，Δ

中所有包含同一单纯形$\sigma\in\Delta$的单纯形所生成的新单纯形剖分称为 σ-星（域），记为 $\mathrm{St}(\sigma)$. $\mathbf{R}^n$ 中的过σ内一点 w（σ 的维数 $\dim\sigma\geqslant 1$）与σ垂直的 $n-\dim\sigma$ 维超平面与 $\mathrm{St}(\sigma)$ 的截痕称为(关于w的) σ-星截，记为 $\mathrm{Ts}(\sigma)$。此外，我们还记 $V(\sigma)$ 为σ的顶点集合，并引入记号

$$D^{\lambda}_{v\ni\sigma}f(v)=\prod_{w\in V(\sigma)\setminus v}D^{\lambda_w}_{w-v}p_\sigma(v) \tag{4.1}$$

这里的 f 是定义在 $\mathbf{R}^n$ 中单纯形剖分Δ上的样条，$p_\sigma=f|_\sigma$ 是 f 限制在σ上的多项式。一般地，我们并不要求σ是n单纯形。显然，如果 $v\in\sigma_1\subset\sigma_2$，则 $\{D^{\lambda_1}_{v\ni\sigma_1}f(v)\}_{|\lambda_1|=|\lambda_2|}$ 是$\{D^{\lambda_2}_{v\ni\sigma_2}f(v)\}_{|\lambda_2|=|\lambda_2|}$ 的子集。 为方便起见，记 $S_k^{-1}(\Delta)$ 代表Δ上的非连续 k 次样条空间。

定义 4.1 设顶点 $v\in\Delta$，$\mathrm{St}(v)$ 为 v-星。f 是Δ上的k次样条，我们称 f 在顶点v处$(\alpha,\ \mu)$-协调$(\alpha\leqslant k)$，如果由条件

$$D^{\lambda}_{v\ni\sigma}f_1(v)=D^{\lambda}_{v\ni\sigma}f(v),\quad |\lambda|\leqslant\alpha \tag{4.2}$$

确定的样条 $f_1\in S_k^{\mu}(\mathrm{St}(v))$，其中$n$单纯形 $\sigma\in\mathrm{St}(v)$.

命题 4.2 设 v，Δ，$\mathrm{St}(v)$及 f 如定义 4.1 所述，则 f 在v点(α,μ)- 协调的充要条件是对 $\mathrm{St}(v)$ 中任何两个具有$n-1$维公共面的n单纯形 $\sigma_i=[\sigma,\ v_i]$，$i=1,2$，如下条件成立

$$D^{i}_{v_2-v}D^{\lambda}_{v\ni\sigma}p_{\sigma_2}(v)=\Big(\sum_{w\in V(\sigma)\setminus v}C_wD_{w-v}+C_1D_{v_1-v}\Big)^{i}D^{\lambda}_{v\ni\sigma}p_{\sigma_1}(v),$$

$$i+|\lambda|\leqslant\alpha,\ 0\leqslant i\leqslant\mu, \tag{4.3}$$

其中

$$v_2-v=\sum_{w\in V(\sigma)\setminus v}C_w(w-v)+c_1(v_1-v),\ p_{\sigma_i}=f|_{\sigma_i}. \tag{4.4}$$

这里我们称两个单纯形(不必维数相同)有 i 维公共面是指其交为 i 单纯形。

证明 必要性是显然的，我们只证明充分性。设 f_1，$f_1|_\sigma=p_\sigma\in\mathbf{P}_k$，由(4.2)确定。先证 $f_1\in S_k^{\mu}(\mathrm{St}(v))$。事实上，条件(4.3)等

价于

$$D^i_{v_2-v}D^\lambda_{v_2\sigma}p_{\sigma_2}(v)=D^i_{v_2-v}D^\lambda_{v_2\sigma}p_{\sigma_1}(v),0\leqslant i\leqslant\mu, i+|\lambda|\leqslant a. \tag{4.5}$$

在(4.5)中取 $i=0$,则不难证得

$$p_{\sigma_2}|_\sigma=p_{\sigma_1}|_\sigma.$$

从而存在 $p\in\mathbf{P}_{a-1}$,使得

$$p_{\sigma_2}-p_{\sigma_1}=p\pi_\sigma$$

成立,这里 $\pi_\sigma=0$ 是 σ 所确定的 $n-1$ 维超平面. 在(4.5)中连续取 $i=1,\cdots,\mu$,并重复上述过程,即可证明存在 $p_\mu\in\mathbf{P}_{a-\mu-1}$,使得

$$p_{\sigma_2}-p_{\sigma_1}=p_\mu\pi_\sigma^{\mu+1}.$$

这就证明了 p_{σ_2} 与 p_{σ_1} 是 C^μ 光滑连接的. 由于 σ_1 和 σ_2 可为 St(v)中的任何两个具有 $n-1$ 维公共面的 n 单纯形,从而

$$f_1\in S^\mu_a(\mathrm{St}(v)).$$ □

显然,定义在空间 $S^{-1}_a(\mathrm{St}(v))$ 上的线性泛函集合

$$X=\{l_{\lambda,\sigma}|l_{\lambda,\sigma}(f)=D^\lambda_{v,\sigma}f(v),\ |\lambda|\leqslant a,\ \sigma\in\mathrm{St}(v)\}$$

是其对偶空间 $(S^{-1}_a(\mathrm{St}(v))^*$的基底. 一般地,我们有

命题 4.3 若 X 中的元素满足(4.3)式, 即 X 是定义在使(4.3)式成立的 $S^{-1}_a(\mathrm{St}(v))$ 的子空间 S 上,则

$$\mathrm{span}X=(S^\mu_a(\mathrm{St}(v))^*.$$

从而 X 中线性无关的元素的个数

$$N^\mu_a=\dim S^\mu_a(\mathrm{St}(v)).$$

证明 只需往证

$$S=S^\mu_a(\mathrm{St}(v)).$$

若 $f\in S$, 由命题 4.2,

$$f\in S^\mu_a(\mathrm{St}(v)).$$

即

$$S\subset S^\mu_a(\mathrm{St}(v)).$$

反之,若 $f\in S^\mu_a(\mathrm{St}(v))$,再次利用命题 4.2,则 f 必满足(4.3)式,从而 $f\in S$, 即

$$S^{\mu}_{a}(\mathrm{St}(v)) \subset S.$$

证毕.

在以后的论述中，我们还要用到 σ-星截的协调概念. 设 $\sigma \in \Delta$ 是一个 i-单纯形 $(i \geqslant 1)$, $[\sigma, v] \subset \mathrm{St}(\sigma)$ 是以 σ 为其 i 维面的 $i+1$ 维单纯形，并记 $[\sigma, v]$ 关于 σ 的单位内法向量为 e_v，而 $V_\delta(\sigma) = V(\sigma) \backslash V(\delta)$ 为单纯形 σ 的所有不属于 $\delta \subset \sigma$ 的顶点集合.

定义 4.4 设 w 是 i 单纯形 $\sigma(i \geqslant 1)$ 的一个内点，称 $f \in S^{-1}_k(\Delta)$（在 w 点）(a, b, μ, σ)-协调，如果对任意两个相邻的 n 单纯形 $\delta_j = [\delta, v_j] \in \mathrm{St}(\sigma), j = 1,2$，下面条件成立

$$D^i_{e_v} D^\lambda_{\sigma,\delta} f(w) = \Big(\sum_{v \in V_\sigma(\delta)} c_v D_{e_v} + c_{e_1} D_{e_1} \Big)^i D^\lambda_{\sigma,\delta} f(w), \tag{4.6}$$

其中 $e_j = e_{v_j}$ $0 \leqslant i \leqslant \mu$, $a \leqslant i + |\lambda| \leqslant b \leqslant k$, δ 为 δ_1 和 δ_2 的 $n-1$ 维公共面，而

$$D^i_{e_j} D^\lambda_{\sigma,\delta} f(w) = \Big(D^i_{e_j} \prod_{v \in V_\sigma(\delta)} D^{\lambda_v}_{v} \Big) p_j(w), \quad p_j = f|\delta_j,$$

$$j = 1,2.$$

由 σ 星截的定义，关于 i 单纯形 σ 内一点 w 的 σ 星截 $\mathrm{Ts}(\sigma)$ 可看做 $\mathbf{R}^{n-i}$ 中的 w 星. 从而与命题 4.3 类似的有

命题 4.5 若 $S^{-1}_b(\mathrm{St}(\sigma))$ 上的线性泛函集合

$$X = \{ l_{\lambda,\delta} \mid l_{\lambda,\delta}(f) = D^\lambda_{\sigma,\delta} f(w),\ a \leqslant |\lambda| \leqslant b, \delta \in \mathrm{St}(\sigma) \}$$

满足(4.6)式，这里 δ 是 $\mathrm{St}(\sigma)$ 中的 n 单纯形，则 X 中线性无关的元素的个数

$$N^\mu_{a,b}(\sigma) = \dim S^\mu_b(\mathrm{Ts}(\sigma)) - \dim S^\mu_{a-1}(\mathrm{Ts}(\sigma)),$$

其中 $\dim S^\mu_m(\mathrm{Ts}(\sigma)) = \dim S^\mu_m(\mathrm{St}(w))$，此处 $\mathrm{St}(w)$ 是由 $\mathrm{Ts}(\sigma)$ 诱导出的 $\mathbf{R}^{n-i}(i = \dim\sigma)$ 中的 w-星. 此外当 $a < 0$ 时，定义 $\dim S^\mu_a(\mathrm{Ts}(\sigma)) = 0$.

命题 4.5 的证明是显然的. 我们只需注意到

$$N^\mu_{a,b}(\sigma) = N^\mu_{0,b}(\sigma) - N^\mu_{0,a-1}(\sigma).$$

再由命题 4.3, $N^{\mu}_{0,m}(\sigma)=\dim S^{\mu}_{m}(\mathrm{St}(w))$, 从而证明了命题 4.5. □

用协调插值法研究多元样条，首先要适当地给出一些插值条件，使其在每个 n 单纯形上，都唯一地确定一个次数与样条次数相同的多项式。因此，在研究 k 次 μ 阶样条时，在 n 单纯形上，我们需要引入适当的插值条件。若无特别声明，$D^{\lambda}_{v,\sigma}f(v)$ 和 $D^{\lambda}_{\delta,\sigma}f(w)$ 总和(4.1)及定义 4.4 所示。

以下我们以 $\mathbb{R}^3$ 为例说明协调插值方法的基本思想。

设四面体 $\sigma\subset\Delta$($\mathbb{R}^3$中的单纯形剖分)。对 σ 上的 k 次多项式 f 引入下面的条件：

i) 在每个顶点 $v\in\sigma$ 处，引入

$$\{D^{\lambda}_{v,\sigma}f(v)\}_{|\lambda|\leqslant 4\mu}; \tag{4.7}$$

ii) 对 σ 的每个边 e，若 $k\geqslant 6\mu+2$，则引入

$$\{D^{\lambda}_{e,\sigma}f(w_i)\}_{a_i\leqslant|\lambda|\leqslant 2\mu},\ 1\leqslant i\leqslant k-6\mu-1, \tag{4.8}$$

其中 w_i, $1\leqslant k-6\mu-1$ 是 e 的不同内点，

$$a_i=\max\{0,i+8\mu+1-k\};$$

iii) 对 σ 的每个三角形面 δ，$D^{i}_{\delta,\sigma}f|_{\delta}$ 有如下的 Bézier 形式：

$$D^{i}_{\delta,\sigma}f(x)=\sum_{i_1+i_2+i_3=k-i} b_{i_1,i_2,i_3}\frac{(k-i)!}{i_1!i_2!i_3!}\tau_1^{i_1}\tau_2^{i_2}\tau_3^{i_3},$$

其中 $(\tau_1,\ \tau_2,\ \tau_3)$ 是 $x(\in\delta)$ 关于 δ 的面积坐标。不妨设 δ 的顶点是 v_1,v_2,v_3。由 Bézier 坐标与导数的关系知，当 $i_1\leqslant 2\mu-i$ 时，b_{i_1,i_2,i_3} 由条件 i)和 ii)确定。而当 $i_1\geqslant k-4\mu$ 时，b_{i_1,i_2,i_3} 可由 i) 中的值确定。对 i_2 和 i_3 也有同样的结论。从而只有当 i_1,i_2,i_3 满足

$$2\mu-i+1\leqslant i_1,\ i_2,\ i_3\leqslant k-4\mu,\ i_1+i_2+i_3=k-i$$

时，b_{i_1,i_2,i_3} 才需借助引入新的条件去确定。设满足上式的 i_1, i_2, i_3 共有 $M(i,2)$ 组（若无 i_1, i_2, i_3 满足上式，则令 $M(i,2)=0$）。当 $M(i,2)\geqslant 1$ 时，引入

$$\{D^{i}_{\delta,\sigma}f(w_j);\ 1\leqslant j\leqslant M(i,\ 2)\}_{0\leqslant i\leqslant\mu}, \tag{4.9}$$

其中 w_j, $1\leqslant j\leqslant M(i,d)$ 是 δ 的适当内点，使得条件 (4.7)—(4.9)可共同确定 $D^{i}_{\delta,\sigma}f|_{\delta}$, $0\leqslant i\leqslant\mu$。

iv) 对 σ 自身，与 iii)类似，当 $i_j \geqslant k-4\mu$ 或 $i_j \leqslant \mu(j=1,2,3,4)$时，

$$f=\sum_{|\lambda|=k} b_\lambda B_\lambda^k(\tau),\ \lambda=(i_1,\ i_2,\ i_3,\ i_4)$$

中的 b_λ 已由(4.7)—(4.9)确定．仅当

$$\mu+1 \leqslant i_1,\ i_2,\ i_3,\ i_4 \leqslant k-4\mu+1,\ |\lambda|=k$$

时，才需对 b_λ 引入新的条件．记满足上式的 λ 的个数为 $M(0,3)$．当 $M(0,3) \geqslant 1$ 时，引入

$$f(w_i),\ 1 \leqslant i \leqslant M(0,\ 3), \tag{4.10}$$

其中 w_i, $1 \leqslant i \leqslant M(0,3)$ 是 σ 的适当内点．

一般地，我们并不要求(4.7)—(4.10)中的条件互相独立，即它们可以是线性相关的条件．但我们要求它们是相容的，即能唯一地确定一个 σ 上的 k 次多项式．只有当 $k \geqslant 8\mu+1$ 时，(4.7)—(4.10)中的条件才是互相独立的．

引入上面的条件 i)—iv) 后，我们有

定理 4.6([81],[82]) 设 f 是定义在 $\mathbf{R}^3$ 中单纯形剖分 Δ 上的 k 次样条，则 $f \in S_k^\mu(\Delta)$ 的充要条件是：

1) f 在 Δ 的每个顶点处都是$(4\mu,\ \mu)$-协调的．

2) 设边 $e \in \Delta$, w_i 和 a_i 如(4.8)中所述，则 f 在 w_i 点处$(a_i,\ 2\mu,\ \mu,\ e)$-协调，$1 \leqslant i \leqslant k-6\mu-1$．

3) 设 $\delta \in \Delta$是三角形，$M(i,2)$ 与 w_j 如(4.9)所述，则 f 在 w_j 点处(i,μ,μ,δ)-协调，$0 \leqslant i \leqslant \mu$，这里 $M(i-1,2)+1 \leqslant j \leqslant M(i,\ 2)$，$M(-1,\ 2)=0$ 及 $M(i,\ 2) \geqslant 1$．

定理 4.6 的证明请见下面的定理 4.6′，那里我们的证明是针对一般的 $\mathbf{R}^n$ 的．定理 4.6 的证明也可参考[81]或[82]．

以上的讨论，完全可以平行地用于 $\mathbf{R}^n$ 中的单纯形 Δ．

对 Δ 中的 n 单纯形 σ，我们考虑下面的条件：

i)′ 在每个顶点 $v \in \sigma$，引入

$$\{D_{v,\sigma}^\lambda f(v)\}_{|\lambda| \leqslant 2^{n-1}\mu}; \tag{4.7′}$$

ii)′ 对 σ 的每个边 e，如果 $k \geqslant 3 \cdot 2^{n-2}\mu+2$，则引入

$$\{D_{e,\alpha}^{\lambda}f(w_i)\}_{a_i\leqslant|\lambda|\leqslant 2^{n-2}\mu},\quad 1\leqslant i\leqslant k-3\cdot 2^{n-2}\mu-1, \tag{4.8$'$}$$

其中 w_i, $1\leqslant i\leqslant k-3\cdot 2^{n-2}\mu-1$ 是 e 的不同内点,而

$$a_i=\max\{0,\ i+2^n\mu+1-k\}.$$

iii)′ 对 σ 的每个 α 维面 $\delta(2\leqslant d\leqslant n-1)$,当 $M(|\lambda|,d)\geqslant 1$ 时,引入

$$\{D_{\delta,\alpha}^{\lambda}f(w_j);\ 1\leqslant j\leqslant M(|\lambda|,\ d)\}_{|\lambda|\leqslant 2^{n-d-1}\mu}, \tag{4.9$'$}$$

其中 w_j, $1\leqslant j\leqslant M(|\lambda|,d)$为 δ 的适当内点,使得对任何的 λ, $|\lambda|\leqslant 2^{n-d-1}\mu$,条件 (4.9)′ 及在 δ 面上所引入的条件可共同确定 $D_{\delta,\alpha}^{\lambda}f|_{\delta}$. 如果在 δ 面上引入的条件已可确定 $D_{\delta,\alpha}^{\lambda}f|_{\delta}$,则定义

$$M(|\lambda|,\ d)=0.$$

iv)′ 对 σ 自身,引入条件

$$f(w_i),\ 1\leqslant i\leqslant M(0,\ n), \tag{4.10$'$}$$

使得(4.10)′及在 σ 面上所引入的条件一起, 可唯一的确定一个定义在 σ 上的 k 次多项式.

关于 $M(i,d)$,显然有 $M(i+1,\ d)\geqslant M(i,\ d)$, 这是因为在 d 单纯形的每个 $d-1$ 维面 ρ 上,$D_{\rho,\delta}^{i}D_{\delta,\alpha}^{\lambda}f|_{\rho}$,$0\leqslant i\leqslant 2^{n-d}\mu-|\lambda|$都是已知的. 从而要在 d 的内部给出的条件 (连同边界条件) 要确定的是 $k-|\lambda|-(d+1)(2^{n-d}\mu-|\lambda|+1)=k-(d-1)2^{n-d}\mu+d|\lambda|-d-1$ 次 d 元多项式,从而 $M(|\lambda|,d)$ 随$|\lambda|$的增加而增加.

与定理 4.6 平行地,我们有

定理 4.6′[82] 设 f 是定义在 $\mathbf{R}^n$ 中单纯形剖分 Δ 上的 k 次样条,则 $f\in S_k^{\mu}(\Delta)$ 的充要条件是

1) 在Δ中每个顶点处, f 是 $(2^{n-1}\mu,\ \mu)$-协调的;

2) 对Δ中的每个边 e, 若 w_i 及 a_i 如条件 ii)′ 中所述,则 f 在 w_i 点处 $(a_i,\ 2^{n-2}\mu,\ \mu,\ e)$ 协调, $1\leqslant i\leqslant k-3\cdot 2^{n-2}\mu-1$;

3) 对Δ中的 d 单纯形 $\delta(2\leqslant d\leqslant n-1)$,$w_i$ 和 $M(|\lambda|,d)$ 如 iii)′中所述, 则当 $M(|\lambda|,\ d)\geqslant 1$ 时, f 在 $w_i(M(|\lambda|-1,\ d)+1\leqslant i\leqslant M(|\lambda|,\ d))$ 点处$(|\lambda|,\ 2^{n-d-1}\mu,\ \mu,\ \delta)$-协调.

证明 设 $f\in S_k^{r-1}(\Delta)$ 满足 1),2)和 3). $\sigma_i=[\rho, v_i]$, $i=1, 2$ 是两个具有 $n-1$ 维公共面 ρ 的 n 单纯形. 设 $p_i=f|_{\sigma_i}$. 由条件 i)',ii)'和 iii)'的取法知, 对任何 σ_1, σ_2 的 d 维公共面 δ 及 λ, $|\lambda|\leqslant 2^{n-d-1}\mu$, $D^{\lambda}_{\delta,v_i}p_i|_\delta$ 由相应的条件(4.7)',(4.8)'和(4.9)'唯一确定. 又若 f 满足条件 1),2)和 3), 对 d 用数学归纳法不难证明

$$D^i_{e_2}D^{\lambda}_{\delta,\rho}p_2|_\delta=D^i_{e_1}D^{\lambda}_{\delta,\rho}p_1|_\delta, \tag{4.11}$$

其中 $0\leqslant i\leqslant\mu$, $i+|\lambda|\leqslant 2^{n-d-1}\mu$, δ 为 n 单纯形 $\sigma_i=[\rho, v_i]$, $i=1, 2$ 的 d 维公共面, e_i 是 $[\delta, v_i]$ 关于 δ 的单位法向量.

事实上,当 $d=0$ 时,即 δ 为一个顶点时, (4.11)可由 1)立即得出. 现设(4.11)当 $d=j\leqslant n-2$ 时成立,则当 $d=j+1$ 时,由归纳法假设,

$$D^i_{e_2}D^{\lambda}_{\delta_s,\rho}p_2|_{\delta_s}=D^i_{e_1}D^{\lambda}_{\delta_s,\rho}p_1|_{\delta_s}$$

对任何 i,λ, $0\leqslant i\leqslant\mu$, $i+|\lambda|\leqslant 2^{n-1-\dim\delta_s}\mu$, 及 δ 的面 δ_s 都成立. 另一方面,由 3)知 f 在点 w_t, $1\leqslant t\leqslant M(i+|\lambda|,d)$ 处都是 $(i+|\lambda|,\ 2^{n-d-1}\mu,\mu,\delta)$-协调的. 再由(4.5)得

$$D^i_{e_2}D^{\lambda}_{\delta,\rho}p_2(w_t)=D^i_{e_1}D^{\lambda}_{\delta,\rho}p_1(w_t),\quad 1\leqslant t\leqslant M(i+|\lambda|,d).$$

按 w_t, $1\leqslant t\leqslant M(i+|\lambda|, d)$ 的取法, 易知当 $d=j+1$ 时, (4.11)也成立.

特别地,当 $d=n-1$ 时,(4.11)成立. 从而
$f\in C^\mu(\sigma_1\cup\sigma_2)$ 更进一步地有,$f\in S_k^\mu(\Delta)$. 这就证明了定理 4.6 的充分性.

反之,若 $f\in S_k^\mu(\Delta)$,则存在 $p\in\mathbf{P}_{k-\mu-1}$,使得

$$p_2-p_1=p\pi^{\mu+1}, \tag{4.12}$$

其中 π 是由 σ_1 和 σ_2 的 $n-1$ 维公共面 ρ 确定的超平面方程,所以当 $0\leqslant i\leqslant\mu$ 时,有

$$D^i_{e_2}D^{\lambda}_{\delta,\rho}f|_\delta=D^i_{e_2}D^{\lambda}_{\delta,\rho}p|_\delta=D^i_{e_1}D^{\lambda}_{\delta,\rho}p_1|_\delta$$
$$=\Big(c_{v_1}D_{e_{v_1}}+\sum_{v\in V(\rho)}c_ve_v\Big)^iD^{\lambda}_{\delta,\rho}f|_\delta,$$

其中c_v，$v\in\sigma_1$由(4.6)式给出．从而不难证明f满足1)，2)和3)．□

用协调插值法研究多元样条，插值条件的引入可以有多种方法，i)—iv)（及相应的i)′—iv)′)只不过是其中的一种．具体用什么条件，主要取决于样条的次数，剖分等因素．下文中，我们将举出一些实例来说明这一点．

例如考虑定义在Δ(在$\mathbf{R}^n$中)上的样条空间$S_2^1(\Delta)$，则只需引入如下条件

$$\{D_{v,\sigma}^{\lambda}f(v)\,|\,|\lambda|\leqslant 1,\ \sigma\in \mathrm{St}(v)\}_{v\in\Delta},\tag{4.13}$$

其中σ为n单纯形．

定理 4.7[91]　设$f\in S_2^0(\Delta)$，则$f\in S_2^1(\Delta)$的充要条件是

i) 在每个顶点$v\in\Delta$处，(4.13)是(1.1)协调的；

ii) 对Δ中的每条网线$e=[v,w]$，(4.13)中的条件满足

$$2f(v)+D_{v,w}f(v)=2f(w)+D_{w,v}f(w).\tag{4.14}$$

如果记关于Δ的所有形如(4.14)的方程组为$AY=0$，则

$$\dim S_2^1(\Delta)=(n+1)N-\mathrm{rank}(A),\tag{4.15}$$

这里N是Δ中所含顶点个数．

证明　我们先证i)和ii)．由定理4.6，若$f\in S_2^1(\Delta)$，则f在Δ的每个顶点处都(1,1)-协调，即i)成立．又f在Δ的每条网线$e=[v,w]$上都是二次(一元的)多项式，设为

$$p(x)=f(v)\tau^2+a\tau(1-\tau)+f(w)(1-\tau)^2,$$

其中$x=\tau v+(1-\tau)w$．直接计算可得

$$a=2p(v)+D_{w-v}p(v)=2p(w)+D_{v-w}p(w),$$

即(4.14)成立．

反之，若(4.13)满足ii)，则不难看出条件(4.13)在Δ中的每个n单纯形上，都唯一地确定了一个二次多项式．设$\sigma_i=[\delta,v_i]$，$i=1,2$，具有$n-1$维公共面δ，而p_i，$i=1,2$，是分别定义在σ_i的二次多项式．若(4.13)满足条件i)，由(4.5)式不难证明p_1与p_2之间是光滑连接的，即$f\in C^1(\sigma_1\cup\sigma_2)$．进而易证$f\in S_2^1(\Delta)$．另外，我们只需注意到$Y$的分量个数为$(n+1)N$，就可证明定理

4.7 的后半部分. □

由(4.15)立即得到下面的有趣推论.

推论 4.8[82] 若剖分 Δ_1 与 Δ_2 含有相同的顶点和边,则

$$\dim S_2^1(\Delta_1)=\dim S_2^1(\Delta_2).$$

在推论 4.8 中,Δ_1 中的顶点及内边,并不一定是 Δ_2 的内顶点及内边,反之亦然. 例如著名的 Morgan-Scott 剖分 Δ_{ms},将其中间的三角形去掉后的剖分记为 $\bar{\Delta}_{ms}$,则有 $\dim S_2^1(\Delta_{ms})=\dim S_2^1(\bar{\Delta}_{ms})$. 显而易见,在 Δ_{ms} 中, 其中间三角形的顶点及边都是内部的. 而在 $\bar{\Delta}_{ms}$ 中,它们都是边界顶点及界边.

人们对 Morgan-Scott 剖分在二维情况研究的较多. 在高维情况下的 Morgan-Scott 剖分研究较少. P. Alfeld[83]借助大型计算机, 曾就一些特殊的三维中的 Morgan-Scott 剖分作了一些研究, 给出定义其上的样条空间的维数. 下面我们将研究 $\mathbb{R}^n$ 中的 Morgan-Scott 剖分. 设 $\sigma=[v_1,\cdots,v_{n+1}]$ 是一个 n 单纯形, 在其内部选取 $n+1$ 点 $w_1,\cdots,w_{n+1}$, 使得 v_i 与 w_i 分别位于由点 $\{w_j\}_1^{n+1}\backslash\{w_i\}$ 确定的 $n-1$ 维超平面的两侧. 连接 w_i, w_j, $1\leqslant i<j\leqslant n+1$ 及 v_i, w_j, $1\leqslant i,j\leqslant n+1, i\neq j$ 形成的剖分称为 Morgan-Scott 剖分,记为 Δ_{ms}.

定理 4.9[84] 设 Δ_{ms} 为 $\mathbb{R}^n$ 中的 Morgan-Scott 的剖分, σ, v_i, w_i, $1\leqslant i\leqslant n+1$ 如前所述,并设 w_i 关于 σ 的重心坐标为 $(\alpha_{i,1},\cdots,\alpha_{i,n+1})$,则

$$\frac{1}{2}(n+1)(n+2)\leqslant\dim S_2^1(\Delta_{ms})$$

$$\leqslant\frac{1}{2}(n+1)(n+2)+1,$$

且上式右端等号成立的充要条件是

$$\frac{\alpha_{i,j}\ \alpha_{j,k}\ \alpha_{k,i}}{\alpha_{j,i}\ \alpha_{i,k}\ \alpha_{k,j}}=1$$

对所有不同的 $1\leqslant i,j,\ k\leqslant n+1$ 都成立.

证明 设 $f\in S_2^1(\Delta_{ms})$ 满足

$$f\left(\frac{v_i+v_j}{2}\right)=0,\ i,\ j=1,2,\cdots,n+1. \qquad (4.16)$$

由(4.16)可推出 f 限制在 σ 的每条边上都为零，从而

$$f(v_i)=\frac{\partial}{\partial x_1}f(v_i)=\cdots=\frac{\partial}{\partial x_n}f(v_i)=0,\ 1\leqslant i\leqslant n+1.$$

由定理 4.7，得

$$2f(w_i)+D_{v_j-w_i}f(w_i),1\leqslant i\neq j\leqslant n+1, \qquad (4.17)$$

及

$$2f(w_i)+D_{w_j-w_i}f(w_i)=2f(w_j)+D_{w_i-w_j}f(w_j),$$
$$1\leqslant i\leqslant j\leqslant n+1. \qquad (4.18)$$

又由重心坐标的定义，有

$$\begin{aligned}
w_j-w_i &= \sum_{k=1}^{n+1}\alpha_{j,k}v_k-w_i \\
&= \sum_{k=1,k\neq i}^{n+1}\alpha_{j,k}(v_k-w_i)+\alpha_{j,i}(v_i-w_i) \\
&= \sum_{k=1,k\neq i}^{n+1}\alpha_{j,k}(v_k-w_i) \\
&\quad -\frac{\alpha_{j,i}}{\alpha_{i,i}}\sum_{k=1,k\neq i}^{n+1}\alpha_{i,k}(v_k-w_i).
\end{aligned}$$

上面最后一步用到了关系式

$$\sum_{k=1}^{n+1}\alpha_{i,k}(v_k-w_i)=0.$$

从而利用(4.17)不难得到

$$\begin{aligned}
D_{w_j-w_i}f(w_i) &= \sum_{k=1,k\neq i}^{n+1}\alpha_{j,k}D_{v_k-w_i}f(w_i) \\
&\quad -\frac{\alpha_{j,i}}{\alpha_{i,i}}\sum_{k=1,k\neq i}\alpha_{i,k}D_{v_k-w_i}f(w_i) \\
&= -2(1-\alpha_{j,i})f(w_i)+2\frac{\alpha_{j,i}}{\alpha_{i,i}}(1-\alpha_{i,i})f(w_i)
\end{aligned}$$

$$= 2\left(\frac{\alpha_{j,i}}{\alpha_{i,i}} - 1\right) f(w_i).$$

由此推出(4.18)等价于

$$\frac{\alpha_{j,i}}{\alpha_{i,i}} f(w_i) = \frac{\alpha_{i,j}}{\alpha_{j,j}} f(w_j),\quad 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n+1. \tag{4.19}$$

若 f 还满足 $f(w_1) = 0$，则由(4.17)及(4.19)易得 $f \equiv 0$。注意到(4.16)中的条件数为 $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$，这意味着

$$\dim S_2^1(\Delta_{ms}) \leqslant \frac{1}{2}(n+1)(n+2) + 1.$$

另一方面，显然有

$$\dim S_2^1(\Delta_{ms}) \geqslant \dim \mathrm{P}_2^n = \frac{1}{2}(n+1)(n+2). \tag{4.20}$$

这就完成了定理 4.9 不等式部分的证明。

又由(4.19)，对任何不同的 i, j, k，都有

$$\begin{cases} \dfrac{\alpha_{j,i}}{\alpha_{i,i}} f(w_i) = \dfrac{\alpha_{i,j}}{\alpha_{j,j}} f(w_j), \\[2ex] \dfrac{\alpha_{k,j}}{\alpha_{j,j}} f(w_j) = \dfrac{\alpha_{j,k}}{\alpha_{k,k}} f(w_k), \\[2ex] \dfrac{\alpha_{i,k}}{\alpha_{k,k}} f(w_k) = \dfrac{\alpha_{k,i}}{\alpha_{i,i}} f(w_i). \end{cases}$$

为使 $f(w_i)$, $f(w_j)$ 和 $f(w_k)$ 非零，必有

$$\frac{\alpha_{i,j}\alpha_{j,k}\alpha_{k,i}}{\alpha_{j,i}\alpha_{i,k}\sigma_{k,i}} = 1.$$

反之，若上式对任何不同的 i, j, k 成立，取 $f(w_1) = \alpha_{1,1}$，$f(w_i) = \frac{\alpha_{i,1}}{\alpha_{1,i}} \alpha_{i,i}$，$2 \leqslant i \leqslant n+1$。易验证如上所取的 $f(w_i)$，$1 \leqslant i \leqslant n+1$ 满足 (4.19)。从而可唯一确定一个以 σ 为支集的 $f \in S_2^1(\Delta_{ms})$。即 $S_2^1(\Delta_{ms})$ 含有非多项式元素，于是

$$\dim S_2^1(\Delta_{ms}) \geqslant \frac{1}{2}(n+1)(n+2)+1.$$

再注意到(4.20)式,定理 4.9 得证。 □

在定理 4.9 中,令 $n=2$,则有

推论 4.10[64] 设 Δ_{ms} 是 R^2 中的 Morgan-Scott 剖分,则

$$6 \leqslant \dim S_2^1(\Delta_{ms}) \leqslant 7,$$

且

$$\dim S_2^1(\Delta_{ms}) = 7$$

的充要条件是由点 v_i 和 w_i, $i=1,2,3$ 确定的三条直线是共点的。

显然,我们只需证明推论的后半部分。设连接 v_i 和 w_i 的直线与边 $[v_{i+1}, v_{i+2}]$ 交于点 u_i, $i=1,2,3$, 这里的 v 的下标是模 3 的。则 u_i 的面积坐标分别为 $\left(0, \frac{\alpha_{1,2}}{1-\alpha_{1,1}}, \frac{\alpha_{1,3}}{1-\alpha_{1,1}}\right)$, $\left(\frac{\alpha_{2,1}}{1-\alpha_{2,2}}, 0, \frac{\alpha_{2,3}}{1-\alpha_{2,2}}\right)$ 和 $\left(\frac{\alpha_{3,1}}{1-\alpha_{3,3}}, \frac{\alpha_{3,2}}{1-\alpha_{3,3}}, 0\right)$。如果连接两点 v 和 w 的线段长度记为 vw,则有

$$\frac{v_1u_1}{u_3v_2}\cdot\frac{v_2u_1}{u_1v_3}\cdot\frac{v_3u_2}{u_2v_1}=\frac{\alpha_{1,2}}{\alpha_{3,1}}\cdot\frac{\alpha_{2,1}}{\alpha_{2,3}}\cdot\frac{\alpha_{1,3}}{\alpha_{1,2}}.$$

从而由西瓦(Ceva)定理,立即可证推论 4.10. □

值得一提的是,对 R^2 中的 Δ_{ms} 而言,$\dim S_2^1(\Delta_{ms})=7$ 的充要条件一直未给出,而用协调插值法,即使对 R^n 中的 Δ_{ms}, $S_2^1(\Delta_{ms})$ 中含有非多项式元素的充要条件也是不难得到的。

如果 $n \geqslant 3$, $\dim S_2^1(\Delta_{ms}) = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)+1$ 并不能保证由 v_i 和 w_i, $1 \leqslant i \leqslant n+1$ 所确定的 $n+1$ 条直线是共点的。但是反过来有

定理 4.11[64] 设 Δ_{ms} 是 R^n 中的 Morgan-Scott 剖分,且由 v_i 和 w_i, $1 \leqslant i \leqslant n+1$ 所确定的 $n+1$ 条直线是共点的,则有

$$\dim S_2^1(\Delta_{ms}) = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)+1.$$

证明 设 $v = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i v_i$ 是所述 $n+1$ 条线的公共交点，并记

$$w_i - v_i = t_i(v - v_i),\ 1 \leqslant i \leqslant n+1,\ t_i > 0.$$

仍设 w_i 的重心坐标为 $(\alpha_{i,1},\cdots,\alpha_{i,n+1})$，则有

$$\alpha_{i,j} = \begin{cases} t_i\alpha_j, & i \neq j, \\ t_i\alpha_i + 1 - t_i, & i = j. \end{cases}$$

当 i,j,k 互不相同时，由上式立即得到

$$\frac{\alpha_{i,j}\cdot\alpha_{j,k}\cdot\alpha_{k,i}}{\alpha_{j,i}\alpha_{i,k}\alpha_{k,j}} = \frac{t_i\alpha_j\cdot t_j\alpha_k\cdot t_k\alpha_i}{t_j\alpha_i\cdot t_i\alpha_k\cdot t_k\alpha_j} = 1.$$

由定理 4.9，本定理得证。 □

这里我们用协调插值法解决 $\mathbf{R}^n$ 中 Morgan-Scott 分 Δ_{ms} 上 $S_2^1(\Delta_{ms})$ 的空间奇异性问题. 对 Δ_{ms} 上的一般空间 $S_k^\mu(\Delta_{ms})$ 来说，其奇异性问题还有待解决.

我们再举两个例子说明协调插值方法的应用.

例 4.12[24] 用协调插值法证明第二章中的定理 2.38. 沿用关于该定理的记号，并假设构成图 2.16 的水平和竖直网线分别是 $x - x_{i-1} = 0$, $x - x_i = 0$, $x - x_{i+1} = 0$, $x - x_{i+2} = 0$ 及 $y - y_{j-1} = 0$, $y - y_j = 0$, $y - y_{j+1} = 0$, $y - y_{j+2} = 0$, 这里 $-1 \leqslant i \leqslant m+1$, $-1 \leqslant j \leqslant n+1$.

记 $S = B_{i,j}$ 为 $S_2^1(\Delta_{mn}^{(2)})$ 中以图 2.16 为支集的函数，由定理 4.7(分别对 (x_i, y_j), (x_i, y_{j-1})和(x_i, y_j), (x_{i-1}, y_j)用 (4.14) 式)，得

$$S(x_i,y_j) - h_iD_xS(x_i, y_j) = 0,$$
$$S(x_i, y_j) - k_jD_yS(x_i, y_j) = 0.$$

同理有

$$S(x_{i+1}, y_j) + h_{i+2}D_xS(x_{i+1}, y_j) = 0,$$
$$S(x_{i+1}, y_j) - k_jD_yS(x_{i+1}, y_j) = 0,$$
$$S(x_{i+1}, y_{j+1}) + h_{i+2}D_xS(x_{i+1}, y_{j+1}) = 0,$$

$$S(x_{i+1}, y_{j+1}) + k_{j+2}D_yS(x_{i+1}, y_{j+1}) = 0,$$
$$S(x_i, y_{j+1}) - h_iD_xS(x_i, y_{j+1}) = 0,$$
$$S(x_i, y_{j+1}) + k_{j+2}D_yS(x_i, y_{j+1}) = 0.$$
再对点 (x_i, x_j) 和 (x_{i+1}, y_j)，(x_{i+1}, y_j) 和(x_{i+1},y_{j+1})，(x_{i+1}, y_{j+1})和 (x_i, y_{j+1})，(x_i, y_{j+1}) 和 (x_i, y_j) 分别用(4.14)式，并记 $a_{r,s} = S(x_r, y_s)$,同时用上面的关系式,得

$$\begin{cases} a_{i,j} + \dfrac{h_{i+1}}{h_i}a_{i,j} = a_{i+1,j} + \dfrac{h_{i+1}}{h_{i+2}}a_{i+1,j}, \\ a_{i+1,j} + \dfrac{k_{j+1}}{k_j}a_{i+1,j} = a_{i+1,j+1} + \dfrac{k_{j+1}}{k_{j+2}}a_{i+1,j+1}, \\ a_{i+1,j+1} + \dfrac{h_{i+1}}{h_{i+2}}a_{i+1,j+1} = a_{i,j+1} + \dfrac{h_{i+1}}{h_i}a_{i,j+1}, \\ a_{i,j+1} + \dfrac{k_{j+1}}{k_{j+2}}a_{i,j+1} = a_{i,j} + \dfrac{k_{j+1}}{k_j}a_{i,j}. \end{cases}$$

特别取

$$a_{i,j} = \frac{h_i}{h_i + h_{i+1}} \cdot \frac{k_j}{k_{j+1} + k_j} = A_iB_j,$$

则不难验证

$$a_{i+1,j} = A'_{i+1}B_j, \quad a_{i+1,j+1} = A'_{i+1}B'_{j+1}, \quad a_{i,j+1} = A_iB'_{j+1}.$$

由此不难重新得到图 2.16 中的全部信息，这就再次证明了结论(a),结论(b)就不难验证了。下面证明结论(c)和(d).

设常数 $C_{i,j}$，$-1 \leqslant i \leqslant m+1$，$-1 \leqslant j \leqslant n+1$，使得当 $(x,y) \in \Omega$ 时,恒有

$$S(x,y) = \sum_{i=-1}^{m+1}\sum_{j=-1}^{n+1} C_{i,j}B_{i,j}(x,y) = 0.$$

注意点(x_r, y_s)，$0 \leqslant r \leqslant m+1$；$0 \leqslant s \leqslant n+1$，只位于 $B_{r,s}$，$B_{r-1,s}$，$B_{r,s-1}$ 和 $B_{r-1,s-1}$ 的支集内部，并同时注意前面讨论中 $B_{i,j}$ 在(x_r, y_s)处的值与其偏导数的关系,即可由

$$S(x_r, y_s) = D_xS(x_r, y_s) = D_yS(x_r, y_s) = 0,$$

得

$$\begin{cases} C_{r-1,t-1}A'_r B'_t + C_{r-1,t}A'_r B_t + C_{r,t-1}A_r B'_t + C_{r,t}A_r B_t = 0, \\ -C_{r-1,t-1}h_{r+1}A'_r B'_t - C_{r-1,t}h_{r+1}A'_r B_t + C_{r,t-1}h_r A_r B'_t \\ \quad + C_{r,t}h_r A_r B_t = 0, \\ -C_{r-1,t-1}k_{t+1}A'_r B'_t + C_{r-1,t}k_t A'_r B_t - C_{r,t-1}k_{t+1}A_r B'_t \\ \quad + C_{r,t}k_t A_r B_t = 0. \end{cases}$$

经过简单的计算,上面的方程组等价于

$$C_{r,t} = (-1)^{r+t}h_{r+1}k_{t+1}C,\ 0 \leqslant r \leqslant m+1,\ 0 \leqslant t \leqslant n+1,$$

其中 C 为某个非零常数。由上式，不难证明结论(c)和(d)成立。

例 4.13 $S_3^1(\Delta_{mn}^{(1)})$ 中的最小支集及第二章定理 2.37 的证明.

如前所述,当 $\Delta_{mn}^{(1)}$ 是一致剖分或其水平及竖直网线间的距离成比例时，其最小支集已分别由 Fredrickson 及 Chui-Wang 得到.对一般的 1-型剖分而言,作者之一得到了如下结果[81]:

图 4.1、图 4.2 和图 4.3 中任意去掉四边形 $ABCD$、$CEFG$、$A'B'C'D'$ 和 $C'E'F'G'$ 之一都是空间 $S_3^1(\Delta_{m,n}^{(1)})$ 的最小支集，而且一般来说,最小支集样条函数不一定在其支集的内部非负.

为证该结论,需证下面几个引理.

引理 4.14 如果定义在图 4.4 上的三次样条 S 有表

$$p_{1,2,3}(\boldsymbol{w}) = d_{1,2,3}u_1u_2u_3 + \sum_{i=1}^{3} \cdot\left(\sum_{j=1}^{3} u_j D_{i,j}f(\boldsymbol{A}_i) + (3-2u_i)f(\boldsymbol{A}_i)\right)u_i^2,$$

$$p_{1,3,4}(\boldsymbol{w}) = d_{1,3,4}\bar{u}_1\bar{u}_3\bar{u}_4 + \sum_{i\in B} \cdot\left(\sum_{j\in B} \bar{u}_j D_{i,j}f(\boldsymbol{A}_i) + (3-2\bar{u}_i)f(\boldsymbol{A}_i)\right)\bar{u}_i^2,$$

其中 $S|_{\{\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3\}} = p_{1,2,3}$, $S|_{\{\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{A}_4\}} = p_{1,3,4}$, (u_1, u_2, u_3) 和 $(\bar{u}_1, \bar{u}_3, \bar{u}_4)$ 分别是点 $\boldsymbol{w}$ 关于 $[\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{A}_3]$ 和 $[\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_3, \boldsymbol{A}_4]$ 的重心坐标, $B = \{1,3,4\}$,并且在四个顶点处有相同的函数值和一阶偏导数值,则当且仅当

$$d_{1,2,3} + d_{1,3,4} = 2(D_{1,3}f(A_1) + D_{3,1}f(A_3) + 3f(A_1) + 3f(A_3))$$

时，S 是光滑的，这里 $D_{i,j} = D_{(A_j - A_i)}$。

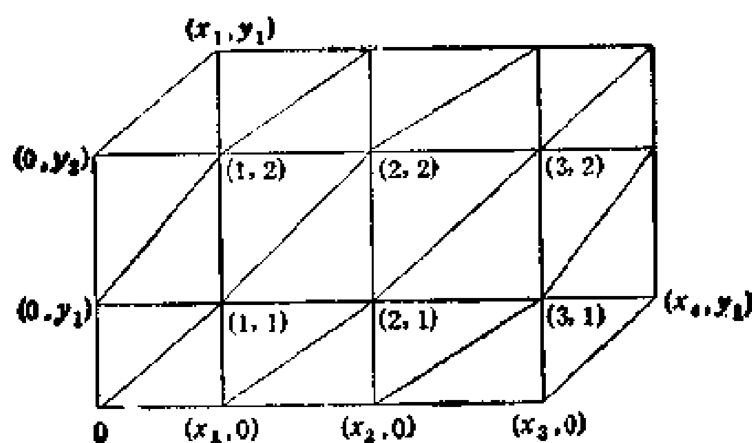


图 4.1

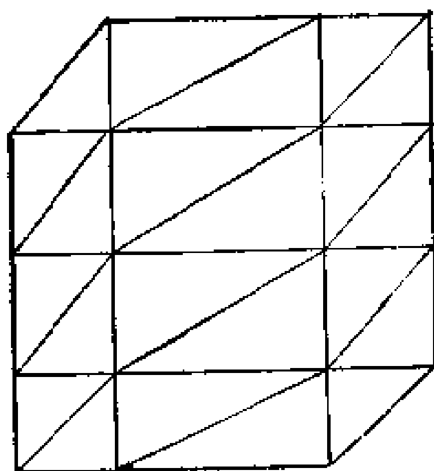


图 4.2

证明 显然 S 是连续的，设 $\boldsymbol{A}$ 是$[A_1, A_3]$的中点，经直接计算得：

$$D_{1,2}S(\boldsymbol{A}) = \frac{1}{4}d_{1,2,3} + \frac{1}{4}(D_{1,2}S(\boldsymbol{A}_1) + D_{1,2}S(\boldsymbol{A}_3))$$

$$- \frac{1}{2}(D_{1,3}S(\boldsymbol{A}_1) + 3S(\boldsymbol{A}_1)),$$

$$D_{3,4}S(\boldsymbol{A}) = \frac{1}{4}d_{1,3,4} + \frac{1}{4}(D_{3,4}S(\boldsymbol{A}_1) + D_{3,4}S(\boldsymbol{A}_3))$$

$$- \frac{1}{2}(D_{3,1}S(\boldsymbol{A}_3) + 3S(\boldsymbol{A}_3)).$$

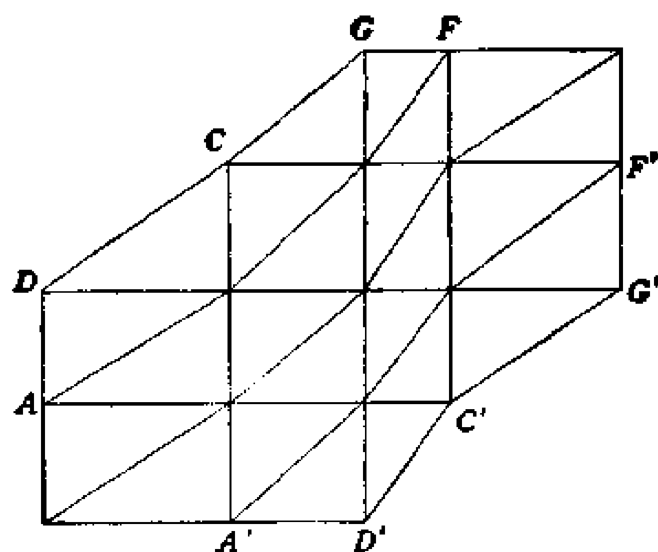


图 4.3

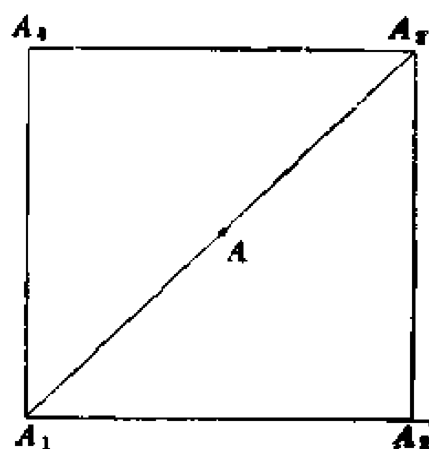


图 4.4

又因为 $\boldsymbol{A}_2-\boldsymbol{A}_1=-(\boldsymbol{A}_4-\boldsymbol{A}_3)$，故 S 光滑的充要条件是

$$D_{3,4}S(\boldsymbol{A})+D_{1,2}S(\boldsymbol{A})=0,$$

即

$$d_{1,2,3}+d_{1,3,4}=2(D_{1,3}S(\boldsymbol{A}_1)+D_{3,1}S(\boldsymbol{A}_3)+3S(\boldsymbol{A}_1)$$
$$+3S(\boldsymbol{A}_3)).$$ □

引理 4.15（如图 4.5） 记号和条件与引理 4.14 中的相同，则 S 光滑的充要条件是

$$h_2d_{1,2,4}+h_1d_{2,3,4}=2[h_2(D_{2,4}S(\boldsymbol{A}_2)+3S(\boldsymbol{A}_2))$$
$$+h_1(D_{4,2}S(\boldsymbol{A}_4)+3S(\boldsymbol{A}_4))],$$

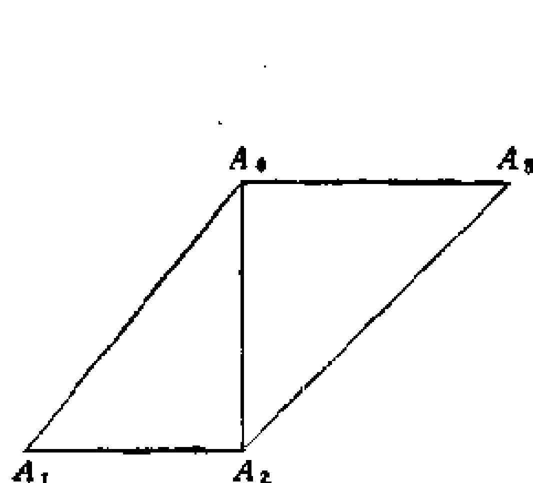


图 4.5

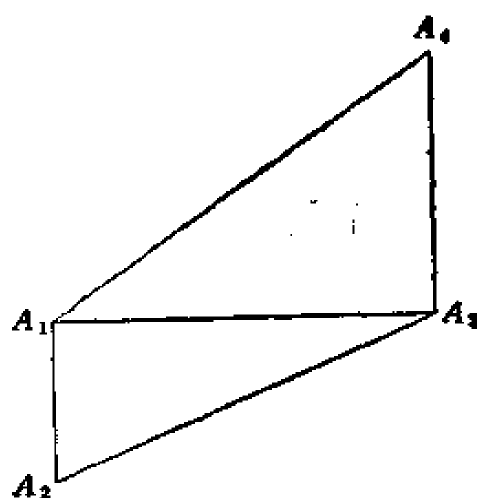


图 4.6

其中 $h_1 = \|\boldsymbol{A}_1 - \boldsymbol{A}_2\|$，$h_2 = \|\boldsymbol{A}_3 - \boldsymbol{A}_4\|$.

引理 4.16(如图 4.6) 记号和条件仍与上面相同，则 s 光滑的充要条件是

$$k_2 d_{1;2;3} + k_1 d_{1;3;4} = 2k_2(D_{3;1}S(\boldsymbol{A}_3) + 3S(\boldsymbol{A}_3))$$
$$+ 2k_1(D_{1;3}S(\boldsymbol{A}_1) + 3S(\boldsymbol{A}_1)),$$

其中 $k_2 = \|\boldsymbol{A}_1 - \boldsymbol{A}_4\|$，$k_1 = \|\boldsymbol{A}_2 - \boldsymbol{A}_3\|$.

不失一般性，仅以图 4.1(记为 D)为例证明我们的结论.

设 $x_i - x_{i-1} = h_i$，$x_0 = 0$，$1 \leqslant i \leqslant 4$；$y_i - y_{i-1} = k_i$，$y_0 = 0$，$1 \leqslant i \leqslant 3$，并将点 (x_i, y_j) 的函数值和一阶偏导数值 $f(x_i, y_j)$、$f_x(x_i, y_j)$，$f_y(x_i, y_j)$ 分别记作 $a_{i;j}$，$b_{i;j}$，$c_{i;j}$，$1 \leqslant i \leqslant 3$，$1 \leqslant j \leqslant 2$. 同时令在 ∂D 上的函数值和法微商值都等于零. 假定在区域 D 上的每个三角形上都有如引理 4.14 中的表达式，则由引理 4.14—引理 4.16，如此定义的分片三次多项式光滑连接的充要条件是

$$3a_{1;1} - h_1 b_{1;1} - k_1 c_{1;1} = 0,$$
$$d_{1;0;2} = 2(3a_{1;1} - k_1 c_{1;1}),$$
$$d_{1;0;2} = 2(3a_{2;1} - h_2 b_{2;1} - k_1 c_{2;1}),$$
$$d_{2;0;2} = 2(3a_{2;1} - k_1 c_{2;1}),$$
$$d_{2;0;2} = 2(3a_{3;1} - h_3 b_{3;1} - k_1 c_{3;1}),$$
$$3a_{3;1} - k_1 c_{3;1} = 0,$$

$$3a_{3,1} + h_4 b_{3,1} = 0,$$

$$d_{3,1,2} = 2(3a_{3,1} + h_4 b_{3,1} + k_2 c_{3,1}),$$

$$d_{3,1,2} = 2(3a_{3,2} + h_4 b_{3,2}),$$

$$3a_{3,2} + h_4 b_{3,2} + k_3 c_{3,2} = 0,$$

$$d_{2,2,1} = 2(3a_{3,2} + k_3 c_{3,2}),$$

$$d_{2,2,1} = 2(3a_{2,2} + h_3 b_{2,2} + k_3 c_{2,2}),$$

$$d_{1,2,1} = 2(3a_{2,2} + k_3 c_{2,2}),$$

$$d_{1,2,1} = 2(3a_{1,2} + h_2 b_{1,2} + k_3 c_{1,2}),$$

$$3a_{1,2} + k_3 c_{1,2} = 0,$$

$$3a_{1,2} - h_1 b_{1,2} = 0,$$

$$d_{0,1,1} = 2(3a_{1,2} - h_1 b_{1,2} - k_2 c_{1,2}),$$

$$d_{0,1,1} = 2(3a_{1,1} - h_1 b_{1,1}),$$

$$h_2 d_{0,1,1} + h_1 d_{1,1,2} = 2(h_2(3a_{1,1} + k_2 c_{1,1}) + h_1(3a_{1,2} - k_2 c_{1,2})),$$

$$d_{1,1,1} + d_{1,1,2} = 2(3a_{1,1} + h_2 b_{1,1} + k_2 c_{1,1} + 3a_{2,2} - h_2 b_{2,2} - k_2 c_{2,2}),$$

$$k_1 d_{1,1,1} + k_2 d_{1,0,2} = 2(k_1(3a_{2,1} - h_2 b_{2,1}) + k_2(3a_{1,1} + h_2 b_{1,1})),$$

$$k_2 d_{1,2,1} + k_3 d_{1,1,2} = 2(k_3(3a_{1,2} + h_2 b_{1,2}) + k_2(3a_{2,2} - h_2 b_{2,2})),$$

$$k_2 d_{2,0,2} + k_1 d_{2,1,1} = 2(k_2(3a_{2,1} + h_3 b_{2,1}) + k_1(3a_{3,1} - h_3 b_{3,1})),$$

$$h_3 d_{3,1,2} + h_4 d_{2,1,3} = 2(h_3(3a_{3,2} - k_2 c_{3,2}) + h_4(3a_{3,1} + k_2 c_{3,1})),$$

$$d_{2,1,1} + d_{2,1,2} = 2(3a_{2,1} + h_3 b_{2,1} + k_2 c_{2,1} + 3a_{3,2} - h_3 b_{3,2} - k_2 c_{3,2}),$$

$$k_2 d_{2,2,1} + k_3 d_{2,1,2} = 2(k_2(3a_{3,2} - h_3 b_{3,2}) + k_3(3a_{2,2} + h_3 b_{2,2})),$$

$$h_3 d_{1,1,1} + h_2 d_{2,1,2} = 2(h_3(3a_{2,1} + k_2 c_{2,1}) + h_2(3a_{2,2} - k_2 c_{2,2})),$$

其中 $d_{i,j,1}$ 是在以 (i,j)，$(i+1,j)$，$(i+1,j+1)$ 为顶点的三角形上表达式中混合项的系数，而与 $d_{i,j,2}$ 相关的顶点则是 (i,j)，$(i,j+1)$，$(i+1,j+1)$。将诸 $d_{i,j,k}$ 消去，得

$$3a_{1,1}-h_1b_{1,1}-k_1c_{1,1}=0,$$
$$3a_{2,1}-h_2b_{2,1}-k_1c_{2,1}-h_1b_{1,1}=0,$$
$$3a_{2,1}-k_1c_{2,1}+h_3b_{3,1}=0,$$
$$3a_{3,1}-k_1c_{3,1}=0,$$
$$3a_{3,1}+h_4b_{3,1}=0,$$
$$3a_{3,2}+h_4b_{3,2}-k_3c_{3,1}=0,$$
$$3a_{3,2}+h_4b_{3,2}+k_3c_{3,2}=0,$$
$$3a_{2,2}+h_3b_{2,2}+k_3c_{2,2}+h_4b_{3,2}=0,$$
$$3a_{2,2}+k_3c_{2,2}-h_2b_{1,2}=0,$$
$$3a_{1,2}+k_3c_{1,2}=0,$$
$$3a_{1,2}-h_1b_{1,2}=0,$$
$$k_1c_{1,1}+k_2c_{1,2}=0,$$
$$h_1^{-1}h_2(h_1b_{1,1}+k_2c_{1,1})+k_3^{-1}k_2(h_2b_{2,2}+k_3c_{2,2})$$
$$-(h_2b_{1,2}+k_2c_{1,2})=0,$$
$$k_1^{-1}k_2(h_3b_{2,1}+k_1c_{2,1})+h_4^{-1}h_3(h_4b_{3,2}+k_2c_{3,2})$$
$$-(h_3b_{3,1}+k_2c_{3,1})=0,$$
$$3(a_{1,1}+a_{2,2}-a_{1,2}-a_{2,1})-\frac{k_2}{k_1}\cdot h_2b_{1,1}-\frac{h_2}{h_1}\cdot k_2$$
$$\cdot c_{1,1}-h_2b_{2,1}-k_2c_{2,2}+h_2b_{2,1}+k_2c_{1,2}=0,$$
$$3(a_{2,1}+a_{3,2}-a_{2,2}-a_{3,1})+\frac{k_2}{k_3}\cdot h_3b_{3,1}+\frac{h_3}{h_4}\cdot k_2c_{3,2}$$
$$+h_3b_{2,1}+k_2c_{2,1}-h_3b_{2,2}-k_2c_{3,1}=0,$$
$$\frac{h_3}{h_2}\cdot k_2c_{2,1}+h_3b_{2,1}-\frac{k_2}{k_1}\cdot h_3\cdot b_{1,1}-\frac{h_3}{h_2}\cdot k_2\cdot c_{1,1}$$
$$+\frac{k_2}{k_3}\cdot h_3b_{3,2}+k_2c_{3,2}-h_3b_{2,2}-k_2c_{2,2}=0.$$

由上面方程组的前 12 个方程不难得到：

$$c_{1,2} = -\frac{3}{k_3} a_{1,2},$$

$$b_{1,2} = \frac{3}{h_1} a_{1,2},$$

$$c_{1,1} = \frac{3k_2}{k_1 k_3} a_{1,2},$$

$$c_{3,1} = 3a_{3,1}/k_1,$$

$$b_{3,1} = -3a_{3,1}/h_4,$$

$$c_{3,2} = -3k_2 a_{3,1}/k_1 \cdot k_3,$$

$$b_{1,1} = -3(k_2 a_{1,2}/k_3 - a_{1,1})/h_1,$$

$$b_{3,2} = 3(k_2 a_{3,1}/k_1 - a_{3,2})/h_4,$$

$$c_{2,1} = 3(a_{2,1} - h_3 a_{3,1}/h_4)/k_1,$$

$$c_{2,2} = 3(h_2 a_{1,2}/h_1 - a_{2,2})/k_3,$$

$$b_{2,2} = 3(a_{3,2} - h_2 a_{1,2}/h_1 - k_2 a_{3,1}/k_1)/h_3,$$

$$b_{2,1} = 3(a_{1,1} - h_3 a_{3,1}/h_4 - k_2 a_{1,2}/k_3)/h_2.$$

将它们代入后五个方程中，得

$$(*)\begin{cases} p_1 a_{1,1} + (p_1 N - q_2^{-1} M_1 - P_1 + q_2^{-1}) a_{1,2} - q_2^{-1} a_{2,2} \\ \qquad - P_2^{-1} N a_{3,1} + p_2^{-1} q_2^{-1} a_{3,2} = 0, \\ -p_2 q_1 a_{1,1} + p_2 N a_{1,2} + q_1 a_{2,1} + (q_1 M_2 - P_3^{-1} N + P_3^{-1} \\ \qquad - q_1) a_{3,1} - p_3^{-1} a_{3,2} = 0, \\ -p_1 q_1 a_{1,1} + (-1 + M_1 - q_2^{-1} p_1) a_{1,2} - a_{2,1} \\ \qquad + (1 + q_2^{-1}) a_{2,2} + (p_3^{-1} + p_2^{-1} q_1) a_{3,1} - p_2^{-1} a_{3,2} = 0, \\ -p_2 a_{1,1} + (p_1 + p_2 q_2^{-1}) a_{1,2} + (1 + q_1) a_{2,1} - a_{2,2} \\ \qquad + (-1 + M_2 - q_1 \cdot p_3^{-1}) a_{3,1} - q_2^{-1} p_3^{-1} a_{3,2} = 0, \\ -(p_2 + q_1 p_1 p_2) a_{1,1} + (p_2 q_2^{-1} + p_1 p_2 N - p_2 N + p_1 \\ \qquad - p_1 q_2^{-1}) a_{1,2} + p_2 q_1 a_{2,1} + q_2^{-1} a_{2,2} + (-q_1 M_2 + M_2 \\ \qquad + p_3^{-1} N - N + q_1) a_{3,1} - (1 + q_2^{-1} p_3^{-1}) a_{3,2} = 0, \end{cases}$$

其中 $p_i = h_{i+1}/h_i$，$i = 1, 2, 3$；$q_i = k_{i+1}/k_i$，$i = 1, 2$；$M_i = \frac{h_{i+1}}{h_i h_{i+2}}$，$i = 1, 2$；$N = \frac{k_2^2}{k_1 \cdot k_3}$。

特别地，取 $a_{3,2}=a_{3,1}=a_{2,1}=0$，为使上面的方程组有非零解，必有 $M_1=N=1$。这就证明了第二章中的相应结果。此时有

$$\begin{cases}a_{2,2}=pqa_{1,1},\\ a_{1,2}=qa_{1,1}.\end{cases}$$

将它们代入前面的方程组，则可求得在点(1,1)，(1,2)，(2,2)的偏导数值(用 $a_{1,1}$ 表示)，这正是已有的结果。

如果取 $h_1=1$，$h_2=3$，$h_3=4$，$h_4=2$，$k_1=2$，$k_2=4$，$k_3=3$，则方程组(*)变为

$$AX=0,$$

其中 $X=(a_{1,1},\ a_{1,2},\ a_{2,1},\ a_{2,2},\ a_{3,1},\ a_{3,2})^T$，

$$A=\begin{bmatrix} 3 & \frac{10}{3} & 0 & -\frac{4}{3} & -2 & 1 \\ -\frac{8}{3} & \frac{32}{9} & 2 & 0 & 0 & -2 \\ -6 & -\frac{11}{4} & -1 & \frac{7}{3} & \frac{7}{2} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{4}{3} & \frac{43}{9} & 3 & -1 & -\frac{7}{3} & -\frac{8}{3} \\ -\frac{28}{3} & \frac{71}{9} & \frac{8}{3} & \frac{4}{3} & 2 & \frac{11}{3} \end{bmatrix}.$$

解上面的方程组，得

$$\begin{cases}a_{1,1}=\frac{7}{3}a_{1,2},\\ a_{2,1}=\frac{4}{3}a_{1,2},\\ a_{2,2}=\frac{23}{2}a_{1,2},\\ a_{3,1}=-\frac{5}{2}a_{1,2},\\ a_{3,2}=0.\end{cases}$$

由于 $a_{i,j}$ 是所求局部支集样条函数在(i,j)点的函数值，而 $a_{3,4}=-\frac{5}{2}a_{1,2}$，从而当 $h_1=1$，$h_2=3$，$h_3=4$，$h_4=2$，$k_1=2$，$k_2=4$，$k_3=3$ 时，样条空间 $S_3^1(\Delta^{(1)}_{m,n})$在支集 D 上存在且仅存在一个线性无关的局部支集样条函数，而且它不是非负样条函数，而方程组(*)说明在任何情况下，空间 $S_3^1(\Delta^{(1)}_{m,n})$ 中，至少存在一个以区域 D 为支集的样条函数，从而区域 D 是最小局部支集。

§2. 高维样条空间的维数

在上一节，我们介绍了研究多元样条的协调插值方法，并将该方法用于研究 Morgan-Scott 剖分等问题，完全弄清了 $S_3^1(\Delta_{m,n})$的空间结构，本节将继续用该方法研究样条空间的维数。

关于 $\mathbf{R}^2$ 中的任意三角剖分 Δ，如前所述，当 $k\geqslant 4\mu+1$ 时，$\dim S_k^\mu(\Delta)$ 分别由王仁宏、卢旭光[36]和 Alfeld-Schumaker[37]独立得到。对 $\mathbf{R}^3$ 中的单纯形剖分 Δ，施锡泉、王仁宏[81]得到了如下结果。

定理 4.17 设 Δ 是 $\mathbf{R}^3$ 中的任意单纯形剖分，且 $k\geqslant 8\mu+1$，则

$$\begin{aligned}\dim S_k^\mu(\Delta)=&\sum_{v\in V(\Delta,D)}\dim S_{4\mu}^\mu(\mathrm{St}(v))\\&+\sum_{e\in V(\Delta,1)}\Big[(k-6\mu-1)\dim S_{2\mu}^\mu(\mathrm{Ts}(e))\\&-\sum_{i=0}^{2\mu-1}\dim S_i^\mu(\mathrm{Ts}(e))\Big]\\&+\sum_{i=0}^{\mu}\left[\binom{k-6\mu-1+2i}{2}\right.\\&\left.-3\binom{i}{2}\right]n(V(\Delta,2))\\&+\left[\binom{k-4\mu-1}{3}-4\binom{\mu}{3}\right]n(V,3).\end{aligned}$$

这里及以后章节中，$V(\Delta,\ i)$ 代表 Δ 中所有 i 单纯形的集合，$n(A)$ 为集 A 的元素个数。

定理 4.17 是下面定理 4.18 当 $n=3$ 时的特殊情况，故其证明将在后面给出。

定理 4.18[15]　设 Δ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的单纯形剖分，$V(\Delta,i)$ 是 Δ 中 i 单纯形的集合。$M(i,\ j)$ 如定理 4.6 所述，则当 $k\geqslant 2^n\mu+1$ 时，有

$$
\begin{aligned}
\dim S_k^{\mu}(\Delta)= & \sum_{v\in V(\Delta,0)} \dim S^{\mu}_{2^{n-1}\mu}(\mathrm{St}(v)) \\
& + \sum_{e\in V(\Delta,1)} \Big[(k-3\cdot 2^{n-2}\mu-1)\dim S^{\mu}_{2^{n-2}\mu}(\mathrm{Ts}(e)) \\
& - \sum_{j=0}^{2^{n-2}\mu-1} \dim S_j^{\mu}(\mathrm{Ts}(e))\Big] \\
& + \sum_{d=2}^{n-1}\sum_{\sigma\in V(\Delta,d)} \Big[M(2^{n-d-1}\mu)\dim S^{\mu}_{2^{n-d-1}\mu}(\mathrm{Ts}(\sigma)) \\
& - \sum_{j=d}^{2^{n-d-1}\mu-1} (M(j+1,d)-M(j,d))\dim S_j^{\mu}(\mathrm{Ts}(\sigma))\Big] \\
& + M(0,n)n(V(\Delta,n)),
\end{aligned}
$$

其中 $M(i,\ j)$ 由下面的引理给出，

引理 4.19　当 $k\geqslant 2^n\mu+1$ 时，令 $M(i,1)=k-2^n\mu-1+i$，则有

$$
M(i,2)=\binom{k-3\cdot 2^{n-2}\mu+2i-1}{2}-3\binom{i}{2},
$$

$$
\begin{aligned}
M(i,d)= & \binom{k-(d+1)2^{n-d}\mu+di-1}{d} \\
& -(d+1)\binom{2^{n-d}\mu(2^{d+1}-d)+(d-1)i}{d} \\
& -\sum_{j=1}^{d-2}\binom{d+1}{j+1}\Big[M(2^{n-j-1}\mu,\ j)
\end{aligned}
$$

$$\cdot\binom{2^{n-d}\mu(2^{d-j-1}-d+j)+(d-j-1)i}{d-j}$$

$$-\sum_{l\geqslant 1}(M(2^{n-d-1}\mu-l+1)-M(2^{n-j-1}\mu-l))$$

$$\cdot\binom{2^{n-d}(2^{d-j-1}-d+j)+(d-j-1)i-l}{d-j}\Bigg],$$

此处按常规，当 $m<n$ 时，规定 $\binom{m}{n}=0$。下面引理 4.19 回答了，当 $k\geqslant 2^n\mu+1$ 时，应如何确定定理 4.6′中所引入的 $M(i,j)$ 的问题。

引理 4.19 的证明 设 $e=[v,w]$ 是 n 单纯形 σ 的边，f 是 σ 上的 k 次多项式。因

$$\{D^i_{w-v}D^\lambda_{e,\sigma}f(v),\ D^i_{v-w}D^\lambda_{e,\sigma}f(w)\}_{0\leqslant i\leqslant 2^{n-1}\mu-|\lambda|}$$

已在 e 的两端点给出（这里 $|\lambda|\leqslant 2^{n-2}\mu$），为确定定义在 e 上的（一元）$k-|\lambda|$ 次多项式 $D^\lambda_{e,\sigma}f|_e$，在 e 的内部还需给出

$$\begin{aligned}M(|\lambda|,1)&=k-|\lambda|+1-2(2^{n-2}\mu-|\lambda|+1)\\&=k-2^n\mu-1+|\lambda|\end{aligned}$$

个独立的插值条件。

对 σ 的三角形面 σ 而言，由于在 σ 的每个边 e 上，$D^i_{e,\delta}D^\lambda_{\delta,\sigma}f|_e$，$0\leqslant i\leqslant 2^{n-2}\mu-|\lambda|$，已被 e 上已给的条件所确定，可以在 δ 的内部至多还需给出可确定（二元）$k-|\lambda|-3(2^{n-2}\mu-|\lambda|+1)=k-3\cdot 2^{n-2}\mu+2|\lambda|-3$ 次多项式的条件。这是因为如果令 $p=D^\lambda_{\delta,\sigma}f|_\delta$，则 p 是一个二元 $k-|\lambda|$ 次多项式。不妨设 δ 位于 xoy 平面上，并记 l_i 是 δ 的边 e_i 之直线方程。由于 $D^i_{e,\delta}p|_e=D^i_{e,\delta}D^\lambda_{\delta,\sigma}f|_e$，$0\leqslant i\leqslant 2^{n-2}\mu-|\lambda|$ 已知，不妨令他们都为零。由 Bezout 定理，存在（二元）$k-3\cdot 2^{n-2}\mu+2|\lambda|-3$ 次多项式 $\bar{p}$ 使得

$$p=\bar{p}(l_1,l_2,l_3)^{2^{n-2}\mu-|\lambda|+1}. \tag{4.21}$$

因此为确定 p，我们只需确定 $\bar{p}$。

此外，δ 的顶点处的值，除用于确定 $D^i_{e,\delta}p|_e$ 外，由(4.21)，当

$i_w \geqslant 2^{n-2}\mu - |\lambda| + 1, w \in V(\delta)\backslash v$ 时，$\left(\prod_{w\in V(\delta)\backslash v} D_{w-v}^{i_w}\right) D_{\delta,\sigma}^{\lambda} f(v)$ 将用于确定 $\bar{p}$。这样的值在 v 处共有 $\binom{|\lambda|}{2}$ 个，从而证得

$$M(|\lambda|,2) = \binom{k - 3 \cdot 2^{n-2}\mu + 2|\lambda| - 1}{2} - 3\binom{|\lambda|}{2},$$

其中 $|\lambda| \leqslant 2^{n-3}\mu$.

类似地，考虑 σ 的 d 维面 $\delta, 2 < d \leqslant n-1$，并设 ρ 是 δ 的 j 维面，$j \leqslant d-1$. 如果 $j = d-1$，即 ρ 是 δ 的 $d-1$ 维面，则 $D_{\rho,\delta}^{i} D_{\delta,\sigma}^{\lambda} f|_{\rho}, 0 \leqslant i \leqslant 2^{n-d}\mu - |\lambda|$ 是已知的. 不妨假设他们为零，与(4.21)类似地有

$$p_d = \bar{p}_d(l_1, \cdots, l_{d+1})^{2^{n-d}\mu - |\lambda| + 1}, \tag{5.22}$$

其中 $p_d = D_{\delta,\sigma}^{\lambda} f|_{\delta}, \bar{p}_d$ 为 (d 元) $k - |\lambda| - (d+1)(2^{n-d}\mu - |\lambda| + 1) = k - (d+1)2^{n-d}\mu + d|\lambda| - d - 1$ 次多项式. 与 δ 是三角形面类似，δ 面上的已知条件，部分将用于确定 $\bar{p}_d$. 在 δ 的顶点 v 处，当 $i_w \geqslant 2^{n-d}\mu - |\lambda| + 1, w \in V(\delta)\backslash v$ 时，$\left(\prod_{w\in V(\delta)\backslash v} D_{w-v}^{i_w}\right) D_{\delta,\sigma}^{\lambda} f(v)$ 正是这样的条件. 不难算出，这样的条件数在 v 处为

$$\binom{2^{n-d}\mu(2^{n-d} - d) + (d-1)i}{d}.$$

设 ρ 是 δ 的 j 维面，$1 \leqslant j \leqslant d-2$，并设 $w_t, 1 \leqslant t \leqslant M(2^{n-j-1}\mu, j)$ 是 ρ 内部的插值结点. 则当 $1 + M(i-1,j) \leqslant t \leqslant M(i,j)$ 时，在 W_t 点给出的插值条件是 $\{D_{\rho,\sigma}^{\lambda_1} f(w_t)\}_{i \leqslant |\lambda_1| \leqslant 2^{n-j-1}\mu}$，其中用于确定 $\bar{p}_d$ 的值是

$$\left\{\prod_{w\in V(\delta)\backslash V(\rho)} D_{e_w}^{i_w} D_{\delta,\sigma}^{\lambda} f(w_t) : = D_{\rho,\delta}^{I} D_{\delta,\sigma}^{\lambda} f(w_t)\right\},$$

此处 $i_w \geqslant 2^{n-d}\mu - |\lambda| + 1, w \in V(\delta)\backslash V(\rho), e_w$ 是 $[\rho, w]$ 关于 ρ 的单位内法向量，$i \leqslant |\lambda_1| = |\lambda| + |I| \leqslant 2^{n-j-1}\mu$.

下面计算一下在 w_t 处这样的条件个数. 注意到

$$\{D^l_{p,\delta}D^\lambda_{\delta,\sigma}f(w_t)\}_{i-|\lambda|\leqslant|l|\leqslant 2^{n-j-1}\mu-|\lambda|}$$

$$=\{D^l_{p,\delta}D^\lambda_{\delta,\sigma}f(w_t)\}_{|l|\leqslant 2^{n-j-1}\mu-|\lambda|}\setminus\{D^l_{p,\delta}D^\lambda_{\delta,\sigma}f(w_t)\}_{|l|\leqslant i-1-|\lambda|}.$$

不难证明在 w_t 处，用于确定 $\tilde{p}_d$ 的条件个数为

$$\binom{2^{n-d}\mu(2^{d-j-1}-d+j)+(d-j-1)|\lambda|}{d-j}$$

$$-\binom{i-1-2^{n-d}(d-j)\mu+(d-j-1)|\lambda|}{d-j}.$$

进而，在 ρ 的内部，所有这样条件个数是

$$M(2^{n-j-1}\mu,j)\binom{2^{n-d}\mu(2^{d-j-1}-d+j)+(d-j-1)|\lambda|}{d-j}$$

$$-\sum_{l\geqslant 1}(M(2^{n-j-1}\mu-l+1,j)-M(2^{n-j-1}\mu-l))$$

$$\cdot\binom{2^{n-d}\mu(2^{d-j-1}-d+j)+(d-j-1)|\lambda|-l}{d-j}.$$

以下，引理 4.19 就不难证明了。

由引理 4.19，我们可给出一组插值条件，使其能唯一地确定一个 n 单纯形 σ 上的 k 次多项式，这就是下面的引理。

引理 4.20 设 $f\in S^\mu_k(\Delta)$，$M(i,j)$ 如引理 4.19 中所述，$V(\Delta;i)$ 如定理 4.18 中所述，则 f 被下面的值所唯一确定：

i) 在顶点 $v\in V(\Delta)=V(\Delta,0)$ 处，所需的值是

$$\{D^\lambda_{v,\sigma}f(v);|\lambda|\leqslant 2^{n-1}\mu,\sigma\in V(\mathrm{St}(v),n)\};$$

ii) 设 $e\in V(\Delta,1)$，$w_t,1\leqslant t\leqslant k-3\cdot 2^{n-2}\mu-1$ 是 e 的不同点。则在 w_t 点的值是

$$\{D^\lambda_{e,\sigma}f(w_t);a_t\leqslant|\lambda|\leqslant 2^{n-2}\mu,\sigma\in V(\mathrm{St}(e),n)\},$$

其中 $a_t=\max\{0,t+2^n\mu+1-k\}$；

iii) 设 $\delta\in V(\Delta,d),1\leqslant d\leqslant n-1,w_t,1\leqslant t\leqslant M(2^{n-d-1}\mu,d)$，是 δ 的适当内点，如果 $1+M(i-1,d)\leqslant t\leqslant M(i,d)$，$0\leqslant i\leqslant 2^{n-d-1}\mu,M(-1,d)=0$，则在 w_t 处的值是

$$\{D^\lambda_{\delta,\sigma}f(w_t)|i\leqslant|\lambda|\leqslant 2^{n-d-1}\mu,\sigma\in V(\mathrm{St}(\delta),n)\};$$

iv) 在 $\sigma\in V(\Delta,n)$ 上，所需的值是

$$\{f(w_i), 1 \leqslant i \leqslant M(0,n)\},$$

其中 $w_i, 1 \leqslant i \leqslant M(0,n)$，是 σ 的适当内点。

证明 由引理 4.19，条件 i)—iv)限制在每个 n 单纯形 $\sigma \in \Delta$ 上，都唯一地确定了一个 k 次多项式 p_σ，从而 $f, f|_\sigma = p_\sigma$，由 i)—iv)所唯一确定。 □

为得到空间 $S_k^\mu(\Delta)$的维数，我们将 $S_k^\mu(\Delta)$分解为一些子空间的直和。为此我们记 $S_k^\mu(\delta, w_i)$ 为 $S_k^\mu(\Delta)$ 的子空间，使得引理 4.20 中的值 i)—iv)除关于 i 单纯形 $(i \geqslant 1)\delta \in \Delta$ 之内点 w_i 的那部分外，都为零。相应地，记 $S_k^\mu(v)$ 为 $S_k^\mu(\Delta)$ 的子空间，使得其中元素的值 i) ~ iv)除在顶点 v 处的外，其余都为零。

引入上面的记号后，由引理 4.20，当 $k \geqslant 2^n\mu + 1$ 时，显然有

$$S_k^0(\Delta) = \sum_{v \in V(\Delta)} \oplus S_k^0(v) \oplus \sum_{d=1}^{n-1} \oplus \sum_{\delta \in V(\Delta,d)} \oplus \sum_{i=1}^{M(2^{n-d-1}\mu, d)} \oplus S_k^0(\delta, w_i). \tag{4.23}$$

进一步，我们有如下的引理

引理 4.21 若 $k \geqslant 2^n\mu + 1$，则

$$S_k^\mu(\Delta) = \sum_{v \in V(\Delta)} \oplus S_k^\mu(v) \oplus \sum_{d=1}^{n} \oplus \sum_{\delta \in V(\Delta,d)} \oplus \sum_{i=1}^{M(2^{n-d-1}\mu, d)} \oplus S_k^\mu(\delta, w_i).$$

证明 定义 $L_{k,\mu}$ 为上式的右端。因为它的每一项都是 $S_k^\mu(\Delta)$ 的子空间，从而 $L_{k,\mu} \subseteq S_k^\mu(\Delta)$。

反之，若 $f \in S_k^\mu(\Delta) \subset S_k^0(\Delta)$，由(4.23)，存在 $f_v \in S_k^0(u)$ 及 $f_{\delta,i} \in S_k^0(\delta, w_i)$，使得

$$f = \sum_{v \in V(\Delta)} f_v + \sum_{d=1}^{n} \sum_{\delta \in V(\Delta,d)} \sum_{i=1}^{M(2^{n-d-1}\mu, d)} f_{\delta,i}, \tag{4.24}$$

从而只需证 $f_v \in S_k^\mu(u)$ 及 $f_{\delta,i} \in S_k^\mu(\delta, w_i)$。

现证 $f_v \in S_k^\mu(v)$。 由定理 4.6′，因 $f \in S_k^\mu(\Delta)$，知 f 在 v 处 $(2^{n-1}\mu, \mu)$协调。又由引理 4.20 及(4.23)知，当 $|\lambda| \leqslant 2^{n-1}\mu$ 时，

有 $D^{\lambda}_{v,\sigma}f(v)=D^{\lambda}_{v,\sigma}f_v(v)$，其中 $\sigma\in \mathrm{St}(v)$ 是 n 单纯形．从而 f_v 在 v 处也是$(2^{n-1}\mu,\mu)$协调的．由 $D^{\lambda}_{w,\sigma}f_v(w)=0$，顶点 $w\in\Delta$，$|\lambda|\leqslant 2^{n-1}\mu,\sigma\in \mathrm{St}(w)$，易知 f_v 于 w 处 $(2^{n-1}\mu,\mu)$-协调．同样的，f_v 在 d 单纯形 $\delta(d\geqslant 1)$ 之内点 w_t 处亦 $(i,2^{n-d-1}\mu,\mu,\delta)$ 协调，其中 $1+M(i-1,d)\leqslant t\leqslant M(i,d)$．再次引用定理 4.6′，可知 $f_v\in S^{\mu}_{k}(v)$．同理可证 $f_{\delta,t}\in S^{\mu}_{k}(\delta,w_t)$． □

有了上面的准备，定理 4.18 就不难证明了．事实上，由引理 4.21，易得

$$\dim S^{\mu}_{k}(\Delta)=\sum_{v\in V(\Delta)}\dim S^{\mu}_{k}(v)+\sum_{d=1}^{n}\sum_{\delta\in V(\Delta,d)}\sum_{t=1}^{M(2^{n-d-1}\mu,d)}\cdot\dim S^{\mu}_{k}(\delta,w_t).\tag{4.25}$$

由命题 4.3 和命题 4.5，我们有

$$\dim S^{\mu}_{k}(v)=\dim S^{\mu}_{k}(\mathrm{St}(v)).$$

再当 $1+M(i-1,d)\leqslant t\leqslant M(i,d)$时，

$$\dim S^{\mu}_{k}(\delta,w_t)=\dim S^{\mu}_{2^{n-d-1}\mu}(\mathrm{Ts}(\delta))-\dim S^{\mu}_{i-1}(\mathrm{Ts}(\delta)).$$

再根据(4.25)式即可证出定理 4.18． □

在定理 4.18 中，为求得 $\dim S^{\mu}_{k}(\Delta)$，用到 $k\geqslant 2^{n}\mu+1$．然而这个条件是可以减弱的．当Δ是 $\mathbf{R}^2$ 中的三角剖分且 $k\geqslant 3\mu+2$ 时，洪东[86]得到了 $\dim S^{\mu}_{k}(\Delta)$ 的维数．一般地，当Δ为 $\mathbf{R}^n(n\geqslant 3)$ 中的单纯形剖分时，有下面的结果，

定理 4.22[87] 设Δ是 $\mathbf{R}^n$ 中的单纯形剖分，$n\geqslant 3$，$k\geqslant 2^{n-2}\cdot(3\mu+1)+1$，则

$$\dim S^{\mu}_{k}(\Delta)=\sum_{v\in V(\Delta)}\Big[\dim S^{\mu}_{2^{n-2}(3\mu+1)}(\mathrm{St}(v))+\sum_{i=2^{n-2}(3\mu+1)+1}^{2^{n-1}\mu}\Big(\dim \bar{S}^{\mu}_{i}(\mathrm{St}(v))-\sum_{e\in V(\mathrm{St}(v),1)}\dim S^{\mu}_{2i-k}(\mathrm{Ts}(e))\Big)\Big]$$

$$+\sum_{e\in V(\Delta,1)}\sum_{i=2^{n-3}(3\mu+1)+1}^{2^{n-1}\mu}\dim\bar{S}^{\mu}_{2i-k}(\mathrm{Ts}(e))$$

$$+\sum_{e\in V(\Delta,1)}\Big[(k-3\cdot 2^{n-2}\mu-1)\dim S^{\mu}_{2^{n-1}\mu}(\mathrm{Ts}(e))$$

$$-\sum_{j=1}^{k-3\cdot 2^{n-2}\mu-1}\dim S^{\mu}_{2^{n}\mu-k+j}(\mathrm{Ts}(e))\Big]$$

$$+\sum_{d=2}^{n-1}\sum_{\delta\in V(\Delta,d)}\Big[M(2^{n-d-1}\mu,d)\dim S^{\mu}_{2^{n-d-1}\mu}(\mathrm{Ts}(e))$$

$$-\sum_{j=0}^{2^{n-d-1}\mu}(M(j+1,d)-M(j,d))\dim S^{\mu}_{j}(\mathrm{Ts}(\delta))\Big]$$

$$+M(0,n)\cdot n(V(\Delta,n)),$$

其中 $\dim\bar{S}^{\mu}_{i}(\cdot)=\dim S^{\mu}_{i}(\cdot)-\dim S^{\mu}_{i-1}(\cdot)$，且当 $i<0$ 时，

$$\dim S^{\mu}_{i}(\cdot)=0.$$

特别地，当 $n=3$ 时，如果记 Γ_v 为 St(v) 中以 v 为端点的网线的集合，$N_{j,v}$ 是 St(v) 中不以 v 为端点的 j 单纯形的个数，δ_v 和 b_v 分别是 Γ_v 中奇异网线和边界网线的个数，则当 $k\geqslant 6\mu+3$ 时，有

$$\dim S^{\mu}_{k}(\Delta)=\sum_{v\in V(\Delta)}\Big[\dim S^{\mu}_{3\mu+1}(\mathrm{St}(v))$$

$$+\sum_{j=1}^{\mu-1}\Big(\sum_{e\in\Gamma_v}(\dim S^{\mu}_{c(j)}(\mathrm{Ts}(e))-\dim S^{\mu}_{d(j)}(\mathrm{Ts}(e))\Big)$$

$$+\Big(\frac{1}{2}(\mu+1)\Big(\mu+2\Big(\mu-2\Big[\frac{\mu}{2}\Big]\Big)$$

$$+j-2\Big[\frac{j}{2}\Big]\Big)\Big)-2\Big(\Big[\frac{\mu+1}{2}\Big]$$

$$-\Big[\frac{j}{2}\Big]+1\Big)\Big(\Big[\frac{\mu+1}{2}\Big]-\Big[\frac{j}{2}\Big]\Big)\Big)N_{1,v}$$

$$+\Big(\frac{1}{2}j(j-1)+\frac{3}{2}\Big(\Big[\frac{\mu+1}{2}\Big]$$

$$-\Big[\frac{j}{2}\Big]+1\Big)\Big(\Big[\frac{\mu+1}{2}\Big]-\Big[\frac{j}{2}\Big]\Big)\Big)N_{2,v}$$

$$
\begin{aligned}
&+\left(\left[\frac{\mu+1}{2}\right]-\left[\frac{i}{2}\right]+1\right)\left(\left[\frac{\mu+1}{2}\right]\right. \\
&\left.\left.\left.-\left[\frac{i}{2}\right]\right)\left(b_v+\frac{1}{2}\delta_v\right)\right)\right] \\
&+\sum_{e\in V(\Delta,1)}\left[\sum_{i=1}^{\mu-1}\dim\tilde{S}^{\mu}_{d(i)}(\mathrm{Ts}(e))\right. \\
&+(k-6\mu-1)\dim S^{\mu}_{2\mu}(\mathrm{Ts}(e)) \\
&\left.-\sum_{i=1}^{k-6\mu-1}\dim S^{\mu}_{8\mu-k+i}(\mathrm{Ts}(e))\right] \\
&+\sum_{i=0}^{\mu}M(i,2)n(V(\Delta,2)) \\
&+M(0,3)\cdot n(V(\Delta,3)), \qquad (4.26)
\end{aligned}
$$

其中 $c(i)=\mu+\left[\frac{\mu}{2}\right]+\left[\frac{i}{2}\right], d(i)=6\mu+2+2i-k$.

定理 4.22 的证明较冗长，不拟在这里给出．有兴趣的读者请参见[87]．

从定理 4.18 及定理 4.22 可以看出，只有在 k 很大时，空间 $S^{\mu}_{k}(\Delta)$ 的维数才能被确定．但对特殊一点的单纯形剖分 Δ，k 的值可以适当地小些．比如在所谓的奇四面体剖分上，就是如此．

定义 4.23 设 Δ 是 R^3 中的四面体单纯形剖分．我们称 Δ 是奇的，如果 Δ 的内网线或是奇异的，或使得 Δ 中以其为一边的三角形的个数是奇数．我们称这样的网线为奇的．

这里我们说 Δ 中的一条网线是奇异的，是指 Δ 中有四个三角形以其为一边，并且这四个三角形分别位于二个平面上．

定理 4.24 若 Δ 是 R^3 中的奇四面体剖分，且 $k\geqslant 7$，则有

$$
\begin{aligned}
\dim S^1_k(\Delta)=&\sum_{v\in V(\Delta)}\dim S^1_3(\mathrm{St}(v))+(3k-19)N_e \\
&+(k-5)^2N_t+\frac{1}{6}(k-5)(k-6)(k-7)N_t \\
&+(N_s+N_b)(k-5),
\end{aligned}
$$

其中 N_i 是Δ中 i 单纯形的个数，N_s 和 N_b 分别是Δ中奇异网线和边界网线的个数。

为证定理 4.24，我们先证两个引理。

引理 4.25[81]　若 $f\in S_k^0(\Delta)$，$k\geqslant 7$，则 f 可由如下的值唯一确定(如无特别说明，下面的 σ 总是代表四面体)。

i) 在每个顶点 $v\in\Delta$ 处 f 的值是

$$\{D_{v,\sigma}^{\lambda}f(v);|\lambda|\leqslant 3,\sigma\in \mathrm{St}(v)\};$$

ii) 设网线 $e\in\Delta$，w_t，$1\leqslant t\leqslant k-5$ 是 e 的不同内点，则 f 的值是

$$\left\{D_{e,\sigma}^{\lambda}f(w_t);a_t\leqslant |\lambda|-\sum_{v\in V(\sigma)\setminus V(e)}\lambda_v\leqslant 2,\lambda_e\leqslant 1\right\},$$

其中 $a_t=\max\{0,7-k+t\}$；

iii) 设三角形 $\delta\in\Delta$，w_t，$1\leqslant t\leqslant \frac{1}{2}(k-4)(k-6)$为 δ 的内点且为适定结点组（可唯一确定一个定义在 δ 上的二元 $k-6$ 次多项式的插值结点组）。同时要求 w_t，$1\leqslant t\leqslant \frac{1}{2}(k-5)(k-6)$也是适定结点组，则在 δ 上 f 的值是

$$\{D_{\delta,\sigma}^{i}f(w_t),1\leqslant t\leqslant M_i,i=0,1,\sigma\in \mathrm{St}(\delta)\},$$

其中 $M_i=\frac{1}{2}(k-4-i)(k-5-i)$；

iv) 设四面体 $\sigma\in\Delta$，w_t，$1\leqslant t\leqslant \frac{1}{6}(k-5)(k-6)(k-7)$是$\sigma$ 的内点且为适定结点组，则 f 在 σ 上的值是

$$\left\{f(w_t),\ 1\leqslant t\leqslant \frac{1}{6}(k-5)(k-6)(k-7)\right\},$$

当 $k=7$ 时，取消此条件。

证明　显然我们只需证明 i)—iv) 限制在每个四面体 $\sigma\in\Delta$ 上，都唯一确定了一个 k 次多项式。为此，我们先计算限制在σ 上，i)—iv)中所含值的个数 $N_{\sigma,i}$，$1\leqslant i\leqslant 4$，不难直接算得

$$N_{\sigma,1} = 4 \times \binom{3+3}{3} = 80,$$

$$N_{\sigma,2} = 6 \times (k-7+2(k-6)+k-5) = 6(4k-24),$$

$$N_{\sigma,3} = 4 \times \left(\frac{1}{2}(k-4)(k-5)+\frac{1}{2}(k-5)(k-6)\right)$$

$$= 4(k-5)^2,$$

$$N_{\sigma,4} = \frac{1}{6}(k-5)(k-6)(k-7).$$

从而值的总个数为

$$\sum_{i=1} N_{\sigma,i} = \frac{1}{6}(k+3)(k+2)(k+1).$$

下面只需证明，当(σ 上的 k 次多项式 p 由 i)—iv)(限制在 σ 上)所给出的值均为零时，往证 $p=0$. 设 v 是 σ 的顶点，由 i) 知 $D^{\lambda}_{v,\sigma}p(v)=0$, $|\lambda|\leqslant 3$. 又设 $e=[v_1, v_2]$ 是 σ 的一边，由 $D^i_{v_1-v_2}p(v_1)=D^i_{v_2-v_1}p(v_2)=0$, $0\leqslant i\leqslant 3$ 及 $p(w_i)=0$, $1\leqslant i\leqslant k-7$, 易知 $p|_e=0$, 这里 w_i, $1\leqslant i\leqslant k-5$ 为 e 的不同内点. 利用 ii)进一步可推得 $D^{\lambda}_{e,\sigma}p|_e=0$, $0\leqslant|\lambda|\leqslant 2$, 其中 λ 的每个分量都 $\leqslant 1$. 类似地，利用 iii)可得 $D^i_{\delta,\sigma}p|_\delta=0$, $i=0,1$, 其中 δ 是 σ 的三角形面. 由 Bezont 定理，存在 $k-8$ 次多项式 $\bar{p}$, 使得 $p=\bar{p}(\pi_1\pi_2\pi_3\pi_4)^2$, 其中 π_i 是与 v_i 相对的三角形所在平面的方程. 最后由 iv)知 $p\equiv 0$.

引理 4.26 设Δ是 R^3 中的单纯形剖分，$f\in S^0_k(\Delta)$, $k\geqslant 7$, 则 $f\in S^1_k(\Delta)$ 的充要条件是由引理 4.25 给出的值 i)—iv)满足如下条件：

1) 由 i) 所给出的值在每个顶点 $v\in\Delta$ 处都是 (3,1)-协调的；

2) 在每条网线 $e\in\Delta$上，设$\delta_i=[e,v_i]$, $1\leqslant i\leqslant d(e)$是$\Delta$中按序排列的所有以 e 为一边的三角形，并假定当 e 为边界网线时，δ_1 和 $\delta_{d(e)}$ 为边界网面. 假定 e_i 是 δ_i 在 e 上的单位内法向量，θ_i 是 e_i 和 e_{i+1} 间的夹角，$\sigma_i=[e,v_i,v_{i+1}]$, 及 $p_i=f|\sigma_i$, $1\leqslant$

$i \leqslant d(e)$. 则在 e 上满足条件

$$D_{e_{i+1}} D_{e_i}^j p_i(w_t) = \left(\frac{\sin(\theta_i + \theta_{i-1})}{\sin\theta_{i-1}} D_{e_i} - \frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_{i-1}} D_{e_{i-1}} \right)$$

$$\cdot D_{e_i}^j p_{i-1}(w_t), \quad j = 0,1; 1 \leqslant t \leqslant k - 6 + j,$$

$$1 + r(e) \leqslant i \leqslant d(e) - r(e), \qquad (4.27)$$

这里 v_i 的下标是模 $d(e)$ 的, 此外, $r(e) = 1$ 如果 e 是边界网线,否则 $r(e) = 0$;

3) 设 $\delta \in \Delta$ 是内部三角形,$\sigma_i = [\delta, v_i], i = 1,2$是$\Delta$中以$\delta$为公共面的两个四面体, n_i, $i = 1,2$ 为 σ_i 在 δ 上的单位内法向量, $p_i = f|\sigma_i$,则在 δ 上满足条件

$$D_{n_1} p(w_t) + D_{n_2} p_2(w_t) = 0, 1 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}(k-5)(k-6). \qquad (4.28)$$

引理 4.26 可由定理 4.6 直接证得. 事实上,由(4.27)不难证明 f 在网线 e 的内点 w_t 处是 $(a_t,2,1,e)$-协调的,这里

$$a_t = \max\{0, t + 7 - k\}.$$

由(4.28)可证 f 在 $\delta \in \Delta$ 的内点 $w_t, 1 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}(k-5)(k-6)$ 处是$(0,1,1,\delta)$-协调的.再由定理 4.6, 即知1),2),3)是 $f \in S_k^1(\Delta)$ 的充要条件.

现在我们证明定理 4.24,将引理 4.25 中的值 i)—iv) 看作空间 $(S_k^0(\Delta))^*$中的元素,由引理 4.25 和引理 4.26,我们只需求出引理 4.25 i)—iv)中(在引理 4.25 的约束下) 独立元素个数, 并且它就是 $S_k^1(\Delta)$ 的维数. 由命题 4.3, i)中的值在顶点 $v \in \Delta$ 处的独立变量个数为

$$N_v(i) = \dim S_3^1(\mathrm{St}(v)).$$

此外,不难验证 iii)和 iv)中所含独立变量个数在三角形 δ 和四面体 σ 上分别为

$$N_\delta(\mathrm{iii}) = \frac{1}{2}(k-4)(k-5) + \frac{1}{2}(k-5)(k-6)$$
$$= (k-5)^2$$

和

$$N_e(\text{iv}) = \frac{1}{6}(k-5)(k-6)(k-7).$$

下面我们求 ii) 中独立变量个数。首先，易知 $f(w_t)$, $1 \leqslant t \leqslant k-7$ 是 $N_{e,0}(\text{ii}) = k-7$ 个自由变量。另外，不难验证(4.27)中 $j=0$ 那部分方程等价于

$$D_{e_{i+1}} p_i(w_t) = \frac{\sin \Theta_{i+1}}{\sin \theta_1} D_{e_2} p_1(w_t) - \frac{\sin(\Theta_{i+1} - \theta_1)}{\sin \theta_1} D_{e_1} p_1(w_t),$$

$$2 \leqslant i \leqslant d(e)-1, \quad 1 \leqslant t \leqslant k-6, \quad (4.29)$$

其中 $\Theta_1 = 0$, $\Theta_i = \sum_{l=1}^{i-1} \theta_l$.

易知 (4.29) 中含有 $N_{e,1}(\text{ii}) = 2(k-6)$ 个自由变量。在 (4.27) ($j=1$ 时的) 方程中，由于 $f|_{e_i}$ 已被 i), iii) 和 ii) 中 ($|\lambda| \leqslant 1$ 的值)确定，故 $D^2_{e_i} p_{i-1}(w_t)$ 是已知的。从而只有其它项可提供自由变量。我们分三种情况来讨论。首先当 e 是边界网线时，(4.27) ($j=1$) 等价于

$$x_{i,t} = \frac{\sin(\theta_i + \theta_{i-1})}{\sin \theta_{i-1}} y_{i,t} - \frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_{i-1}} x_{i-1,t}, \qquad (4.30)$$

$$2 \leqslant i \leqslant d(e)-1, \quad 1 \leqslant t \leqslant k-5,$$

其中 $x_{i,t} = D_{e_{i+1}} D_{e_i} p_i(w_t)$, $y_{i,t} = D^2_{e_i} p_{i-1}(w_t)$.

显然，(4.30) 只有 $N_{e,2}(\text{ii}) = k-5$ 个自由变量 $x_{1,t}$, $1 \leqslant t \leqslant k-5$.

其次，e 是奇异网线。此时显然有 $\theta_i + \theta_{i-1} = \pi$，从而 (4.27) ($j=1$) 等价于

$$x_{i,t} = -x_{i-1,t}, \quad 1 \leqslant i \leqslant 4, \quad 1 \leqslant t \leqslant k-5,$$

其中 $x_{i,t}$ 如(4.30)所定义，且 $x_{0,t} = D_{e_4} D_{e_1} p_4(w_t) = x_{4,t}$.

显然上式等价于

$$x_{i,t} = -x_{i-1,t}, \quad 2 \leqslant i \leqslant 4, \quad 1 \leqslant t \leqslant k-5.$$

从而也含有 $N_{e,2}(\text{ii}) = k-5$ 个自由向量 $x_{1,t}$, $1 \leqslant t \leqslant k-5$.

最后，e是奇网线，即Δ中以e为一边的三角形有奇数个。此时 $d(e)$ 是奇数。在这种情况下，由(4.27)($j=1$)中解出 $x_{i,t}$，得

$$x_{i,t}=\frac{\sin\theta_i}{2}\sum_{s=1}^{d(e)}(-1)^{s-1}\frac{\sin(\theta_{s+i}+\theta_{s+i-1})}{\sin\theta_{s+i}\sin\theta_{s+i-1}}y_{s+i,t},$$

$$1\leqslant i\leqslant d(e),\ 1\leqslant t\leqslant k-5,$$

其中θ_i及 $y_{i,t}$ 的下标 i 是模 $d(e)$ 的.

从而在这种情况下，(4.27)($j=1$)中无新的自由变量，即而 $N_{e,1}(\text{ii})=0$。

由上面讨论，我们可得 $S_k^1(\Delta)$ 的维数

$$\begin{aligned}\dim S_k^1(\Delta)=&\sum_{v\in V(\Delta)}N_v(\text{i})+\sum_{\delta\in V(\Delta,2)}N_\delta(\text{iii})\\&+\sum_{\sigma\in V(\Delta,3)}N_\sigma(\text{iv})+\sum_{e\in V(\Delta,1)}\sum_{i=0}^{2}N_{e,i}(\text{ii})\\&=\sum_{v\in V(\Delta)}\dim S_5^1(\text{St}(v))+(k-5)^2N_2\\&+\frac{1}{6}(k-5)(k-6)(k-7)N_3\\&+(3k-19)N_1+(N_b+N_o)(k-5).\end{aligned}$$

即定理 4.24 成立。 □

§3. 高维样条中一点维数

熟知，二维样条空间的一点维数问题已被彻底解决。但三维及三维以上样条空间的一点维数问题却较少有人讨论。本节将研究这个问题。上节讨论高维样条空间的维数时，我们已看到了高维样条研究的困难所在。而对高维样条空间中一点维数问题的研究，将使我们从另一个角度认识这个问题的复杂性。

我们首先看一个特殊的星域，并由此建立高维样条和低维样

条维数之间的关系。

定理 4.27[61] 设 $\mathrm{St}(v)$ 是 R^n 中的 v 星。如果 $\mathrm{St}(v)$ 中的顶点除 v 外都位于同一个 $n-1$ 维超平面 π 上,则

$$\dim S_k^\mu(\mathrm{St}(v))=\dim S_{k-1}^\mu(\mathrm{St}(v))+\dim S_k^\mu(\Delta^*),$$

其中 $\Delta^*=\mathrm{St}(v)\cap\pi$ 是 v- 星 $\mathrm{St}(v)$ 在超平面 π 上的诱导剖分。

为证定理 4.27,我们先证几个引理。

引理 4.28 设 $\mathrm{St}(v)$ 如定理 4.27 所示,则任何 $f\in S_k^\mu(\mathrm{St}(v))$ 都由其在 v 处的值 $D_{v,\sigma}^\lambda f(v)$, $|\lambda|\leqslant k-1$, $\sigma\in\mathrm{St}(v)$及其在 Δ^* 上的限制 $\tilde{f}=f|_{\Delta^*}$ 所唯一确定.

证明 设 $\sigma\in\mathrm{St}(v)$ 是一个 n 单维形,则

$$D_{v,\sigma}^\lambda f(v),|\lambda|\leqslant k-1,$$

显然唯一确定一个形如 $p_{1,\sigma}(w)=\tau_{\sigma,v}\bar{p}_{1,\sigma}(w)$ 的 k 次多项式,使得

$$D_{v,\sigma}^\lambda p_{1,\sigma}(v)=D_{v,\sigma}^\lambda f(v),|\lambda|\leqslant k-1,\tag{4.31}$$

其中 $\bar{p}_{1,\sigma}$ 是一个 $k-1$ 次多项式, $\tau_{\sigma,v}$ 是 w 的重心坐标表达式 $w=\sum\limits_{u\in V(\sigma)}u\tau_{\sigma,u}$ 中关于顶点 v 的重心坐标。

设 $p_\sigma=f|_\sigma$,且

$$p_{2,\sigma}=p_\sigma-p_{1,\sigma}.\tag{4.32}$$

由(4.31),如果 $|\lambda|\leqslant k-1$,则有

$$\begin{aligned}D_{v,\sigma}^\lambda p_{2,\sigma}(v)&=D_{v,\sigma}^\lambda p_\sigma(v)-D_{v,\sigma}^\lambda p_{1,\sigma}(v)\\&=D_{v,\sigma}^\lambda f(v)-D_{v,\sigma}^\lambda f(v)\\&=0.\end{aligned}$$

如果记 $\tau=(\tau_{\sigma,u}|u\in V(\sigma)\backslash v)$,则 $p_{2,\sigma}$ 有如下形式

$$p_{2,\sigma}(w)=\sum_{|\lambda|=k}C_\sigma^\lambda\tau^\lambda.$$

注意到当 $w\in\delta=\sigma\cap\pi$ 时, w 关于 δ 的重心坐标表示是

$$w=\sum_{u\in V(\delta)}u\tau_u.$$

从而 $p_{2,\sigma}$ 由其在 δ 上的限制所确定。由 (4.32), $f-f_1$ 被 $\tilde{f}=$

$f|_{\Delta^*}$唯一确定。其中 $f_1|_\sigma = p_{1,\sigma}$，而 f_1 由

$$\{D^{\lambda}_{v,\sigma}f(v) \mid |\lambda| \leqslant k-1, \sigma \in \mathrm{St}(v)\}$$

唯一确定。这就证明了引理 4.28。 □

由引理 4.28 立即可得到下面的推论：

推论 4.29 如果 $f \in S^0_k(\mathrm{St}(v))$，$\mathrm{St}(v)$ 如定理 4.27 所述，则 $f \in S^{\mu}_k(\mathrm{St}(v))$ 的充要条件是 f 在顶点 v 处 $(k-1,\mu)$ 协调，且 $f|_{\Delta^*} \in S^{\mu}_k(\Delta^*)$。

现在证明定理 4.27。设 $p_{1,\sigma}$ 和 $p_{2,\sigma}$ 如引理 4.28 所定义。并设 f_1, f_2 分别由 $f_1|_\sigma = p_{1,\sigma}, f_2|_\sigma = p_{2,\sigma}$ 定义。由(4.32)，对任何 $f \in S^{\mu}_k(\mathrm{St}(v))$，有

$$f = f_1 + f_2. \tag{4.33}$$

为证明定理 4.27，我们引入 $S^{\mu}_k(\mathrm{St}(v))$ 的两个子空间

$$B_1 = \{f \in S^{\mu}_k(\mathrm{St}(v)) \mid f|_{\Delta^*} = 0\},$$

及

$$B_2 = \{f \in S^{\mu}_k(\mathrm{St}(v)) \mid D^{\lambda}_{v,\sigma}f(v) = 0, |\lambda| \leqslant k-1, \sigma \in \mathrm{St}(v)\}.$$

由(4.33)知

$$S^{\mu}_k(\mathrm{St}(v)) = B_1 + B_2,$$

再由引理 4.28，f 按(4.33)的分解是唯一的。从而

$$S^{\mu}_k(\mathrm{St}(v)) = B_1 \oplus B_2,$$

即 $S^{\mu}_k(\mathrm{St}(v))$ 是 B_1 与 B_2 的直和。

由 B_1 的定义，B_1 由 $(k-1,\mu)$ 协调的值

$$\{D^{\lambda}_{v,\sigma}f(v) \mid |\lambda| \leqslant k-1, \sigma \in \mathrm{St}(v)\}$$

唯一确定。引用命题 4.2 即得

$$\dim B_1 = \dim S^{\mu}_{k-1}(\mathrm{St}(v)).$$

从而为证定理 4.27，只需证明

$$\dim B_2 = \dim S^{\mu}_k(\Delta^*).$$

定义如下的映射 T

$$T: B \to S^{\mu}_k(\Delta^*),$$
$$f \to f|_{\Delta^*},$$

若 $T(f)=0$，则 $f|_{\Delta^*}=0$。由于 $f\in B_2$，从而 $D^\lambda_{v,\sigma}f(v)=0$，$|\lambda|\leqslant k-1,\sigma\in \mathrm{St}(v)$。由引理 4.28，可知 $f\equiv 0$，即 T 是单射。

另一方面，对任意给定的 $\bar{f}\in S^\mu_k(\Delta^*)$，再次引用引理 4.28，可知存在唯一的 $f\in S^\mu_k(\mathrm{St}(v))$，使得 $f|_{\Delta^*}=\bar{f}$ 及 $D^\lambda_{v,\sigma}f(v)=0$，$|\lambda|\leqslant k-1,\sigma\in \mathrm{St}(v)$，从而 $T(f)=\bar{f}$。即 T 还是满射的。这就证明了 T 是从 B_2 到 $S^\mu_k(\Delta^*)$ 上的一一映射，至此我们完成了定理 4.27 的证明。 □

反复运用定理 4.27，得到如下的推论：

推论 4.30 设 $\mathrm{St}(v)$ 和 Δ^* 如定理 4.27 所示，则有

$$\dim S^\mu_k(\mathrm{St}(v))=\sum_{i=0}^{k}\dim S^\mu_i(\Delta^*).$$

由推论 4.30 可以看出，即使想得到较简单的单纯形剖分上的样条空间的维数，甚至象定理 4.27 所述星域 $\mathrm{St}(v)$ 上的样条空间维数，也必须求出较低维数空间中的任意单纯形剖分 Δ^* 上的所有空间 $S^\mu_i(\Delta^*)(0\leqslant i\leqslant k)$ 的维数。也就是说，$\mathbf{R}^n$ 中 v- 星 $\mathrm{St}(v)$ 上样条的研究也远比 $\mathbf{R}^{n-1}$ 中任意单纯形剖分 Δ^* 上样条的研究复杂。

定理 4.27 所建立起来的 $\mathbf{R}^n$ 中的一点维数与 $\mathbf{R}^{n-1}$ 中任意单纯形剖分上的样条空间维数之间的关系，使得我们可以将低维空间中的样条研究嵌入到高维中去研究。这种技巧在处理一些样条空间的维数问题时是很有用的，这点将在以后的章节中看到。

在本章开始时，我们曾提到高维样条的研究远比一维及二维样条的研究困难，表现之一是样条空间的奇异结构现象更加复杂。熟知，三角剖分 Δ 上的样条空间的奇性，随着样条次数的升高而消失。比如，当 $k\geqslant 4\mu+1$ 时，空间 $S^\mu_k(\Delta)$ 是没有奇异性的。而在 $\mathbf{R}^n(n\geqslant 3)$ 中，存在这样的单纯形剖分，使得 k 无论取何值，空间 $S^\mu_k(\Delta)$ 总是奇异的。下面的剖分就是这样的一个例子。

例 4.31 设 Δ 是如图 4.7 所示的剖分，其中顶点 $v_i,w_i,1\leqslant i\leqslant 3$ 都位于同一平面上，且构成一个二维 Morgan-Scott 剖分 Δ_{ms}。由推论 4.30，对所有 $k\geqslant 3$，都有

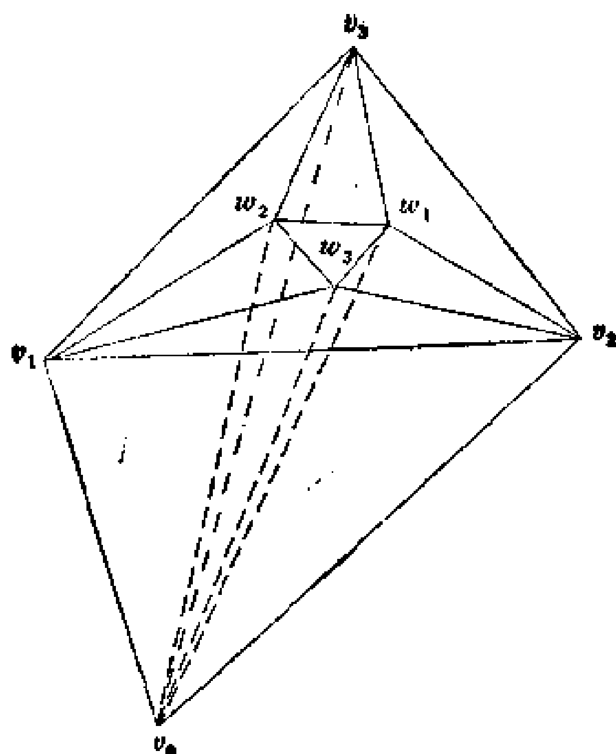


图 4.7

$$\dim S_k^1(\Delta) = 4 + \sum_{i=2}^{k} \dim S_i^1(\Delta_{mi}). \qquad (4.34)$$

假定在 Δ_{mi} 中不含奇异网点，则当 $i \geqslant 3$ 时，不难得到

$$\dim S_i^1(\Delta_{mi}) = \frac{7}{2}(i-4)(i-5) + 24i - 63.$$

由推论 4.10，得

$$\dim S_2^1(\Delta_{m2}) = 6 + \delta,$$

其中 $\delta = 1$，如果 $v_i w_i, 1 \leqslant i \leqslant 3$ 是共点直线. 否则 $\delta = 0$.

这样由(4.34)，我们就得到了

$$\dim S_k^1(\Delta) = 10 + \delta + \sum_{i=3}^{k} \cdot \left[\frac{7}{2}(i-4)(i-5) + 24i - 63\right].$$

上式说明无论 k 是多大的值，空间 $S_k^1(\Delta)$ 总是奇异的. 这个例子

也表明定理 4.17 中的项 $\dim S_{4\mu}^{\mu}(\mathrm{St}(v))$ 不可能具体地求出。

定理 4.27 讨论了一个特殊的 v-星 $\mathrm{St}(v)$ 上的样条空间. 为简单记,我们先讨论 R^3 中的 v-星。然后再讨论 R^n 中的 v-星。

对一般的 v 星 $\mathrm{St}(v)$,我们有

定理 4.32 设 $\mathrm{St}(v)$ 是 R^3 中的 v 星,$k \geqslant 4\mu+1$,则有

$$\dim S_k^{\mu}(\mathrm{St}(v)) = \dim S_{4\mu}^{\mu}(\mathrm{St}(v)) + (k-4\mu)\sum_{e\in\Gamma_{1,1}}\dim S_{2\mu}^{\mu}(\mathrm{Ts}(e)) + \sum_{i=0}^{\mu}\left(\binom{k-4\mu+i}{2}-\binom{i}{2}\right)n(\Gamma_{2,1}) + \left(\binom{k-3\mu}{3}-\binom{\mu}{3}\right)n(\Gamma_3),$$

其中 $\Gamma_i, 0\leqslant i\leqslant 3$ 是 $\mathrm{St}(v)$ 中 i 单纯形的集合,$\Gamma_{i,1}$ 是 Γ_i 中以 v 为一顶点的元素的集合。

为证定理 4.32 仍需先证两个引理。

引理 4.33 设 $\mathrm{St}(v)$ 是 R^3 中的 v-星,$k\geqslant 4\mu+1$,$\Gamma_i,\Gamma_{i,1}$ 如定理 4.32 所示。令 $\Gamma_{i,2}=\Gamma_i\backslash\Gamma_{i,1}$,则任何 $f\in S_{k+4\mu+1}^{0}(\mathrm{St}(v))$ 由如下值唯一确定:

i) 在 $\mathrm{St}(v)$ 的顶点 v 处,f 的值是

$$D_{v,\sigma}^{\lambda}f(v), |\lambda|\leqslant k, \sigma\in\mathrm{St}(v),$$

其中 $\sigma\in\mathrm{St}(v)$ 是 n 单纯形;

在 $\mathrm{St}(v)$ 的其它顶点 $w\neq v$ 处,f 的值是

$$D_{w,\sigma}^{\lambda}f(w), |\lambda|\leqslant 4\mu;$$

ii) 在每个边 $e\in\Gamma_{1,1}$ 上的不同内点 $\{w_i\}_{i=1}^{2\mu}$ 处,f 的值是

$$D_{e,\sigma}^{\lambda}f(w_i), i\leqslant|\lambda|\leqslant 2\mu, 1\leqslant i\leqslant 2\mu, \sigma\in\mathrm{St}(e).$$

而在边 $e\in\Gamma_{1,2}$ 上的不同内点 $\{w_i\}_{i=1}^{k-1}$ 处,f 的值是

$$D_{e,\sigma}^{\lambda}f(w_i), i+4\gamma-k\leqslant|\lambda|\leqslant 2\mu, 1\leqslant i\leqslant k-1, \sigma\in\mathrm{St}(e);$$

iii) 设 $\{w_i\}_{i=1}^{M(i,2)}$ 是三角形 $\delta\in\Gamma_{2,2}$ 上的适当内点,其中 $M(i,2)=\binom{k-2\mu+2i}{2}-3\binom{i}{2}$(如引理 4.19 ($n=3$) 所定

义),则 f 在 δ 上的值是

$$D^i_{\delta,\sigma}f(w_t),0\leqslant i\leqslant\mu,1\leqslant t\leqslant M(i,2),\sigma\in \mathrm{St}(\delta);$$

若 $\{w_t\}_{t=1}^{M_k(\mu,2)}$ 是三角形 $\delta\in\Gamma_{2,1}$ 上的适当内点,其中

$$M_k(i,2)=\binom{k-2\mu+2i}{2}-2\binom{i}{2}-\binom{k-4\mu+i}{2},$$

则 f 的值是

$$D^i_{\delta,\sigma}f(w_t),0\leqslant i\leqslant\mu,1\leqslant t\leqslant M_k(i,2),\sigma\in \mathrm{St}(\delta);$$

iv) 设 $\{w_t\}_{t=1}^{M_k(0,3)}$ 是四面体 $\sigma\in\mathrm{St}(v)$ 上的适当内点,则 f 的值是

$$f(w_t),1\leqslant t\leqslant M_k(0,3),$$

其中 $M_k(0,3)=\binom{k}{3}-3\binom{\mu}{3}-\binom{k-3\mu}{3}$.

引理 4.33 的证明与引理 4.20 的证明类似,这里将不详细证明了.

记 $S_k^\mu(w)$ 为 $S^\mu_{k+4\mu+1}(\mathrm{St}(v))$ 的子空间,使得其中的函数 f,除 $D^\lambda_{w,\sigma}f(w),|\lambda|\leqslant a_w(a_w=k$ 如果 $w=v$,否则 $a_w=4\mu)$, $\sigma\in\mathrm{St}(w)$ 外,引理 4.33 中的 i)—iv)所指出的值全为零,又记 $S_k^\mu(e,w_t)$ 是 $S_k^\mu(\mathrm{St}(v))$ 的子空间,使得除 ii) 中关于 e 的内点 w_t 处的那部分值外,其余的值都为零. 最后设 $S_k^\mu(\delta)$ 和 $S_k^\mu(\sigma)$ 为 $S_k^\mu(\mathrm{St}(v))$ 的子空间,且分别使得除 iii)关于三角形 δ 和 iv)关于四面体 σ 的值外,其余的值都为零,从而与引理 4.21 类似地有

引理 4.34

$$\begin{aligned}S^\mu_{k+4\mu+1}(\mathrm{St}(v))=&\sum_{w\in V(\mathrm{St}(v))}\oplus S_k^\mu(w)\oplus\sum_{e\in\Gamma_{1,1}}\\&\oplus\sum_{t=1}^{2r}\oplus S_k^\mu(e,w_t)\oplus\sum_{e\in\Gamma_{1,2}}\\&\oplus\sum_{t=1}^{k-2r}\oplus S_k^\mu(e,w_t)\oplus\sum_{\delta\in\Gamma_2}\\&\oplus S_k^\mu(\delta)\oplus\sum_{\sigma\in\Gamma_3}S_k^\mu(\sigma).\end{aligned}$$

不难看出

$$\dim S_k^\mu(\sigma) = \binom{k}{3} - 3\binom{\mu}{3} - \binom{k-3\mu}{3}, \sigma \in \Gamma_3,$$

$$\begin{aligned}\dim S_k^\mu(\delta) &= \sum_{i=0}^{\mu} M_k(i,2) \\ &= \sum_{i=0}^{\mu}\left[\binom{k-2\mu+2i}{2} - 2\binom{i}{2}\right. \\ &\quad \left. - \binom{k-4\mu+i}{2}\right], \delta \in \Gamma_{2,1},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dim S_k^\mu(\delta) &= \sum_{i=0}^{\mu} M(i,\ 2) \\ &= \sum_{i=0}^{\mu}\left[\binom{k-2\mu+2i}{2} - 3\binom{i}{2}\right], \delta \in \Gamma_{2,2}.\end{aligned}$$

分别利用命题 4.3 和命题 4.5 于空间 $S_k^\mu(\boldsymbol{w})$ 及 $S_k^\mu(\boldsymbol{e},\boldsymbol{w}_i)$上，我们证得

$$\begin{aligned}\dim S_{k+4\mu+1}^\mu(\mathrm{St}(\boldsymbol{v})) &= \dim S_k^\mu(\mathrm{St}(\boldsymbol{v})) + \sum_{w\in\Gamma_{0,1}} \dim S_{4\mu}^\mu(\mathrm{St}(\boldsymbol{w})) \\ &+ \sum_{e\in\Gamma_{1,1}}\left[2\mu \dim S_{2\mu}^\mu(\mathrm{Ts}(\boldsymbol{e})) - \sum_{i=0}^{2\mu-1} \dim S_i^\mu(\mathrm{Ts}(\boldsymbol{e}))\right] \\ &+ \sum_{e\in\Gamma_{1,2}}\left[(k-2\mu)\dim S_{2\mu}^\mu(\mathrm{Ts}(\boldsymbol{e})) - \sum_{i=0}^{2\mu-1} \mathrm{dm} S_i^\mu(\mathrm{Ts}(\boldsymbol{e}))\right] \\ &+ \sum_{i=0}^{\mu}\left[\left(\binom{k-2\mu+2i}{2} - 3\binom{i}{2}\right)n(\Gamma_{2,2})\right. \\ &+ \left.\left(\binom{k-2\mu+2i}{2} - 2\binom{i}{2} - \binom{k-4\mu+i}{2}\right)n(\Gamma_{2,1})\right] \\ &+ \left(\binom{k}{3} - 3\binom{\mu}{3} - \binom{k-3\mu}{3}\right)n(\Gamma_3). \qquad (4.35)\end{aligned}$$

另外，因 $k+4\mu+1 \geqslant 8\mu+2$，从而由定理 4.17 得

$$\dim S_{k+4\mu+1}^\mu(\mathrm{St}(\boldsymbol{v})) = \sum_{w\in\Gamma_0} \dim S_{4\mu}^\mu(\mathrm{St}(\boldsymbol{w}))$$

$$+\sum_{e\in\Gamma_1}\left[(k-2\mu)\dim S_{2\mu}^{\mu}(\mathrm{Ts}(e))-\sum_{j=0}^{2\mu-1}\dim S_j^{\mu}(\mathrm{Ts}(e))\right]$$

$$+\sum_{i=0}^{\mu}\left[\binom{k-2\mu+2i}{2}-3\binom{i}{2}\right]n(\Gamma_2)$$

$$+\left(\binom{k}{3}-4\binom{\mu}{3}\right)n(\Gamma_3). \tag{4.36}$$

至此，不难由(4.35)和(4.36)直接得到定理 4.32. □

利用(4.26)式，定理 4.32 可改进为

定理 4.32′ 设 $\mathrm{St}(v)$ 是 $\mathbf{R}^3$ 中的 v 星，$k\geqslant 3\mu+2$，则有

$$\dim S_k^{\mu}(\mathrm{St}(v))=\dim S_{3\mu+1}^{\mu}(\mathrm{St}(v))$$

$$+(k-3\mu-1)\sum_{e\in\Gamma_{1,1}}\dim S_{2\mu}^{\mu}(\mathrm{Ts}(e))$$

$$+\frac{1}{2}(\mu+1)(k-4\mu)(k-3\mu-1)n(\Gamma_{2,1})$$

$$+\binom{k-3\mu}{3}n(\Gamma_3).$$

定理 4.32′的证明可参照定理 4.32 并利用(4.26)给出.

注意到 $\dim S_{2\mu}^{\mu}(\mathrm{Ts}(e))$ 相当于二维空间中样条的一点维数，从而是可求出的. 所以定理 4.32 和定理 4.32′表明，v 星 $\mathrm{St}(v)$ 上的次数较高的样条空间的维数，可用次数适当小的样条空间的维数表示出来.

对 $\mathbf{R}^n$ 中的星域，也有类似的结果. 可归结为下面的定理.

定理 4.35 设 $\mathrm{St}(v)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的 v 星，$k\geqslant 2^{n-1}\mu+1$，Γ_i 是 $\mathrm{St}(v)$ 中 i 单纯形上的集合，$\Gamma_{i,1}$ 是 Γ_i 中以 v 为顶点的 i 单纯形的集合. 则有

$$\dim S_k^{\mu}(\mathrm{St}(v))=\dim S_{2^{n-1}\mu}^{\mu}(\mathrm{St}(v))$$

$$+(k-2^{n-1}\mu)\sum_{e\in\Gamma_{1,1}}\dim S_{2^{n-1}\mu}^{\mu}(\mathrm{Ts}(e))$$

$$+\sum_{d=2}^{n-1}\sum_{\delta\in\Gamma_{d,1}}\Big[(M(2^{n-d-1}\mu,d)$$

$$- M_k(2^{n-d-1}\mu, d))\dim S^{\mu}_{2^{n-d-1}\mu}(\mathrm{Ts}(\delta))$$

$$+ \sum_{j=0}^{2^{n-d-1}\mu-1} (M(j+1,d) - M(j,d)$$

$$- M_k(j+1,d) + M_k(j,d))$$

$$\times \dim S_j^{\mu}(\mathrm{Ts}(\delta)) \Big]$$

$$+ (M(0,n) - M_k(0,n))n(\Gamma_n),$$

其中 $M(i,j)$由引理 4.19 定义(将其中的 k 换成 $k+2^{n-1}\mu+1$),

而 $M_k(i,1)=i$,

$$M_k(i,2) = \binom{k-2^{n-2}\mu+2i}{2} - 2\binom{i}{2} - \binom{k-2^{n-1}\mu+i}{2},$$

$$M_k(i,d) = \binom{k+2^{n-d}\mu(2^{d-1}-d-1)+di}{d}$$

$$- d\binom{2^{n-d}\mu(2^{n-d}-d)+(d-1)i}{d}$$

$$- \binom{k-d\mu\cdot 2^{n-d}+(d-1)i}{d}$$

$$- \sum_{j=1}^{d-2}\binom{d}{j+1}\Big[M(2^{n-j-1}\mu, j)$$

$$\cdot \binom{2^{n-d}\mu(2^{n-j-1}-d+j)+(d-j-1)i}{d-j}$$

$$- \sum_{l\geq 1}(M(2^{n-j-1}\mu-l+1) - M(2^{n-j-1}\mu-l))$$

$$\cdot \binom{2^{n-d}(2^{n-j-1}-d+j)+(d-j-1)i-l}{d-j}\Big]$$

$$- \sum_{j=1}^{d-2}\binom{d}{j}\Big[M_k(2^{n-j-1}\mu, j)$$

$$\cdot \binom{2^{n-d}\mu(2^{n-j-1}-d+j)+(d-j-1)i}{d-j}$$

$$- \sum_{l\geq 1}(M_k(2^{n-j-1}\mu-l+1) - M_k(2^{n-j-1}\mu-l))$$

$$\cdot \binom{2^{n-d}(2^{d-j-1} - d + j) + (d - j - 1)i - l}{d - j}.$$

定理 4.35 的证明可参照定理 4.32 的证明，这里就不详细给出了。

与定理 4.32′类似，定理 4.35 也可改进为

定理 4.35′ 设 $\mathrm{St}(v)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的 v 星，$k \geqslant 2^{n-3}(3\mu+1)+1$，并记 $a(k,\mu,d) = M(2^{n-d-1}\mu,d) - M_k(2^{n-d-1}\mu,d)$，$b(k,j,d) = M(j+1,d) - M(j,d) - M_k(j+1,d) + M_k(j,d)$，$c(k,n) = M(0,n) - M_k(0,n)$，其中 $M(i,j)$ 和 $M_k(i,j)$ 由定理 4.35 中给出(注意 $M(i,j)$ 与 k 也依赖 k)。则有

$$\begin{aligned}
\dim S_k^\mu(\mathrm{St}(v)) &= \dim S^\mu_{2^{n-3}(3\mu+1)}(\mathrm{St}(v)) \\
&\quad + (k - 2^{n-3}(3\mu+1)) \sum_{e\in\Gamma_{1,1}} \dim S^\mu_{2^{n-2}\mu}(\mathrm{Ts}(e)) \\
&\quad + \sum_{d=2}^{n-1} \sum_{\delta\in\Gamma_{d,1}} \sum_{l=2^{n-3}(3\mu+1)+1}^{k} \Bigg[\Big(a(l,\mu,d) - a(l-1,\mu,d)\Big) \\
&\quad \times \dim S^\mu_{2^{n-d-1}\mu}(\mathrm{Ts}(e)) - \sum_{j=0}^{2^{n-d-1}\mu-1} (b(l,j+1,d) \\
&\quad - b(l-1,j+1,d)) \dim S_j^\mu(\mathrm{Ts}(\delta))\Bigg] \\
&\quad + \sum_{l=2^{n-3}(3\mu+1)+1}^{k} (c(l,n) - c(l-1,n)) n(\Gamma_n),
\end{aligned}$$

这里 $n(\Gamma_n)$ 是 $\mathrm{St}(v)$ 中 n 单纯形的个数。

定理 4.32 与定理 4.35 表明，为得到星域上样条空间的维数，只需研究次数较低的样条空间即可。然而要求出星域上次数较低样条空间的维数决非易事。这不仅是由于样条空间具有奇异性(如例 4.1 所示)，就是对非奇异样条空间而言也是很困难的。下面我们看一个具体的例子。

例 4.36 设 $\mathrm{St}(v)$ 是如图 4.8 所示的 v 星。即在一长方体上连接所有对角面所得到的剖分。为清楚起见，图 4.9 中只画出六分之一。则可得到

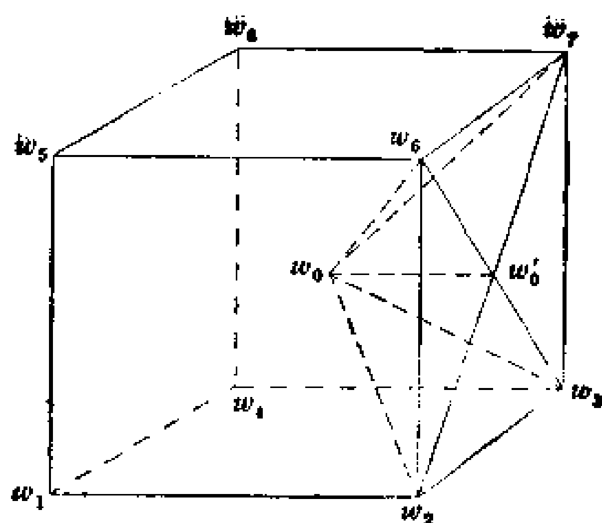


图 4.8

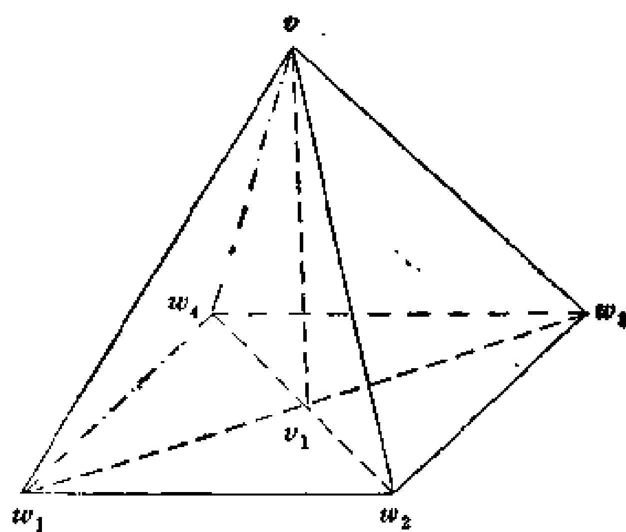


图 4.9

$$\dim S_2^1(\mathrm{St}(v)) = 16, \tag{4.37}$$

$$\dim S_3^1(\mathrm{St}(v)) = 52. \tag{4.38}$$

由光滑余因子协调法，不难得到，在如图 4.9 所示的剖分 Δ 上，

$$\dim S_2^1(\Delta) = 12.$$

此外，易证 $f \in S_2^1(\Delta)$ 由 f 的值

$$\{f(w_i), f(\frac{1}{2}(w_i + w_{i+1})), D^\lambda f(v) \mid 1 \leqslant i \leqslant 4, |\lambda| \leqslant 1\}$$

所唯一确定，这里 $D^{\lambda}f(v)=D_1^{\lambda_1}D_2^{\lambda_2}D_3^{\lambda_3}f(v)$ 是 f 在 v 点的 $|\lambda|$ 次混合偏导数值，$w_5=w_1$。

事实上，由

$$f(w_i)=f\left(\frac{1}{2}(w_i+w_{i+1})\right)=0, 1\leqslant i\leqslant 4,$$

易知

$$f|_{\pi}=0, \tag{4.39}$$

其中 π 是平面 $w_1w_2w_3w_4$。

而由 $D^{\lambda}f(v)=0, |\lambda|\leqslant 1$ 及

$$f(w_i)=f(w_{i+1})=f\left(\frac{1}{2}(w_i+w_{i+1})\right)=0,$$

易证

$$f|_{\pi_i}=0, 1\leqslant i\leqslant 4, \tag{4.40}$$

其中 $w_5=w_1, \pi_i$ 是平面 vw_iw_{i+1}。

记 $f|_{\sigma_i}=p_i, 1\leqslant i\leqslant 4, \sigma_i=[v, v_1, w_i, w_{i+1}]$。由(4.39)和(4.40)，存在常数 c_i 使得

$$p_i=c_i\pi\pi_i.$$

因 $f\in S_2^1(\Delta)$，由协调方程，存在常数 d_i，使得

$$c_{i+1}\pi\pi_{i+1}-c_i\pi\pi_i=d_il_i^2,$$

其中 l_i 是平面 vv_1w_i。

由上面的方程，不难得到 $c_{i+1}=c_i=d_i=0$，即 $f\equiv 0$。

上面的推导使得我们有如下结论。如果 $f\in S_2^0(St(v))$（$St(v)$ 如图 4.8 所示）在顶点 v 处存在一阶偏导数值，且 f 在 $St(v)$ 中每个形如图 4.9 的区域内是光滑的，则 f 由其在顶点 v 处的值 $D^{\lambda}f(v), |\lambda|\leqslant 1$ 及其在长方体的顶点及边的中点处的值所唯一决定。

由定理 4.7，如上所述的 $f\in S_2^1(St(v))$ 的充要条件是

$$2D_{v-w_i}f(w_i)=\sum_{w\in\Gamma w_i}D_{w-w_i}f(w_i), \tag{4.41}$$

$$2f(v)+D_{w_i-v}f(v)=2f(w_i)+D_{v-w_i}f(w_i), 1\leqslant i\leqslant 8,$$

其中 Γ_{w_i} 为长方体的所有与 w_i 相邻的顶点集合。即

$$5f(w_i)+\sum_{w\in\Gamma w_i}f(w)=8\sum_{w\in\Gamma w_i}f\left(\frac{1}{2}(w+w_i)\right)$$

$$-4f(v)-2D_{w_i-v}f(v),1\leqslant i\leqslant 8.$$

将上式右端记为 b_i，又记 $X=(f(w_1),\cdots,f(w_8))^T$，$B=(b_1,\cdots,b_8)^T$。则上面的方程组等价于

$$AX=B,$$

其中

$$A=\begin{bmatrix}5&1&0&1&1&0&0&0\\1&5&1&0&0&1&0&0\\0&1&5&1&0&0&1&0\\1&0&1&5&0&0&0&1\\1&0&0&0&5&1&0&1\\0&1&0&0&1&5&1&0\\0&0&1&0&0&1&5&1\\0&0&0&1&1&0&1&5\end{bmatrix}.$$

注意 A 是严格对角占优的，从而 A 是可逆的。

这就是说 $f\in S_2^1(\mathrm{St}(v))$ 可由其在顶点 v 处的值 $D^\lambda f(v)$，$|\lambda|\leqslant 1$ 及其在长方体边的中点处的值唯一确定。这就证明了(4.37)。

(4.38)的证明与(4.37)类似，但更繁琐。这里只给出提示性的证明。

仍记 Δ 为图 4.9 所示剖分，则

$$\dim S_4^1(\Delta)=28,$$

且 $f\in S_4^1(\Delta)$ 由其值 $D_{v,\sigma}^\lambda f(v)$，$|\lambda|\leqslant 2$，$\sigma\in\Delta$ 和 $f(w_i)$，$D_{w_{i+1}-w_i}f(w_i)$，$D_{w_{i-1}-w_i}f(w_i)$，$\frac{\partial}{\partial n}f\left(\frac{1}{2}(w_i+w_{i+1})\right)$，$1\leqslant i\leqslant 4$ 所唯一确定。这里 n 是四边形 $w_1w_2w_3w_4$ 的单位内法向量，而 $w_0=w_4,w_5=w_1$。

与(4.41)类似地，若 $f\in S_3^0(\mathrm{St}(w))$ 且在 $\mathrm{St}(v)$ 的所有形如

图 4.9 所示的剖分 Δ 上，$f\in S_3^1(\Delta)$，则 $f\in S_3^1(\mathrm{St}(v))$ 的充要条件是 f 在顶点 v 处(2,1)协调，且

$$\begin{cases}2D_{v-w_i}f(w_i)=\sum\limits_{w\in\Gamma_{w_i}}D_{w-w_i}f(w_i),1\leqslant i\leqslant 8,\\ \alpha_eD_{n_1}f(e_m)+\beta_eD_{n_2}f(e_m)=D_{n_3}f(e_m),e\in\Gamma,\end{cases}\tag{4.42}$$

其中 Γ 是长方体边的集合，e_m 是 e 的中点，n_1 和 n_2 分别是以 e 为一边的两个四边形的内法向量，n_3 是三角形 $[e,v]$ 的内法向量，且 $n_3=\alpha_en_1+\beta_en_2$。

另外，由直接计算，可得

$$D_{v-w_i}f(w_i)=-3f(w_i)+\frac{1}{2}(6f(v)+4D_{w_i-v}f(v)+D_{w_i-v}^2f(v)).$$

将其代入到(4.42)的第一个方程中，得

$$6f(w_i)=6f(v)+4D_{w_i-v}f(v)+D_{w_i-v}^2f(v)-\sum_{w\in\Gamma_{w_i}}D_{w-w_i}f(w_i).\tag{4.43}$$

现在证明(4.38)式. 由(4.37)，在集合

$$\{D_{v,\sigma}^\lambda f(v)\,|\,|\lambda|\leqslant 2,\sigma\in\mathrm{St}(v)\}$$

中有 16 个自由变量. 在每个长方体的顶点 w 处取定一次偏导数值 $D^\lambda f(w)$，$|\lambda|=1$，它们共有 $3\times 8=24$ 个自由变量. 由(4.43)，f 在每个顶点处的值也随之确定了. 在长方体的每个边的中点处，取定一个法向导数，由(4.42)的第二式，另一个法向导数也就确定了(因为显然 $\alpha_e,\beta_e>0$). 从而 $f\in S_3^1(\mathrm{St}(v))$ 可由上述选取的值所唯一确定. 由此推出

$$\dim S_3^1(\mathrm{St}(v))=16+24+12=52,$$

即(4.28)成立。

§4. 求维数的参数引入技巧

本节我们将引进一种技巧—参数引入法，这种技巧可以使得

我们完全脱离其基底元素而直接得到样条空间的维数．所谓引入参数，就是将单纯形剖分 Δ 中的某些元素 L（比如顶点等）看作参数．当 L 变化时，我们就得到了一族单纯形剖分 $\Delta(L)$，使得 $\Delta=\Delta(L_0)$ 对某 L_0 成立．如果引入的参数使得 $\Delta(L)$ 上样条空间的维数不依赖 L，我们就可以将求 Δ 上样条空间的维数问题，转化为求单纯形剖分族 $\Delta(L)$ 上的样条空间维数．这种技巧在很多情况下都很有益处．这种方法是施锡泉提出的．

我们知道求样条空间 $S_k^\mu(\Delta)$ 维数的一种有效方法是从研究 $S_k^0(\Delta)$ 的维数开始，因为 $S_k^0(\Delta)$ 的空间结构简单，维数也容易求到．

设 $X=\{l_i,\ 1\leqslant i\leqslant \dim S_k^0(\Delta)\}$ 是 $S_k^0(\Delta)$ 的对偶空间 $(S_k^0(\Delta))^*$ 的一组基底，则对于任意给定的数集 $Y=\{y_i, 1\leqslant i\leqslant \dim S_k^0(\Delta)\}$，都存在唯一的 $s\in S_k^0(\Delta)$，使得 $l_i(s)=y_i,\ 1\leqslant i\leqslant \dim S_k^0(\Delta)$．

为求空间 $S_k^\mu(\Delta)$ 的维数，首先要得到一个线性方程组

$$AX=0,$$

$A=(a_{i,j})_{m,\ \dim S_k^0(\Delta)}$，使得 $S_k^0(\Delta)$ 中的一元素 $s\in S_k^\mu(\Delta)$ 的充要条件是

$$\sum_{j=1}^{\dim S_k^0(\Delta)} a_{i,j}l_j(s)=0,\ 1\leqslant i\leqslant m.$$

命题 4.37 若矩阵 A 满足(4.44)，则

$$\dim S_k^\mu(\Delta)=\dim(\ker A)=\dim S_k^0(\Delta)-\operatorname{rank}(A),$$

其中 $\operatorname{rank}(A)$ 是 A 的秩，$\ker A$ 是 A 的核空间．一般来说，方程组(4.44)并不难得到，困难的是如何求矩阵 A 的秩．在某些情况下，比如在 $\mathbf{R}^2$ 中，当 $k\geqslant 4\mu+1$ 时，A 等价于一个分块对角矩阵，从而可使 $\operatorname{rank}(A)$ 的求法简化．而在另一些情况下，比如 $k\geqslant 3\mu+2$，A 等价于一个分块上三角矩阵，使得相应于对角线上的矩阵块列数≥行数且是满秩的，从而 $\operatorname{rank}(A)$ 的求法也可简化．在有些情况下，虽然 A 也可等价于一个分块上三角矩阵，但由于其对角线上的矩阵块不能保证总是满秩的，从而给简化 rank

(A)的求法带来了困难。参数引入法正是为了解决这类问题。

定义 4.38 将单纯形剖分Δ中的某些元素L看作参数，且让L在$\Omega\subset R^{n(L)}$中变动。参数$L\in\Omega$称为可取的，如果下列条件成立：

i) $\mathrm{meas}(\Omega)>0$,其中 meas 为某种测度,如 Lebesgue 测度等,本节 meas 总是指 Lebesgue 测度;

ii) 存在 $L_0\in\Omega$,使得 $\Delta=\Delta(L_0)$;

iii) 当 $L\in\Omega$ 时,

$$\dim S_k^\mu(\Delta(L))=\dim S_k^\mu(\Delta),k,\mu\geqslant 0.$$

设(4.44)中的矩阵A有如下的形式

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & * & \cdots & * \\ & A_2 & & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & A_r \end{pmatrix},$$

其中 $A_i,1\leqslant i\leqslant r$,为 $m_i\times n_i(m_i\leqslant n_i)$ 矩阵,则有

定理 4.39 设 $L\in\Omega$ 是Δ的可取参数,$\Gamma_i:=\{L\in\Omega|A_i(L)$非满秩$\}$,$1\leqslant i\leqslant r-1$. 若

$$\mathrm{meas}\Gamma_i=0,1\leqslant i\leqslant r-1,$$

且当 $L\in\Omega$ 时, $\mathrm{rank}A_r(L)=\mathrm{rank}(A_r)$, 则

$$\dim S_k^\mu(\Delta)=\dim S_k^0(\Delta)-\sum_{i=1}^{r-1}m_i-\mathrm{rank}(A_r).$$

证明 由 $\mathrm{meas}(\Gamma_i)=0,1\leqslant i\leqslant r-1$,和 $\mathrm{meas}(\Omega)>0$,可取 $L_0\in\Omega$, 使得 $A_i(L_0)(1\leqslant i\leqslant r-1)$ 是满秩的,从而

$$\mathrm{rank}(A_i(L_0))=m_i,1\leqslant i\leqslant r-1.$$

这是因为 $A_i(L_0)$ 是 $m_i\times n_i$ 矩阵,且 $m_i\leqslant n_i$. 注意 $A(L_0)$ 也是分块上三角矩阵,从而

$$\begin{aligned}\mathrm{rank}(A(L_0))&=\sum_{i=1}^{r}\mathrm{rank}(A_i(L_0))\\&=\sum_{i=1}^{r-1}m_i+\mathrm{rank}(A_r(L_0)).\end{aligned}$$

利用命题 4.37,得

$$\dim S_k^u(\Delta(L_0)) = \dim S_k^0(\Delta(L_0)) - \sum_{i=1}^{r-1} m_i - \mathrm{rank}(A_r(L_0)).$$

再注意到 L 是可取参数且 $\mathrm{rank}(A_r(L_0)) = \mathrm{rank}(A_r)$，就完成了定理 4.39 的证明。 □

前一节的定理 4.32 和定理 4.32′表明,当 $k \geqslant 5$ 时,$\mathbf{R}^3$ 中 v-星 $\mathrm{St}(v)$ 上的样条空间 $S_k^1(\mathrm{St}(v))$ 的维数可用 $\dim S_k^1(\mathrm{St}(v))$表示出来。 本节将用引入参数技巧来证明 $\dim S_4^1(\mathrm{St}(v))$ 还可由 $\dim S_3^1(\mathrm{St}(v))$ 表出。这就是下面的定理。

定理 4.40 设 Γ_i 是 $\mathrm{St}(v)$ 中的 i 单纯形集合,Γ_s 是 $\mathrm{St}(v)$ 中奇异网线的集合,Γ_b 是 $\mathrm{St}(v)$ 中边界网线的集合。又设 Γ_b' 是 Γ_b 中以 v 为一顶点的元素的集合及 $\Gamma_b'' = \Gamma_b \backslash \Gamma_b'$,则有

$$\dim S_4^1(\mathrm{St}(v)) = \dim S_3^1(\mathrm{St}(v)) + 3(n(\Gamma_0) - 1) + n(\Gamma_b) + n(\Gamma_s),$$

其中 $n(A)$ 是集合 A 中元素的个数。

在证明定理 4.40 之前,我们先给出它的两个推论。

推论 4.41 设 $\mathrm{St}(v)$, Γ_i 与 Γ_s 如定理 4.40 所定义，则当 $k \geqslant 4$ 时,有

$$\begin{aligned}\dim S_k^1(\mathrm{St}(v)) = &\dim S_3^1(\mathrm{St}(v)) + 3(k-3)(n(\Gamma_0) - 1) \\ &+ (k-3)^2 n(\Gamma_b'') + (k-3)n(\Gamma_b') + (k-3)n(\Gamma_s) \\ &+ \frac{1}{6}(k-3)(k-4)(k-5)n(\Gamma_3).\end{aligned} \tag{4.44}$$

推论 4.41 是从定理 4.32 和定理 4.40 直接得到。

推论 4.42 设Δ是 $\mathbf{R}^2$ 的任意三角剖分,N_0,N_1,N_b 和 N_s 分别是Δ的网点、网线、边界网点和奇异网点数,则

$$\dim S_4^1(\Delta) = N_1 + 3N_0 + N_b + N_s.$$

证明 我们首先将Δ嵌入到 $\mathbf{R}^3$ 中，并取 v 为Δ所在平面的外一点。连接 v 和Δ的所有网点,我们得到了 $\mathbf{R}^3$ 中的一个 v 星 $\mathrm{St}(v)$。且显然有

$$
\begin{cases}
N_0 = n(\Gamma_0) - 1, \\
N_1 = n(\Gamma_b''), \\
N_b = n(\Gamma_b'), \\
N_6 = n(\Gamma_b).
\end{cases}
\tag{4.45}
$$

在定理 4.27 中取 $k = 4, \mu = 1$，则有

$$
\dim S_4^1(\mathrm{St}(v)) = \dim S_3^1(\mathrm{St}(v)) + \dim S_4^1(\Delta). \tag{4.46}
$$

本推论不难由(4.45)、(4.46)及定理 4.40 得到。

Chou-Su-Wang[39] 和 Alfeld-Piper-Schumaker[40] 曾考虑过任意三角剖分Δ上空间 $S_4^1(\Delta)$ 的维数问题。为得到 $\dim S_4^1(\Delta)$，Alfeld-Piper-Schumaker 在[40]中不得不借助图论中有关树和森林的定理，并对Δ进行整体分析，所以证明十分冗长。并且他认为这种困难是本质的。而这里作为定理 4.40 的推论，很容易求得 $\dim S_4^1(\Delta)$。我们将看到，定理 4.40 的证明是局部的，所以这里给出的方法是较简便的。

现在我们开始证明定理 4.40，仍然先给出两个引理。

引理 4.43 $f \in S_4^1(\mathrm{St}(v))$ 被其下列值所唯一确定。

1) $\{D^\lambda_{v,\sigma} f(v)\}_{|\lambda| \leq 3}, \sigma \in \mathrm{St}(v)$ 为四面体；

2) 在顶点 $w \in \Gamma_0 \backslash v$ 处，设 $v_i, 1 \leq i \leq d(w)$ 是 $\mathrm{St}(v)$ 中除 v, w 外，按序排列的顶点，使得当 $[v,w]$ 为边界网线时，$[v, v_1]$ 和 $[v, v_{d(w)}]$ 也是边界网线。又设 e_i 是三角形 $\delta_i = [v, w, v_i]$ 关于边 $[v, w]$ 的单位法向量。则 f 的值是

$$
\{f(w), D_{e_i} f(w) \mid 1 \leq i \leq d(w)\}
$$

及

$$
\{D_{v_i - w} D_{v_{i+1} - w} f(w) \mid 1 \leq i \leq d(w) - r(w)\}
$$

其中 $v_{d(w)+1} = v_1$，而 $r(w) = 1$ 如果 $[v, w]$ 是边界网线，否则 $r(w) = 0$。此处 $D_{e_i} f$ 及 $D_{v_i - w} D_{v_{i+1} - w} f$ 仍由 (4.1) 定义，即 $D_{e_i} f = D_{e_i}(f|_{\sigma_i})$ 及 $D_{v_i - w} D_{v_{i+1}} - wf = D_{v_i - w} D_{v_{i+1} - w}(f|_{\sigma_i}), \sigma_i = [v, w, v_i, v_{i+1}]$。以后不再赘述。

3) 在网线 $e \in \Gamma_b''$ 上，f 的值是 $\{f(w_e)\}$，其中 w_e 是 e 的中点。

该引理的证明与前面引理的证明类似，这里不拟给出。

引理 4.44 设 θ_i,Θ_i 如引理 4.26 所示，即 θ_i 是 e_i 与 e_{i+1} 的夹角，$\Theta_1=0,\Theta_i=\sum_{j=1}^{i-1}\theta_j$. 又设 $f\in S_4^1(\mathrm{St}(v))$由其引理 4.43 中的值1)—3)所确定，则 $f\in S_4^1(\mathrm{St}(v))$ 的充要条件是

i) f 在顶点 v 处是(3,1)-协调的.

ii) 在其它顶点 $v\neq w\in\Gamma_0$ 处，满足条件

$$D_{e_{i+1}}f(w)=\frac{\sin(\theta_i+\theta_{i-1})}{\sin\theta_{i-1}}D_{e_i}f(w)-\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_{i-1}}D_{e_{i-1}}f(w),$$
$$1+r(w)\leqslant i\leqslant d(w)-r(w),\qquad(4.47)$$

和 $D_{v_{i+1}-w}D_{v_i-w}f(w)=(a_{i,0}D_{v-w}+a_{i,i}D_{v_i-w}+a_{i,i-1}D_{v_{i-1}-w})$

$$\cdot D_{v_i-w}f(w),\ 1+r(w)\leqslant i\leqslant d(w)-r(w),\quad(4.48)$$

其中 $a_{i,0},a_{i,i-1}$ 和 $a_{i,i}$ 是使

$$v_{i+1}-w=a_{i,0}(v-w)+a_{i,i}(v_i-w)+a_{i,i-1}(v_{i-1}-w),\qquad(4.49)$$

成立的常数.

证明 设 $\delta=[v,u,w]\in\mathrm{St}(v)$ 为内部三角形，e 为 δ 的法向量. 又设 σ_1 和 σ_2 以 δ 为一公共面，$p_i=f|_{\sigma_i}$，$i=1,2$. 因 f 在顶点 v 处(3,1)-协调，与(4.11)类似，易证

$$D_eD_{v,\delta}^{\lambda}p_2(v)=D_eD_{v,\delta}^{\lambda}p_1(v),|\lambda|\leqslant 2.\qquad(4.50)$$

又由(4.47)和(4.48)，可证在 δ 的另外两个顶点 u,w 处，

$$\begin{cases}D_eD_{u-w}^ip_2(w)=D_eD_{u-w}^ip_1(w),\\D_eD_{w-u}^ip_2(u)=D_eD_{w-u}^ip_1(u),i=0,1.\end{cases}\qquad(4.51)$$

注意 $D_ep_1|_\delta$ 和 $D_ep_2|_\delta$ 都是二元三次多项式，而(4.50)和(4.51)是使两个 δ 上的二元三次多项式恒等的充要条件. 从而证明了引理4.44 成立. □

为简单起见，我们引入如下的记号：

$$\begin{cases}x_w=f(w),\\x_{w,i}=D_{v_{i-1}-w}D_{v_i-w}f(w),\\x'_{w,i}=D_{v_i-w}^2f(w),\\x''_{w,i}=D_{v-w}D_{v_i-w}f(w),\\y_{w,i}=D_{e_i}f(w),\end{cases}\qquad(4.52)$$

易证(4.47)等价于

$$y_{w,i}=\frac{\sin\Theta_i}{\sin\theta_1}y_{w,2}-\frac{\sin(\Theta_i-\theta)}{\sin\theta_1}y_{w,1},3\leqslant i\leqslant d(w).\tag{4.53}$$

将(4.52)代入(4.48)得

$$x_{w,i+1}=a_{i,0}x''_{w,i}+a_{i,i}x'_{w,i}+a_{i,i-1}x_{w,i},$$
$$1+r(w)\leqslant i\leqslant d(w)-r(w).\tag{4.54}$$

如果 $e=[v,w]$ 是奇异网线，我们证明(4.54)等价于

$$x_{w,i+1}=a_{i,0}x''_{w,i}+a_{i,i-1}x_{w,i},1\leqslant i\leqslant 3.\tag{4.55}$$

事实上，由(5.49)，$a_{i,0}$，$a_{i,i}$ 和 $a_{i,i-1}$ 有如下表达式

$$\begin{cases}a_{i,0}=\dfrac{\det(v_{i+1}-w,v_i-w,v_{i-1}-w)}{\det(v-w,v_i-w,v_{i-1}-w)},\\ a_{i,i}=\dfrac{\det(v-w,v_{i+1}-w,v_{i-1}-w)}{\det(v-w,v_i-w,v_{i-1}-w)},\\ a_{i,i-1}=\dfrac{\det(v-w,v_i-w,v_{i+1}-w)}{\det(v-w,v_i-w,v_{i-1}-w)},\end{cases}\tag{4.56}$$

其中 $\det(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})$ 是向量 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 的混合积$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}$.

如果 $e=[v,w]$是奇异网线，易知 v,w,v_{i-1},v_{i+1} 四点共面。由(4.56)，得 $a_{i,i}=0,1\leqslant i\leqslant 4$. 这表明为证(4.54)与(4.55)当 $[v,w]$ 奇异时相互等价，只需证明当(4.55)成立时亦有

$$x_{w,1}=a_{4,0}x''_{w,4}+a_{4,3}x_{w,4}.$$

由 $x_{w,i}$，$x''_{w,i}$ 的定义及(4.55)式，我们有

$$\begin{aligned}x_{w,1}&=D_{v_4-w}D_{v_1-w}p_1(w)\\&=(a_{3,0}D_{v-w}+a_{3,2}D_{v_2-w})D_{v_1-w}p_1(w)\\&=\left(-\frac{a_{2,0}}{a_{2,1}}D_{v-w}+\frac{1}{a_{2,1}}D_{v_3-w}\right)\\&\quad\cdot(a_{3,0}D_{v-w}+a_{3,2}D_{v_2-w})p_2(w)\\&=\left(-\frac{a_{2,0}}{a_{2,1}}D_{v-w}+\frac{1}{a_{3,1}}D_{v_3-w}\right)D_{v_4-w}p_3(w)\\&=a_{4,0}x''_{w,4}+a_{4,3}x_{w,4}.\end{aligned}$$

其中 $p_i = f|_{\sigma_i}, 1 \leqslant i \leqslant 4$, $\sigma_i = [v, w, v_i, v_{i+1}] (v_5 = v_1)$。这正是我们需要的结果。

设 $\delta_i = [v, w, v_i]$ 由引理 4.43 给出及 $q_i = f|_{\delta_i}$, 则 q_i 有如下的表达式

$$
\begin{aligned}
q_i(x) = f(v)\tau_0^4 &+ (c_{1,0}\tau_w + c_{0,1}\tau_i)\tau_0^3 \\
&+ (c_{2,0}\tau_w^2 + c_{1,1}\tau_w\tau_i + c_{0,2}\tau_i^2)\tau_0^2 \\
&+ (c_{3,0}\tau_w^3 + c_{2,1}\tau_w^2\tau_i + c_{1,2}\tau_w\tau_i^2 + c_{0,3}\tau_i^3)\tau_0 \\
&+ f(w)\tau_w^4 + (4f(w) + D_{v_i-w}f(w))\tau_w^3\tau_i \\
&+ c_i\tau_w^2\tau_i^2 + (4f(v_i) + D_{w-v_i}f(v_i))\tau_w\tau_i^3 \\
&+ f(v_i)\tau_i^4,
\end{aligned}
$$

其中 (τ_0, τ_w, τ_i) 是 $x = \tau_0 v + \tau_w w + \tau_i v_i$ 关于 δ_i 的面积坐标, $c_i = c_i(f)$是常数,而 $c_{i,j} = c_{i,j}(f)$ 是由引理 4.43 1) 中的值所确定的常数。

由熟知的结果

$$
D_{v_j-v_i}\tau_k = \begin{cases} 1, 如果\ j = k, \\ -1, 如果\ i = k, \\ 0, 其它, \end{cases}
$$

其中 $(\tau_0, \cdots, \tau_n)$ 是关于单纯形 $\sigma = [v_0, \cdots, v_n]$ 的重心坐标,我们算得

$$
\begin{aligned}
D_{v_i-w}f(w) &= D_{v_i-w}q_i(w) \\
&= D_{v-w}q_i(w) + D_{v_i-v}q_i(w) \\
&= D_{v-w}f(w) + \frac{r_i}{r_w}\cos\alpha_i D_{w-v}f(w) \\
&\quad + r_i \sin\alpha_i D_{e_i}f(w) \\
&= \left(1 - \frac{r_i}{r_w}\cos\alpha_i\right)D_{v-w}f(w) + r_i y_{w,i}\sin\alpha_i \\
&= -4\left(1 - \frac{r_i}{r_w}\cos\alpha_i\right)x_w + r_i y_{w,i}\sin\alpha_i \\
&\quad + \left(1 - \frac{r_i}{r_w}\cos\alpha_i\right)c_{3,0},
\end{aligned}
$$

其中

$$\alpha_i = \angle wvv_i, r_i = \|v_i - v\|, r_w = \|w - v\|, \qquad (4.57)$$

这里$\|\cdot\|$是欧氏模.

上面推导的最后一步,我们用到了公式

$$D_{v-w}f(w) = -4f(w) + c_{3,0}.$$

下面我们再计算 $x'_{w,i}$ 及 $x''_{w,i}$,由 $x'_{w,i}$ 和 $x''_{w,i}$ 的定义及 q_i 的表达式,我们有

$$\begin{aligned} x'_{i,i} &= 2c_i - 12x_w - 6D_{v_i-w}f(w) \\ &= 2c_i + 12\left(1 - 2\frac{r_i}{r_w}\cos\alpha_i\right)x_w - 6r_iy_{w,i}\sin\alpha_i \\ &\quad - 6\left(1 - \frac{r_i}{r_w}\cos\alpha_i\right)c_{3,0}, \\ x''_{i,i} &= -3D_{v_i-w}f(w) - 3c_{3,0} + c_{2,1} \\ &= 12\left(1 - \frac{r_i}{r_w}\cos\alpha_i\right)x_w - 3r_iy_{w,i}\sin\alpha_i \\ &\quad - 3\left(2 - \frac{r_i}{r_w}\cos\alpha_i\right)c_{3,0} + c_{2,1}. \end{aligned}$$

将上式代入到(4.54)(或(4.55))中,则(4.54)(或(4.55))等价于

$$\begin{aligned} x_{w,i+1} &- a_{i,i+1}x_{w,i} - 12\beta_ix_w + 3r_i(2a_{i,i} + a_{i,0})y_{w,i}\sin\alpha_i \\ &- 2a_{i,i}c_i + \eta_ic_{3,0} - a_{i,0}c_{2,1} = 0, \\ &\qquad 1 + r(w) \leqslant i \leqslant d(w) - r(w) - r_1(w), \qquad (4.58) \end{aligned}$$

其中如果 $[v,w]$ 是奇异网线, $r_1(w) = 1$,否则 $r_1(w) = 0$. 而

$$\begin{cases} \beta_i = \left(1 - \dfrac{r_i}{r_w}\cos\alpha_i\right)a_{i,0} + \left(1 - 2\dfrac{r_i}{r_w}\cos\alpha_i\right)a_{i,i}, \\ \eta_i = 6\left(1 - \dfrac{r_i}{r_w}\cos\alpha_i\right)a_{i,i} + 3\left(2 - \dfrac{r_i}{r_w}\cos\alpha_i\right)a_{i,0}. \end{cases} \qquad (4.59)$$

下面写出(4.58)的矩阵形式,为此记

$$X_w = \begin{cases} (x_{w,2}, x_{w,3}, \cdots, x_{w,d(w)}, x_w)^T, \text{如果}[v,w]\text{是边界网线}, \\ (x_{w,1}, x_{w,2}, \cdots, x_{w,d(w)}, x_w)^T, \text{如果}[v,w]\text{是内网线}, \end{cases}$$

及 $Y_w=(y_{w,1},y_{w,2},\cdots,y_{w,d(w)})^T$. 又记

$$Z=(c_1,c_2,\cdots,c_t)^T, t=n(\Gamma''_b),$$

而

$$W=(D^{\lambda}_{v,\sigma}f(v);|\lambda|\leqslant 3,\sigma\in \mathrm{St}(v))^T$$

是 $\{D^{\lambda}_{v,\sigma}f(v)\,|\,|\lambda|\leqslant 3,\sigma\in \mathrm{St}(v)\}$ 按某种顺序排列的向量.

如果将 $X_w=X_w(f),Y_w=Y_w(f)$ 等看作是 $S^0_4(\mathrm{St}(v))^*$ 中的元素,因为多项式 q_i 中的 c_i 与 $f(w_i)$ 一一对应 (w_i 是网线 $[w,v_i]$的中点),由引理 4.43,

$$X=\{Z,W,X_w,Y_w;w\in\Gamma_0\backslash v\}$$

是 $S^0_4(\mathrm{St}(v))^*$ 的一组基底.

引入上面的记号后,(4.58)的矩阵形式是

$$A_wX_w+A'_wY_w+Y''_wZ+A'''_wW=0, \tag{4.60}$$

其中 A_w,A'_w,A''_w 和 A'''_w 分别是关于向量 X_w,Y_w,Z 和W的系数矩阵,且

$$A_w=\begin{pmatrix} -a_{2,1} & 1 & \cdots & 0 & 0 & -12\beta_2 \\ 0 & -a_{3,2} & & 0 & 0 & -12\beta_3 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & -a_{d(w)-1,d(w)-2} & 1 & -12\beta_{d(w)-1} \end{pmatrix},$$

如果 $[v,w]$ 是边界网线;如果 $[v,w]$ 是奇异的,则

$$A_w=\begin{pmatrix} -a_{1,0} & 1 & 0 & 0 & -12\beta_1 \\ 0 & -a_{2,1} & 1 & 0 & -12\beta_2 \\ 0 & 0 & -a_{3,2} & 1 & -12\beta_3 \end{pmatrix};$$

如果 $[v,w]$ 是非奇内网线,则

$$A_w=\begin{pmatrix} -a_{1,0} & 1 & \cdots & 0 & -12\beta_1 \\ 0 & -a_{2,1} & & 0 & -12\beta_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & & -a_{d(w),d(w)-1} & -12\beta_{d(w)} \end{pmatrix}.$$

同样,(4.53)的矩阵形式是

$$B_wY_w=0, \tag{4.61}$$

其中 B_w 是系数矩阵.

显然 B_w 的后 $d(w)-2$ 列构成 $d(w)-2$ 阶单位矩阵，从而

$$\operatorname{rank}(B_w)=d(w)-2. \tag{4.62}$$

此外，我们将 f 在顶点 v 处的(3,1)-协调条件记为

$$CW=0, \tag{4.63}$$

即 f 在 v 处(3.1)协调的充要条件是(4.63)成立.

由引理 4.43，引理4.44，(4.60)，(4.61)和(4.63)我们证得，若 $f\in S_4^0(\mathrm{St}(v))$ 由引理 4.43 中 1)—3)确定，并将 $w\in\Gamma_0\backslash v$ 编号为 $w_i, 1\leqslant i\leqslant n(\Gamma_0)-1:=h$，则 $f\in S_4^1(\mathrm{St}(v))$ 的充要条件是

$$AX=0, \tag{4.64}$$

其中 $X=(X_1^T,\cdots,X_h^T,Y_1^T,\cdots,Y_h^T,Z^T,W^T)^T$，而

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 & A' & 0 & \cdots & 0 & A_1'' & A_1''' \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 & 0 & A_2' & \cdots & 0 & A_2'' & A_2''' \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_h & 0 & 0 & \cdots & A_h' & A_h'' & A_h''' \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & B_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & B_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & B_h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & C \end{pmatrix}$$

中的 A_i, B_i 是(4.60)，(4.61)和(4.63)中的系数矩阵，如 $A_i=A_{w_i}$，等等.

由(4.64)，易得下面的引理:

引理 4.45 如果 $A_i, 1\leqslant i\leqslant h$ 是满秩的，则

$$\dim S_4^1(\mathrm{St}(v))=\dim(\ker A)=3(n(\Gamma_0)-1)+n(\Gamma_b)+n(\Gamma_s)+\dim S_3^1(\mathrm{St}(v)).$$

证明 由(4.62)，知 B_i 是满秩的，且 $\dim(\ker B_i)=2, 1\leqslant i\leqslant h(=n(\Gamma_0)-1)$. 又由引理假设，$A_i, 1\leqslant i\leqslant h$ 是满秩的，得 $\dim(\ker A_i)=1+r'(w_i)$，其中 $r'(w_i)=1$，如果 $[v,w_i]$ 是

边界网线或奇异网线，否则 $r'(w_t)=0$. 由于 $A_i, B_i, 1\leqslant i\leqslant h$ 都是满秩的,从而

$$
\begin{aligned}
\dim(\ker A) = n(\Gamma_b'') + \sum_{t=1}^{h}[\dim(\ker A_t) + \dim(\ker B_t)] \\
+ \dim(\ker C) = 3(n(\Gamma_0) - 1) + n(\Gamma_b) \\
+ n(\Gamma_\delta) + \dim(\ker C).
\end{aligned}
$$

又由命题 4.3,知 $\dim(\ker C) = \dim S_1^1(\mathrm{St}(v))$. 最后利用命题 4.37 即证得引理 4.45. □

由引理 4.45知，为证明定理 4.40,我们只需往证(4.60)中的 $A_t, 1\leqslant t\leqslant h$ 是满秩的.

当 $[v, w_t]$ 是边界网线或奇异网线时,去掉 A_t 的第一列和最后一列所成的矩阵都是对角元素为 1 的下三角矩阵,从而 A_t 是满秩的.

如果$[v,w_t]$是非奇内网线,且 $d(w_t)$ 是奇数. 计算由 A_t 的前 $d(w_t)$ 列元素形成的矩阵 $\overline{A}_t$ 的行列式,得

$$
\det\overline{A}_t = \det\begin{pmatrix} -a_{1,0} & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & -a_{2,1} & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & -a_{d(w_t),d(w_t)-1} \end{pmatrix}
$$

$$
= 1 - \prod_{i=1}^{d(w_t)} a_{i,i-1}.
$$

记四面体 $[v, w_t, v_i, v_{i+1}]$, $1\leqslant i\leqslant d(w_t)(v_{d(w_t)+1}=v_1)$ 的体积为 $\lambda_{t,i}$,由(4.56),得

$$
a_{i,i-1} = -\frac{\lambda_{t,i}}{\lambda_{t,i-1}}, \qquad 1\leqslant i\leqslant d(w),
$$

其中 $\lambda_{t,0}=\lambda_{t,d(w_t)}$. 从而

$$
\det\overline{A}_t = 1+1 = 2\neq 0.
$$

这表明当 $[v,w_t]$ 为奇内网线 ($d(w_t)$ 为奇数)时，A_t 也是满秩的.

现设 $[v,w_t]$ 是内网线且 $d(w_t)$ 是偶数,即 $[v,w_t]$ 是偶内

网线。在这种情况下，要直接证明 A_t 满秩是困难的。这里要用到参数引入技巧。

考查由 A_t 的后 $d(w_t)$ 列形成的矩阵 $\bar{A}_t$，其行列式为

$$\det\bar{A}_t = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & -12\beta_1 \\ -a_{2,1} & 1 & \cdots & 0 & -12\beta_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -12\beta_{d(w_t)-1} \\ 0 & 0 & \cdots & -a_{d(w_t),d(w_t)-1} & -12\beta_{d(w_t)} \end{pmatrix}$$

$$= -12\lambda_{t,d(w_t)}\sum_{i=1}^{d(w_t)}(-1)^i\frac{\beta_i}{\lambda_{t,i}} \neq 0 \tag{4.65}$$

即可。

为此引入记号

$$\begin{cases} \xi_i = v_i - v, 1 \leqslant i \leqslant d(w_t), \\ \xi_t = w_t - v, \\ r_i = \|\xi_i\|, \\ c_{i,j,k} = \dfrac{(\xi_i \times \xi_j)\cdot\xi_k}{r_i\cdot r_j\cdot r_k}, \end{cases} \tag{4.66}$$

其中 $(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}$ 是向量 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 的混合积，$\|\cdot\|$是欧氏模。

由(4.56)，我们有

$$a_{i,i-1} = -\frac{\lambda_{t,i}}{\lambda_{t,i-1}} = -\frac{c_{i,i+1,t}r_{i+1}}{c_{i-1,i,t}r_{i-1}},$$

$$a_{i,i} = \frac{c_{i-1,i+1,t}r_{i+1}}{c_{i-1,i,t}r_i},$$

$$a_{i,0} = \frac{(\xi_{i-1}\times\xi_i)\cdot\xi_t - (\xi_{i-1}\times\xi_i)\cdot\xi_{i+1} - (\xi_{i-1}\times\xi_{i+1})\cdot\xi_t + (\xi_i\times\xi_{i+1})\cdot\xi_t}{(\xi_{i-1}\times\xi_i)\cdot\xi_t}$$

$$= 1 - \frac{c_{i-1,i+1,t}r_{i+1}}{c_{i-1,i,t}r_i} - \frac{c_{i-1,i,i+1}r_{i+1}}{c_{i-1,i,t}r_t} + \frac{c_{i,i+1,t}r_{i+1}}{c_{i-1,i,t}r_{i-1}}.$$

将 $a_{i,i}$ 和 $a_{i,0}$ 代入(4.59)，得

$$\frac{\beta_i}{\lambda_{t,i}} = \frac{1}{\lambda_{t,i}}\left[\left(1 - \frac{r_i}{r_t}\cos\alpha_{t,i}\right)\left(1 - \frac{c_{i-1,i+1,t}r_{i+1}}{c_{i-1,i,t}r_i}\right.\right.$$

$$\left. - \frac{c_{i-1,i,i+1}r_{i+1}}{c_{i-1,i,t}r_t} + \frac{c_{i,i+1,t}r_{i+1}}{c_{i-1,i,t}r_{i-1}}\right)$$

$$\left. + \left(1 - 2\frac{r_i}{r_t}\cos\alpha_{t,i}\right)\frac{c_{i-1,i+1,t}r_{i+1}}{c_{i-1,i,t}r_i}\right]$$

$$= \frac{1}{\lambda_{t,i}} - \frac{1}{\lambda_{t,i-1}} - \frac{1}{c_{i-1,i,t}c_{i,i+1,t}r_t^2 r_i}$$

$$\cdot (c_{i-1,i,i+1} + c_{i-1,i+1,t}\cos\alpha_i)$$

$$- \left(\frac{1}{r_{i+1}r_t^2} + \frac{c_{i,i+1,t}}{c_{i-1,i,t}r_{i-1}r^2} - \frac{c_{i-1,i,i+1}}{c_{i-1,i,t}r_t^3}\right)\frac{\cos\alpha_i}{c_{i,i+1,t}},$$

其中 $\alpha_i = \angle w_i v v_i$.

将上式代入(4.65)中，得

$$F_t = -\frac{1}{r_t^2}\sum_{i=1}^{d(w_t)}(-1)^i$$

$$\cdot\left(\frac{c_{i-1,i,i+1} + c_{i-1,i+1,t}\cos\alpha_i - c_{i,i+1,t}\cos\alpha_{i-1} - c_{i-1,i,t}\cos\alpha_{i+1}}{c_{i-1,i,t}c_{i,i+1,t}r_i}\right.$$

$$\left. + \frac{c_{i-1,i,i+1}\cos\alpha_i}{c_{i-1,i,t}c_{i,i+1,t}r_t}\right). \tag{4.67}$$

为证明 $F_t \neq 0$，引入下面的定义是方便的.

定义4.46 设 $B(v_0)$ 是以 v_0 为球心的球面，而 $v_i, 0 \leqslant i \leqslant m$ 是 v_0-星 $\mathrm{St}(v_0)$ 的所有顶点，$1 \leqslant i \leqslant m$. 又设 w_i 是 $B(v_0)$ 与射线 $v_0 + t(v_i - v_0)$ 的交点，$1 \leqslant i \leqslant m$. 则以 $v_0, w_i, 1 \leqslant i \leqslant m$ 为顶点，由 $\mathrm{St}(v_0)$ 诱导出的单纯形剖分(即$[v_0, v_i]$是 $\mathrm{St}(v_0)$ 的内网线的充要条件是 $[v_0, w_i]$ 是新剖分的内网线)称为单位 v_0-星，记做 $\mathrm{USt}(v_0)$.

关于单位 v-星 $\mathrm{USt}(v)$，我们有如下的引理.

引理 4.47 设 v 为单纯形剖分 Δ_1 和 Δ_2 的公共顶点，$\mathrm{St}_1(v)$ 和 $\mathrm{St}_2(v)$ 分别是 Δ_1 和 Δ_2 中的 v-星，则当 $\mathrm{St}_1(v)$ 和 $\mathrm{St}_2(v)$ 有相同的单位 v-星，即 $\mathrm{USt}_1(v) = \mathrm{USt}(v)$ 时，对所有的 $k, \mu \geqslant$

0,均有

$$\dim S_k^\mu(\mathrm{St}(v)) = \dim S_k^\mu(\mathrm{St}_2(v)).$$

证明 由单位 v-星的定义,不难得到$(n-1)$单纯形 $[v,v_1,\cdots,v_{n-1}]$是 $\mathrm{St}(v)$ 的内部单纯形的充要条件是$[v,w_1,\cdots,w_{n-1}]$是 $\mathrm{USt}(v)$ 的内部单纯形. 从而 $f\in S_k^\mu(\mathrm{St}(v))$ 限制在 $\mathrm{USt}(v)$ 上属于 $S_k^\mu(\mathrm{USt}(v))$,反之亦然. 由此推出

$$\begin{aligned}\dim S_k^\mu(\mathrm{St}_1(v)) &= \dim S_k^\mu(\mathrm{USt}_1(v))\\ &= \dim S_k^\mu(\mathrm{USt}_2(v))\\ &= \dim S_k^\mu(\mathrm{St}_2(v)).\end{aligned}$$

即引理 4.47 成立. □

我们让 $\mathrm{St}(v)$中的顶点 $v_i\in\Gamma_0\backslash v$ 在由 v 和 v_i 所确定的射线,$v+t(v_i-v),t>0$ 上变动,且 $1\leqslant i\leqslant h=n(\Gamma_0)-1$, 则 $r=(r_1,\cdots,r_h)\in\mathrm{R}_+^h$ 是 $\mathrm{St}(v)$ 中的一个参数,其中

$$\mathrm{R}_+^h=\{x\in\mathrm{R}^h,x>0\}.$$

从而我们得到了一族 v-星 $\mathrm{St}(v,r)$. 由 r 的取法, 显然所有的 $\mathrm{St}(v,r)$, $r>0$ 具有相同的单位 v-星. 由引理 4.47, 知 r 是 $\mathrm{St}(v)$ 的可取参数. 由此得到下面的引理.

引理 4.48 设 $\mathrm{St}(v)$ 如定理 4.40 所定义, 如果 $\mathrm{St}(v)$ 中的每条偶内网线$[v,w_t]$,都有

$$b_t:=\sum_{i=1}^{d(w_t)}(-1)^i\frac{c_{i-1,i,i+1}\cos\alpha_i}{c_{i-1,i,t}c_{i,i+1,t}}\neq 0,$$

则定理 4.40 成立.

证明 记

$$F_t(r)=F_t,$$

其中 F_t 由(4.67)给出.

显然 $r_t^2F_t(r)$ 是 r_t^{-1} 和 r_i^{-1},$1\leqslant i\leqslant d(w)$ 的线性函数,而 b_t 恰为 r_t^{-1} 的系数,由引理的假设,知 $F_t(r)\not\equiv 0$. 从而

$$M_t:=\{r\in\mathrm{R}_+^h,F_t(r)=0\}$$

是 Lebesgue 零测集.

另外,不论 $r>0$ 如何取,显然都有

$$\dim(\ker C(r)) = \dim S_3^1(\mathrm{St}(v,r)) = \dim S_3^1(\mathrm{St}(v)),$$

即 $\mathrm{rank}(C(r))$ 与 r 无关. 利用定理 4.39 就证明了引理 4.48.

为证明引理 4.48 中的 $b_t \neq 0$,还要寻找Δ的其它可取参数. 设 $T:\mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^n$ 为非退化仿射变换,并记

$$T\Delta = \{T\sigma;\sigma\in\Delta\}. \tag{4.68}$$

下面的定理说明T是Δ的一个可取参数.

定理 4.49 设Δ是 R^n 的单纯形部分,$T\Delta$如(4.68)所定义,则对所有 $k,\mu \geqslant 0$,成立

$$\dim S_k^\mu(T\Delta) = \dim S_k^\mu(\Delta).$$

证明 设 $f\in S_k^\mu(\Delta)$,令 $F_T(f)$ 由

$$F_T(f)(w)|_{T\sigma_i} = (f|_{\sigma_i})(Tw),\sigma_i\in\Delta, \tag{4.69}$$

定义. 往证 $F_T(f)\in S_k^\mu(T\Delta)$.

事实上,设 $\delta\subset\Delta$ 是内 $(n-1)$ 单纯形, 并记 $\pi_\delta(w)=0$ 是δ所在的 $n-1$ 维超平面. 又设 σ_1 和 σ_2 是 $\mathrm{St}(\delta)$ 中的两个 n 单纯形. 因 $f\in S_k^\mu(\Delta)$,存在 $k-\mu-1$ 次多项式p,使得

$$(f|_{\sigma_1})(w)-(f|_{\sigma_2})(w) = p(w)(\pi_\delta(w))^{\mu+1}.$$

从而对非奇仿射变换T有

$$(f|_{\sigma_1})(Tw)-(f|_{\sigma_2})(Tw) = p(Tw)(\pi_\delta(Tw))^{\mu+1}.$$

显然 $\pi_\delta(Tw)=0$ 是 $T\delta$ 所在的 $n-1$ 维超平面. 由(4.69)知 $F_T(f)\in C^\mu(\sigma_1\cup\sigma_2)$. 因$\delta$是任意的, 从而有 $F_T(f)\in S_k^\mu(T\Delta)$.

若 $F_T(f)=0$,即$(f|_\sigma)(Tw)=0,\sigma\in\Delta$. 由于$T$是可逆的, 推得 $(f|_\sigma)(w)=0,\sigma\in\Delta$,即 $f\equiv 0$. 这说明 F_T 是 $S_k^\mu(\Delta)$ 到 $S_k^\mu(T\Delta)$ 中的单射. 由此得到

$$\dim S_k^\mu(\Delta) \leqslant \dim S_k^\mu(T\Delta).$$

同样可以证明 $F_{T^{-1}}$ 是 $S_k^\mu(T\Delta)$ 到 $S_k^\mu(\Delta)$ 中的单射, 所以又有

$$\dim S_k^\mu(T\Delta) \leqslant \dim S_k^\mu(\Delta).$$

这就完成了定理 4.49 的证明. □

引理 4.50 设角 α_i^T 是 α_i 在变换T下的象,T是 3 阶非奇异方阵. 如果对所有偶内线 $[v,w_i]\in\mathrm{St}(v)$, 都有

$$b_t(T):=\sum_{i=1}^{d(w_t)}(-1)^i\frac{c_{i-1,i,i+1}(T)\cos\alpha_i^T}{c_{i-1,i,t}(T)c_{i,i+1,t}(T)}\not\equiv 0,$$

则定理 4.40 成立，其中 $c_{i,j,k}(T)=(Te_i\times Te_j)\cdot Te_k$.

引理 4.50 的证明是显然的。事实上，$b_t(T)$是 T 的解析函数，且不恒等于零(视 $T\subset\mathbf{R}^9$)，从而

$$\mathrm{meas}\{T,b_t(T)=0\}=0.$$

这里 meas 是 $\mathbf{R}^9$ 中的 Lebesgue 测度。

另外，由定理 4.49 和命题 4.3 有

$$\dim(\ker C(T))=\dim S_3^1(T\mathrm{St}(v))=\dim S_3^1(\mathrm{St}(v)),$$

即 $\mathrm{rank}(C(T))$ 与 T 无关。由定理 4.39 及引理 4.48 即知引理 4.50 成立。 □

由引理 4.50，为完成定理4.40的证明，只需证明当$[v,w_t]$是偶内网线时，$b_t(T)\not\equiv 0$。

由 $\alpha_i=\angle w_tvv_i$，可得

$$\cos\alpha_i^T=\frac{T\xi_t\cdot T\xi_i}{\|T\xi_t\|\|T\xi_i\|},$$

$$c_{i,j,k}(T)=(T\xi_i\times T\xi_j)\cdot T\xi_k=c_{i,j,k}\det T.$$

将上式代入 $b_t(T)$ 的表达式，得

$$b_t(T)=\frac{1}{\|Te_t\|\det T}\sum_{i=1}^{d(w)}(-1)^i\frac{c_{i-1,i,i+1}}{c_{i-1,i,t}c_{i,i+1,t}}\frac{T\xi_t\cdot T\xi_i}{\|T\xi_i\|}.\tag{4.70}$$

因为 $[v,w_t]$ 是内网线，从而 $\mathbf{e}_1$ 和 $\mathbf{e}_2$ 是非共线向量，即 $\sin\theta_1\not\equiv 0$，这里 $\mathbf{e}_i$ 和 θ_i 如由引理 4.43 和引理 4.44 中所定义。

将 ξ_i 用 ξ_t，$\mathbf{e}_1$ 和 $\mathbf{e}_2$ 表出，得

$$\frac{\xi_i}{r_i}=\frac{\xi_t}{r_t}\cos\alpha_i+\frac{\sin\alpha_i}{\sin\theta_1}(\mathbf{e}_2\sin\Theta_i-\mathbf{e}_1\sin(\Theta_i-\theta_i)).\tag{4.71}$$

又设

$$
\begin{cases}
A = T^T T, \\
g_1 = \dfrac{\xi_t}{r_t}, \\
g_2 = e_1, \\
g_3 = e_2, \\
y_{i,j} = g_i \cdot A g_j,
\end{cases}
\tag{4.72}
$$

则有

$$
\begin{cases}
\|T\xi_i\| = \|\xi_i\| \sqrt{k_{t,i}}, \\
T\left(\dfrac{\xi_t}{r_t}\right) \cdot T\left(\dfrac{\xi_i}{r_i}\right) = y_{1,1}\cos\alpha_i + \dfrac{\sin\alpha_i}{\sin\theta_1} \\
\qquad \cdot (y_{1,3}\sin\Theta_i - y_{1,2}\sin\Theta_i - \theta_1),
\end{cases}
\tag{4.73}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
k_{t,i} = {} & y_{1,1}\cos^2\alpha_i + \frac{\sin 2\alpha_i}{\sin\theta_1}(y_{1,3}\sin\Theta_i - y_{1,2}\sin(\Theta_i - \theta_1)) \\
& + \frac{\sin^2\alpha_i}{\sin^2\theta_1}(y_{3,3}\sin^2\Theta_i - 2y_{2,3}\sin\Theta_i\sin(\Theta_i - \theta_1) \\
& + y_{2,2}\sin^2(\Theta_i - \theta_1)).
\end{aligned}
\tag{4.74}
$$

将(4.73)代入(4.70),得

$$
\begin{aligned}
b_t(T) = {} & \frac{r_t}{\|T\xi_t\| \det T} \sum_{i=1}^{d(w_t)} (-1)^i \frac{c_{i-1,i,i+1}}{c_{i-1,i,t}c_{i,i+1,t}} T\left(\frac{\xi_t}{r_t}\right) \\
& \cdot T\left(\frac{\xi_i}{r_i}\right) k_{t,i}^{-\frac{3}{2}}.
\end{aligned}
\tag{4.75}
$$

为证 $b_t(T) \neq 0$,还需下面的引理.

引理 5.51 设 $a_i \geqslant 0$,且当 $a_i = 0$ 时 $b_i > 0$, $1 \leqslant i \leqslant N$. 又设 G_1 为使 $a_i = 0$ 的下标集合,而 $G_2 = \{1, 2, \cdots, N\} \backslash G_1$.如果 $d_i = \dfrac{b_i}{a_i}, i \in G_2$ 互不相同,则

$$
f(x) = \sum_{i=1}^{N} c_i (a_i x + b_i)^{-\frac{1}{2}}
$$

在区间$(\delta,\infty)(\delta>0)$上恒等于零的充要条件是

$$\begin{cases}\sum_{i\in G_1} c_i b_i^{-\frac{1}{2}}=0,\\ c_i=0, i\in G_2.\end{cases}$$

证明 不失一般性，不妨设对所有 $i\in G_2$，在区间(δ,∞)内都有

$$(a_i x+b_i)^{-\frac{1}{2}}=(a_i x)^{-\frac{1}{2}}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}d_i^n x^{-n}\right).$$

显然 $f(x)\equiv 0, x\in(\delta,\infty)$ 的充要条件是

$$\sum_{i\in G} c_i b_i^{-\frac{1}{2}}=0,$$

$$\sum_{i\in G_2} c_i a_i^{-\frac{1}{2}}d_i^n=0, n=0,1,2,\cdots.$$

由上式不难证明引理 4.51. □

在(4.75)中，记

$x=y_{3,3}$,

$a_i=\dfrac{\sin^2\Theta_i\sin^2\alpha_i}{\sin^2\theta_1}$,

$$b_i=y_{1,1}\cos^2\alpha_i+\frac{\sin 2\alpha_i}{\sin\theta_1}(y_{1,3}\sin\Theta_i-y_{1,2}\sin(\Theta_i-\theta_1))$$

$$+\frac{\sin^2\alpha_i^2}{\sin^2\theta}(-2y_{2,3}\sin\Theta_i\sin(\Theta_i-\theta_1)+y_{2,2}\sin^2(\Theta_i-\theta_1)).$$

易知，$T\begin{pmatrix}\xi_i\\ r_i\end{pmatrix}\cdot T\begin{pmatrix}\xi_i\\ r_i\end{pmatrix}$ 及 $b_i, 1\leqslant i\leqslant d(w_t)$ 都与 $x=y_{3,3}$ 无关。注意 $0\leqslant\Theta_i<2\pi$，$1\leqslant i\leqslant d(w_t)$，从而最多存在两个下标 i，使得 $a_i=0$，即 $n(G_1)\leqslant 2$. 显然 $0<\alpha_i<\pi$，$1\leqslant i\leqslant d(w_t)$. 不妨设 $\alpha_i\neq\alpha_j$，如果 $i\neq j$（否则可取非退化仿射变换 T，使得 $\alpha_i^T\neq\alpha_j^T$）。如果 $\alpha_i\neq\alpha_j(i\neq j)$，不难证明存在 $y_{i,j}(i,j$ 不同时等于 3)使得 $d_i=\dfrac{b_i}{a_i}, i\in G_2$ 互不相同且 $T\begin{pmatrix}\xi_i\\ r_i\end{pmatrix}\cdot T\begin{pmatrix}\xi_i\\ r_i\end{pmatrix}\neq 0, 1\leqslant$

$i \leqslant d(w_t)$.

由引理 4.51，若 $b_t(T) = 0$，则

$$c_{i-1,i,i+1} = 0, i \in G_2. \tag{4.76}$$

注意 $n(G_2) \geqslant d(w_t) - 2$ (因 $d(G_1) \leqslant 2$) 及 $c_{i-1,i,i+1} = 0$ 的充要条件是 v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, v 四点共面，(4.76)表明最多存在两个 i，使得 v_{i-1}, v_i, v_{i+1} 和 v 四点不共面. 但 $[v, w_t]$ 是内网线，从而至少有三个 i，使得 v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, v 不共面. 这个矛盾说明 $b_t(T) \neq 0$. 由引理 4.50，定理 4.40 得证. □

§5. 二维有洞区域的剖分及三维 2-型剖分上的多元样条

5.1 有洞区域上样条空间的维数

对于单连通区域来说，贯穿剖分下的样条函数空间的维数已由王仁宏和 Chui 解决；然而对多连通区域，贯穿剖分下样条函数空间的维数却没有解决，它的难点在于分析洞上的协调条件，即考虑在图 4.10 上的样条空间的维数，它可以简化为图 4.11 和 4.12两种情况：一种情况是三角剖分(图 4.11)，另一种情况是一些三角形和一些四边形组成的剖分 (图 4.12). 对第一种情况，当 $k \geqslant 4\mu + 1$ 时，Alfeld-Piper-Schumaker[91]解决了这个问题，作者证明了

定理 4.52[81] 只要在图 4.12 中存在一个四边形 $ABCD$ 结构，则当 $k \geqslant 4\mu + 1$ 时，有

$$\dim S_k^\mu(\Delta_2) = \frac{1}{2} L(k - \mu + 1)(k - \mu),$$

其中 Δ_2 是图 4.12 所示的剖分，L 是 Δ_2 的内网线的个数.

证明 当剖分 Δ_2 去掉四边形 $ABCD$ 时，所成的剖分记为 $\bar{\Delta}$，显然

$$\dim S_k^\mu(\bar{\Delta}) = \frac{1}{2}(k + 2)(k + 1)$$

$$+\frac{1}{2}(L-3)(k-\mu+1)(k-\mu),$$

将四边形 $ABCD$ 组成的剖分记为 Δ',则

$$\dim S_k^\mu(\Delta')=\frac{1}{2}(k+2)(k+1)+\frac{1}{2}(k-\mu+1)(k-\mu).$$

将空间 $S_k^\mu(\bar{\Delta})$ 和 $S_k^\mu(\Delta')$ μ 次光滑连接起来，就得到空间 $S_k^\mu(\Delta_2)$,仍采用协调插值法证明定理 4.52.

I) 在剖分 $\bar{\Delta}$ 上给出

$$\frac{1}{2}(k+1)(k+2)+\frac{1}{2}(L-3)(k-\mu+1)(k-\mu)$$

两个相互独立的条件,它们能唯一决定一个空间 $S_k^\mu(\bar{\Delta})$ 中的样条函数.

II) 在网点 $ABCD$ 处,例如网点 B 处,给出插值条件

$$\{D_{B,\sigma}^\lambda f(B)\}_{|\lambda|\leqslant 2\mu},\sigma\in \mathrm{St}(B)\cap\Delta',$$

其中 σ 是三角形. 设 $e_1=(A-B)/\|A-B\|$, $e_2=(D-B)/\|D-B\|$,$e_3=(C-B)/\|C-B\|$,则上面的条件在点 B 处$(2\mu,\mu)$-协调的充要条件是

$$D_{e_{i+1}}^{\lambda_1}D_{e_i}^{\lambda_2}f(B)=\left(\frac{\sin(\theta_{i-1}+\theta_i)}{\sin\theta_{i-1}}De_i-\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_{i-1}}De_{i-1}\right)^{\lambda_1}D_{e_i}^{\lambda_2}f(B),\tag{4.77}$$

其中 $i=1,2$;$e_0=(F-B)/\|F-B\|$, θ_i 是 e_i 与 e_{i+1} 的夹角,$0\leqslant\lambda_1\leqslant\mu$.

III) 在网线 AB、DB、AD、BC 及 CD 上,例如在 AB 上,设 $w_1,w_2,\cdots,w_{k-3\mu-1}$ 是 AB 内的不同点,则给出插值条件

$$\left\{\frac{\partial^i}{\partial\tau^i}f(w_j)\right\}_{j=1}^{k-3\mu-1},$$

其中 $\max\{0,j+4\mu+1-k\}\leqslant i\leqslant\mu$.

IV) 在网面 ABD 和 BCD 内分别给出

$$\frac{1}{2}(k-3\mu-1)(k-3\mu-2)$$

个独立的条件.

不难验证，条件 II)—IV)唯一确定了样条空间 $S_k^{\mu}(\Delta')$ 中的一个函数. 这样在条件 I)中有

$$N_1 = \frac{1}{2}(k+1)(k+2) + \frac{1}{2}(L-3)(k-\mu+1)(k-\mu)$$

个自由变量.

注意(4.77)式，在条件 II)和 III)中，有些条件已由条件 I)确定了. 比如在 B 点的条件 II)，$D_{e_1}^{\lambda_1}D_{e_3}^{\lambda_2}f(B)$，$\lambda_1+\lambda_2 \leqslant 2\mu$，$\lambda_1 \leqslant \mu$ 已由条件 I)确定了. 不难验算，在条件 II) 中，有

$$\begin{aligned}
N_2 &= N_{2,A} + N_{2,B} + N_{2,C} + N_{2,D} \\
&= \frac{1}{2}\mu(\mu+1) + \mu(\mu+1) \\
&\quad + \frac{1}{2}\mu(\mu+1) + \mu(\mu+1) \\
&= 3\mu(\mu+1)
\end{aligned}$$

个独立变量. 而在 III)中，有

$$N_3 = \frac{3}{2}(\mu+1)(2k-7\mu-2)$$

个独立变量.

从而不难得到

$$\begin{aligned}
\dim S_k^{\mu}(\Delta_2) &= N_1 + N_2 + N_3 + N_4 \\
&= \frac{1}{2}(k+2)(k+1) + \frac{1}{2}(L-3)(k-\mu+1) \\
&\quad \cdot (k-\mu) + 6 \cdot \frac{1}{2}\mu(\mu+1) \\
&= \frac{3}{2}(\mu+1)(2k-7\mu-2) \\
&\quad + 2 \cdot \frac{1}{2}(k-3\mu-2)(k-3\mu-1) \\
&= \frac{1}{2}L(k-\mu+1)(k-\mu).
\end{aligned}$$

□

证明定理 4.52 的关键是用到了关于四边形 $ABCD$ 的一些插值条件，可被 Δ 内的条件线性表出.

若图 4.10 中的网线都交于一点，则所考虑的问题退化成为一点维数问题. 这是容易解决的. 当诸网线仅交于二点时(图 4.13)则有

定理 4.53 设 Δ_1 如图 4.13 所示的剖分，Δ_2 是内边界退化成一条直线段后的剖分(虚线 AB)，则

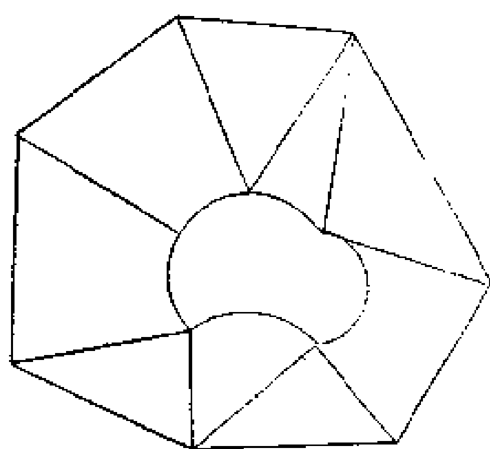


图 4.10

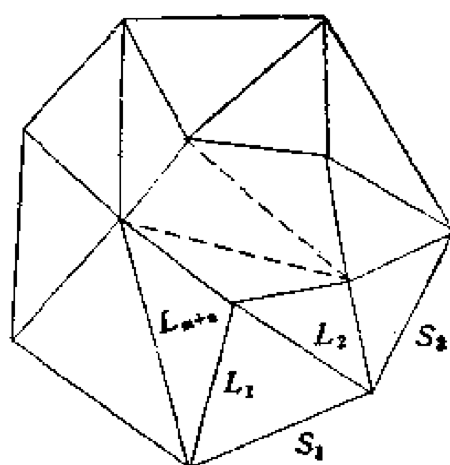


图 4.11

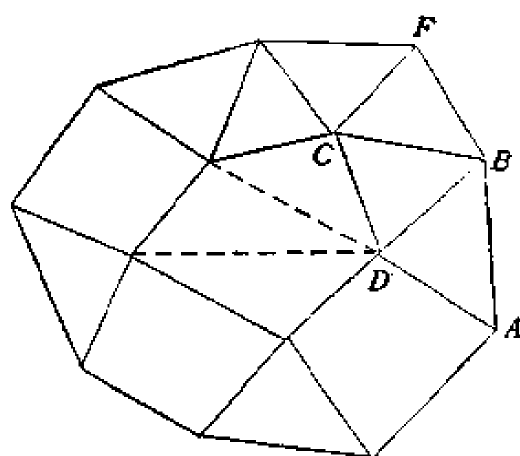


图 4.12

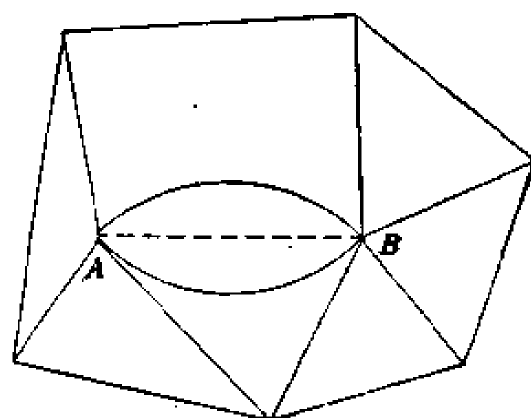


图 4.13

$$\max\left\{\dim S_k^\mu(\Delta_2);\binom{k+2}{2}\right.$$

$$+(N-n)\binom{k-\mu+1}{2};N\binom{k-\mu+1}{2}\Big\}$$

$$\leqslant \dim S_k^\mu(\Delta_1)\leqslant \dim S_k^\mu(\Delta_2)$$

$$+\begin{cases}\frac{1}{2}(k-\mu)(k-\mu-1),\text{当 } \mu+1\leqslant k\leqslant 2\mu \text{ 时},\\(\mu+1)(k-2\mu-1)+\frac{1}{2}\mu(\mu+1),\text{当 } k\geqslant 2\mu+1 \text{ 时},\end{cases}$$

其中 N 是剖分 Δ_1 的内网线根数， n 是其中斜率不同的内网线根数。

证明 不等式的左端是自然成立的，现证不等式的右端成立．设 $S\in S_k^\mu(\Delta_1)$，则 S 在 Δ_2 上除线段 AB 外，是 μ 次光滑的．即在线段 AB 处有间断．若我们在线段 AB 上加一定的条件，就能使得 S 在线段 AB 上也是 μ 次光滑的．比如当 $k\geqslant 2\mu+1$ 时，只需加上 $k-2\mu-1$ 个函数值，$(k-3\mu-1+i)$ 个 i 阶法向导数值即可，从而

$$\begin{aligned}\dim S_k^\mu(\Delta_2)&\geqslant \dim S_k^\mu(\Delta_1)-\sum_{i=0}^{\mu}(k-2\mu+i)\\&=\dim S_k^\mu(\Delta_1)-(\mu+1)(k-2\mu-1)\\&\quad-\frac{1}{2}\mu(\mu+1),\end{aligned}$$

即当 $k\geqslant 2\mu+1$ 时，

$$\begin{aligned}\dim S_k^\mu(\Delta_1)\leqslant \dim S_k^\mu(\Delta_2)+(\mu+1)(k-2\mu-1)\\+\frac{1}{2}\mu(\mu+1).\end{aligned}$$

同理可证，当 $\mu+1\leqslant k\leqslant 2\mu$ 时，有

$$\dim S_k^\mu(\Delta_1)\leqslant \dim S_k^\mu(\Delta_2)+\frac{1}{2}(k-\mu)(k-\mu-1).$$

特别地，当 $k=\mu+1$ 时，有

$$\dim S_k^\mu(\Delta_1)=\dim S_k^\mu(\Delta_2).$$ □

当图 4.12 所示的剖分的内边界网线不少于 3 条时，有

定理 4.54 设图 4.12 的内边界是 $n(n\geqslant 3)$ 边形，Δ_1 是图 4.12 所示的剖分，Δ_1 中有 N 条内网线，其中 n_1 条是斜率不同的，加虚线后的剖分记为 Δ_2，则有

$$\max\left\{\binom{k+2}{2}+(N-n_1)\binom{k-\mu+1}{2},N\binom{k-\mu+1}{2}\right\}$$
$$\leqslant \dim S_k^\mu(\Delta_1)\leqslant n(\mu+1)(k-\mu)$$
$$-\frac{1}{2}(k+1)(k+2)-\frac{1}{2}(n-3)(k-\mu+1)$$
$$\cdot(k-\mu)+\dim S_k^\mu(\Delta_2).$$

证明 左端不等式是明显的，下面证明右端不等式，记 $\Delta_3=\Delta_2\backslash\Delta_1$，则有

$$\dim S_k^\mu(\Delta_3)=\frac{1}{2}(k+1)(k+2)$$
$$+\frac{1}{2}(n-3)(k-\mu+1)(k-\mu).$$

同定理 4.53 一样，只要在内边界上加一定的限制条件，就可使空间 $S_k^\mu(\Delta_1)$ 和 $S_k^\mu(\Delta_3)$ μ 次光滑连接. 例如当 $k\geqslant 3\mu+1$ 时，在每个内边界网点上给出直到 μ 阶偏导数值，在每条边上给出 $k-2\mu-1+i$ 个 i 阶法微商值$(i=0,1,\cdots,\mu)$，则有

$$\dim S_k^\mu(\Delta_2)\geqslant \dim S_k^\mu(\Delta_1)+\dim S_k^\mu(\Delta_3)$$
$$-\frac{n}{2}(\mu+2)(\mu+1)$$
$$-\frac{n}{2}(2(k-2\mu-1)+\mu)(\mu+1)$$
$$=\dim S_k^\mu(\Delta_1)+\frac{1}{2}(k+2)(k+1)$$
$$+\frac{1}{2}(n-3)(k-\mu+1)(k-\mu)$$
$$-n(\mu+1)(k-\mu),$$

即右端不等式成立.

当 $\mu+1\leqslant k\leqslant 2\mu$ 时，仍可得到同样的结果，当 $\mu=1$ 时，定理 4.54 可加强为

定理 4.55 设 n,Δ_1 和 Δ_2 如定理 4.54 中所述，则当 $n=3$ 时，

$$\dim S_2^1(\Delta_1)=\dim S_2^1(\Delta_2).$$

当 $n>3$ 时，

$$\max\{6+N-n_1,N\}\leqslant\dim S_2^1(\Delta_1)\leqslant\dim S_2^1(\Delta_2)+(n-3),$$

而对 $k\geqslant 3$，有

$$\max\left\{\frac{1}{2}(k+2)(k+1)+\frac{1}{2}k(k-1)(N-n_1)\right.$$

$$\left.\cdot\frac{1}{2}(k-1)k\cdot N\right\}\leqslant\dim S_k^1(\Delta_1)\leqslant\dim S_k^1(\Delta_2)$$

$$+2n(k-1)-\frac{1}{2}(k+1)(k+2)$$

$$-\frac{1}{2}(n-3)k(k-1).$$

对第一种剖分(三角剖分)而言，我们有

定理 4.56 设内边界的边界 $n\geqslant 3$，外边界的边数为 m，当 $n=3$ 时，则有

$$\dim S_2^1(\Delta_1)=\dim S_2^1(\Delta_2),\tag{4.78}$$

当 $n>3$ 时，

$$m+n\leqslant\dim S_2^1(\Delta_1)\leqslant\dim S_2^1(\Delta_2)+(n-3)-\delta,\tag{4.79}$$

而当 $k\geqslant 3$ 时，

$$\dim S_k^1(\Delta_1)=\frac{1}{2}k(k-1)(m+n),\tag{4.80}$$

其中 δ 是剖分 Δ_2 的奇异网点数.

证明 由定理4.7式(4.78)立即可得. 式(4.79)的左端是明显的，又因为剖分 Δ_2 出现奇异网点只有两种情况：一种如图 4.14 所示，一种如图 4.15 所示，其中 A,B,C,D 是内边界的网点，而在这两种情况下，在 BC 边与 BD 边上加的限制是虚的(即在 BC

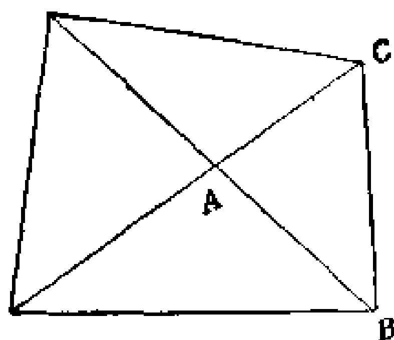


图 4.14

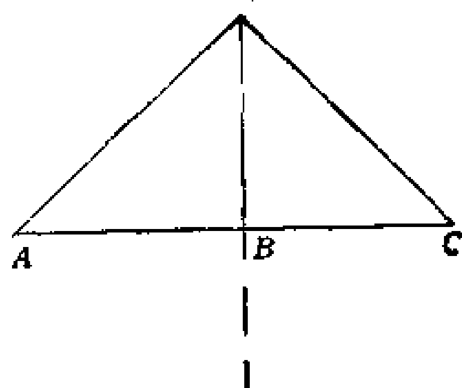


图 4.15

和 BD 上的方程是自然满足的)，从而有

$$\dim S_4^1(\Delta_2) \geqslant \dim S_3^1(\Delta_1) - (n-3) + \delta,$$

即(4.79)式右边不等式成立.

当 $k \geqslant 5$ 时，(4.80)式显然是成立的.当 $k=4$ 时，设 v 是 Δ_1 的网点，$v_1, v_2, \cdots, v_t$ 是所有与 v 相邻的网点，则给出条件

$$\{D_{v,\sigma}^{\lambda} f(v)\}_{|\lambda| \leqslant 2}, \sigma \in \mathrm{St}(v),$$

且满足关系式

$$D_{e_{i+1}}^{\lambda_1} D_{e_i}^{\lambda_2} f(v) = \left(\frac{\sin(\theta_i + \theta_{i-1})}{\sin\theta_{i-1}} D_{e_i} - \frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_{i-1}} D_{e_{i-1}}\right)^{\lambda_1} D_{e_i}^{\lambda_2} f(v),$$

其中 $0 \leqslant \lambda_1 \leqslant 1$, $2 \leqslant i \leqslant t-1$; $e_i = \dfrac{v_i - v}{\|v_i - v\|}$ $(1 \leqslant i \leqslant t)$; θ_i 是 e_i 与 e_{i+1} 的夹角，当 A, B 是相邻的网点时，还满足关系式

$$\begin{aligned} &12 f(A) + 6 D_{(B-A)} f(A) + D_{(B-A)}^2 f(A) \\ &\quad = 12 f(B) + 6 D_{(A-B)} f(B) + D_{(A-B)}^2 f(B). \end{aligned}$$

从而不难得到

$$\dim S_4^1(\Delta_1) = 3(m+n) + 3(m+n) = 6(m+n).$$

此外，易见 Δ_1 的内网线个数和三角块数都是 $m+n$，依次记做 $L_1, L_2, \cdots, L_{m+n}$; $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_{m+n}$. 设 $f \in S_3^1(\Delta_1)$, $f_i = S|\sigma_i$, f_i 的形如引理4.17中表达式的混合项系数记作 d_i，则可直接验证下面的

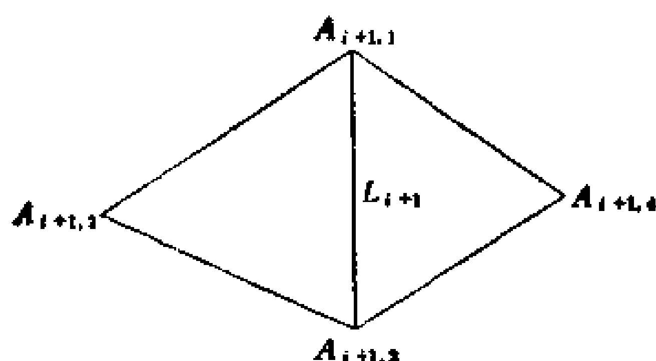


图 4.16

引理 4.57 在相邻三角形上(如图 4.16)满足关系式

$$P_i d_{i+1} + P_{i+1} d_i = 2q_{i+1,1}(3f(A_{i+1,1}) + D_{A_{i+1,2}-A_{i+1,1}}f(A_{i+1,1})) + 2q_{i+1,2}(3f(A_{i+1,2}) + D_{A_{i+1,1}-A_{i+1,2}}f(A_{i+1,2})),$$

其中 P_i 是三角形 σ_i 的面积,$q_{i+1,1} = \det(A_{i+1,4}-A_{i+1,2}, A_{i+1,3}-A_{i+1,2})$,$q_{i+1,2} = \det(A_{i+1,3} - A_{i+1,1}, A_{i+1,4} - A_{i+1,1})$.

由引理 4.57,当 $m+n$ 为奇数时,

$$\det\begin{pmatrix} P_2 & P_1 & 0 & \cdots\cdots\cdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & P_{m+n} & P_{m+n-1} \\ P_{m+n} & 0 & \cdots & 0 & P_1 \end{pmatrix} = (1+(-1)^{m+n+1})P_1P_2P_3\cdots P_{m+n} > 0,$$

故

$$\det S_3^1(\Delta_1) = 3(m+n).$$

当 $m+n$ 为偶数时,亦可用类似的方法得到上式,只不过推理过程要复杂一点,这里就不详细给出了.

5.2 三维 2-型剖分上的样条空间

在二维情况下,对一些特殊的三角剖分,例如 1-型和 2-型剖分,已有很好的研究.然而对三维情况,除前面提到的各种加细剖分等情况之外,即使对非常特殊的单纯形剖分,也还没有人作深入的研究. 这里我们将研究所谓三维 II 型剖分上的样条空间的性质.

设 $\Omega = [a,b]\otimes[c,d]\otimes[e,f]$ 是 $\mathbf{R}$ 中的长方体区域，$x - x_i = 0, y - y_j = 0, z - z_k = 0, 0 \leqslant i \leqslant m, 0 \leqslant j \leqslant n, 0 \leqslant k \leqslant l$ 将 Ω 分割成一些小长方体。这里 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b$, $c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d$, $e = z_0 < z_1 < \cdots < z_k = f$. 记 $\Omega_{i,j,k}$ 为以(x_i, y_j, z_k), (x_{i+1}, y_j, z_k), (x_i, y_{j+1}, z_k), (x_{i+1}, y_{j+1}, z_k), (x_i, y_j, z_{k+1}), (x_{i+1}, y_j, z_{k+1}), (x_i, y_{j+1}, z_{k+1}) 和$(x_{i+1}, y_{j+1}, z_{k+1})$为顶点的长方体。再将每个 $\Omega_{i,j,k}$ 都做如图 4.8 所示的加细剖分。

如此得到的单纯形剖分称做(Ω 的)三维 2-型剖分，或简称 2-型剖分。当 $x_{i+1} - x_i = x_i - x_{i-1}$, $1 \leqslant i \leqslant m-1$; $y_{i+1} - y_i = y_i - y_{i-1}$, $1 \leqslant i \leqslant n-1$; $z_{i+1} - z_i = z_i - z_{i-1}$, $1 \leqslant i \leqslant k-1$ 时，我们称该剖分为一致的 2-型剖分，否则称其为非一致的 2-型剖分。类似二维情况，我们记 Δ_2 为三维 2-型剖分。

当 $k = 0$ 或 1 时，空间 $S_k^1(\Delta_2)$ 的维数和基底是平凡的，就是 k 次多项式本身。当 $k = 2$ 时，由(4.38)，$\dim S_2^1(\Delta_2') = 16$，这里 Δ_2' 是 $r = s = t = 1$ 时的 2-型剖分。注意到 Δ_2' 中恰好有 6 个内剖分网面，这表明所有在同一个网面的三角形的光滑因子都相同。

设 $f \in S_2^1(\Delta_2')$，由定理 4.7，当 w_i 和 w_j 为同一网线的两个端点时，成立

$$2a_i + a_{i,j} = 2a_j + a_{j,i}, \tag{4.81}$$

其中 $a_m = f(w_m)$, $a_{m,n} = D_{w_n - w_m} f(w_m)$. 特别地，考虑所有和 w_1 相邻的顶点，有

$$\begin{cases} a_{2,1} = 2a_1 + a_{1,2} - 2a_2, \\ a_{4,1} = 2a_1 + a_{1,4} - 2a_4, \\ a_{5,1} = 2a_1 + a_{1,5} - 2a_5. \end{cases} \tag{4.82}$$

再分别考虑和 w_2, w_4, w_5 相邻的顶点(w_1 除外)，由(4.81)得

$$\begin{cases} a_{3,2} = 2a_2 + a_{2,3} - 2a_3, \\ a_{6,2} = 2a_2 + a_{2,6} - 2a_6, \\ a_{3,4} = 2a_4 + a_{4,3} - 2a_3, \\ a_{8,4} = 2a_4 + a_{4,8} - 2a_8, \end{cases} \tag{4.83}$$

$$
\begin{cases}
a_{6,5} = 2a_5 + a_{5,6} - 2a_6, \\
a_{8,5} = 2a_5 + a_{5,8} - 2a_8.
\end{cases}
$$

将(4.81)再用于和 w_0 相邻的顶点,同理有

$$
2a_0 + a_{0,i} = 2a_i + a_{i,0}, 1 \leqslant i \leqslant 8, \tag{4.84}
$$

及

$$
a_{0,1} + a_{0,3} = a_{0,2} + a_{0,4}. \tag{4.85}
$$

再次利用(4.81),(4.85)等价于

$$
2a_1 + a_{1,0} + 2a_3 + a_{3,0} = 2a_2 + a_{2,0} + 2a_4 + a_{4,0}.
$$

进一步简化上式,最后得

$$
a_{3,7} = a_{2,6} + a_{4,8} - a_{1,5}. \tag{4.86}
$$

同理可得

$$
\begin{cases}
a_{6,7} = a_{2,3} + a_{5,8} - a_{1,4}, \\
a_{8,7} = a_{4,3} + a_{5,6} - a_{1,2}.
\end{cases} \tag{4.87}
$$

在(4.84)中特别取 $i = 2,8$ 及 $i = 1,7$,则有

$$
\begin{aligned}
4a_0 &= 2a_2 + a_{2,0} + 2a_8 + a_{8,0}, \\
2a_7 &= 4a_0 - 2a_1 - a_{1,0} - a_{7,0}.
\end{aligned} \tag{4.88}
$$

注意 $\dim S_2^1(\Delta_2^1) = 16$,(4.82),(4.83)和(4.86)及(4.88)式表明,任给 $f \in S_2^1(\Delta_2^1)$,它都被其值

$$
\{a_1, a_{1,2}, a_{1,4}, a_{1,5}, a_2, a_{2,6}, a_{2,3}, a_4, a_{4,3}, a_{4,8}, a_5, a_{5,6}, a_{5,8}, a_3, a_6, a_8\}
$$

唯一确定.

对一般的 2-型剖分,对 $Q_{i,j,k}$ 按如下次序 $Q_{0,0,0}, Q_{1,0,0}, \cdots, Q_{m-1,0,0}, Q_{0,1,0}, \cdots, Q_{m-1,1,0}, \cdots, Q_{0,n-1,0}, \cdots, Q_{m-1,n-1,0}, Q_{0,0,1}, \cdots; Q_{m-1,n-1,k-1}$ 依次重复使用上面推导过程,即可得到

定理 4.58 $\dim S_3^1(\Delta_2) = rs + st + tr + 3(r + s + t) + 4$,且任何 $f \in S_3^1(\Delta_2)$,f 都被其值

$\{f(x_i, y_j, z_0), f(x_i, y_0, z_k), f(x_0, y_j, z_k), f(x_i, y_0, z_0), D_y f(x_i, y_0, z_0), D_z f(x_i, y_0, z_0), f(x_0, y_j, z_0), D_x f(x_0, y_j, z_0), D_z f(x_0, y_j, z_0), f(x_0, y_0, z_k), D_x f(x_0, y_0, z_k), D_y f(x_0, y_0, z_k), D^\alpha f(x_0, y_0, z_0); 1 \leqslant i \leqslant r, 1 \leqslant j \leqslant s, 1 \leqslant k \leqslant t, |\alpha| \leqslant 1\}$

唯一确定.

定理 4.58 有一个明显的推论，即空间 $S_2^1(\Delta_2)$ 中不包含具有局部支集的非平凡函数. 这是因为若 $f\in S_2^1(\Delta_2)$ 具有局部支集，则 f 的函数值及一阶偏导数值在平面 $x=x_0, y=y_0$, 及 $z=z_0$ 上都为零. 由定理 4.58，必有 $f\equiv 0$.

下面我们继续考虑空间 $S_3^1(\Delta_2)$.我们还是先考查 $S_3^1(\Delta_2')$，即 $r=s=t=1$. 设 $f\in S_3^1(\Delta_2')$,Δ_2' 由图 4.8 定义. 若 $\sigma=[w_i, w_j, w_k]$ 是 Δ_2' 中的一个三角形 $d_{i\,j,k}$ 是 f 在 σ 上的 Bézier 表达式中混合项的系数，即引理 4.54 中的 $d_{i,j,k}$. 由引理 4.54，对 $v\in\Gamma=\{w_1,\cdots,w_8\}$ 及 $w\in\Gamma_v$(Γ 中与 v 相邻的顶点集合),有

$$D_{w_0-v}f\left(\frac{v+w}{2}\right)=\frac{1}{4}dw+\frac{1}{4}(D_{w_0-v}f(v)+D_{w_0}-vf(w))$$
$$-\frac{1}{2}(D_{w-v}f(v)+3f(v)),\qquad(4.89)$$

$$D_{w-v}f\left(\frac{w_0+v}{2}\right)=\frac{1}{4}dw+\frac{1}{4}(D_{w-v}f(v)+D_{w-v}f(w_0))$$
$$-\frac{1}{2}(D_{w_0-v}f(v)+3f(v)),\qquad(4.90)$$

其中 d_w 是 $[w_0,v,w]$ 上的混合项系数.

引理 4.59 设 $f\in S_3^1(\Delta_2')$,则 f 满足如下关系式(其中 $v\in\Gamma$):

$$\sum_{w\in\Gamma_v}D_{w-v}f\left(\frac{v+w}{2}\right)-(3f(w_0)+D_{v-w_0}f(w_0))$$
$$+\frac{1}{4}\left(D_{v-w_0}f(v)+\sum_{w\in\Gamma_v}D_{v-w_0}f(w)\right)+3f(v)=0$$
$$(4.91)$$

引理 4.59 不难由

$$2D_{w_0-v}f\left(\frac{w_0+v}{2}\right)=\sum_{w\in\Gamma_v}D_{w-v}f\left(\frac{w_0+v}{2}\right)$$

及(4.89)和(4.90)式直接推出.

记(4.91)式为

$$3f(w_0)+D_{v-w_0}f(w_0)=T_v, v\in\Gamma,$$

其中

$$T_v = \sum_{w\in\Gamma_v} D_{w-v} f\left(\frac{v+w}{2}\right) + \frac{1}{4}\Big(D_{v-w_0} f(v)$$

$$+ \sum_{w\in\Gamma_v} D_{v-w_0} f(w)\Big) + 3f(v). \tag{4.92}$$

上式等价于

$$\begin{cases} T_1 + T_7 = T_2 + T_8 = T_3 + T_5 = T_4 + T_6, \\ T_1 + T_3 = T_2 + T_4, \end{cases} \tag{4.93}$$

其中 $T_i = T_{w_i}, 1 \leqslant i \leqslant 8$.

从(4.92)式不难看出，只有 T_7, T_5, T_6 和 T_8 中含有 f 在 w_7 点处的函数值或一阶偏导数值，且有

$$T_5 = \frac{3}{4} f(w_7) + \frac{1}{4} D_{w_5-w_7} f(w_7) + \frac{1}{8} D_{w_6-w_7} f(w_7)$$

$$+ \frac{1}{8} D_{w_8-w_7} f(w_7) + T_5',$$

$$T_6 = \frac{3}{4} f(w_7) + \frac{1}{8} D_{w_5-w_7} f(w_7) + \frac{1}{4} D_{w_6-w_7} f(w_7)$$

$$+ \frac{1}{8} D_{w_8-w_7} f(w_7) + T_6',$$

$$T_8 = \frac{3}{4} f(w_7) + \frac{1}{8} D_{w_5-w_7} f(w_7) + \frac{1}{8} D_{w_6-w_7} f(w_7)$$

$$+ \frac{1}{4} D_{w_8-w_7} f(w_7) + T_8',$$

$$T_7 = \frac{3}{4} f(w_7) - \frac{1}{4} \big(D_{w_5-w_7} f(w_7) + D_{w_6-w_7} f(w_7)$$

$$+ D_{w_8-w_7} f(w_7)\big) + T_7',$$

其中 T_i' 不含点 w_7 处的函数值和一阶偏导数值. 将上式代入(4.93)，得

$$AX = B,$$

其中 $X = (f(w_7), D_{w_5-w_7} f(w_7), D_{w_6-w_7} f(w_7), D_{w_8-w_7} f(w_7))^T, B =$

$(T_2+T_4-T_1-T_3', T_2-T_1+T_8'-T_7', T_3-T_1+T_5'-T_7', T_4-T_1+T_6'-T_7')^T$，及

$$A=\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & -\frac{3}{8} & -\frac{3}{8} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{8} & -\frac{3}{8} \\ 0 & -\frac{3}{8} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{8} \end{bmatrix}.$$

易得

$$\det A=-\frac{15}{2^{10}}\neq 0.$$

这表明 $f\in S_3^1(\Delta_2')$ 在 w_7 处的函数值及一阶偏导数值可由
$\mathcal{A}=\{D^\alpha f(w_i), |\alpha|\leqslant 1, 1\leqslant i\leqslant 7; D_{n_{e,1}}f(m_e), D_{n_{e,2}}f(m_e), e\in E\}$
确定，这里 E 是长方体 $[w_1,\cdots,w_8]$ 边的集合，m_e 是 e 的中点，$n_{e,1}$ 和 $n_{e,2}$ 分别是该长方体中以 e 为公共边的两个四边形在 e 上的单位内法向量。因为 $\dim S_3^1(\Delta_2')=52$，所以 $f\in S_3^1(\Delta_2')$ 由集合 $\mathcal{A}$ 中的值唯一确定。

与定理 4.58 类似地有

定理 4.60[81] $\dim S_3^1(\Delta_2)=6rst+8(rs+st+tr)+6(r+s+t)+4$，且任何 $f\in S_3^1(\Delta_2)$ 都由

$\{D^\alpha f(v), D_{n_{e,1}}f(m_e), D_{n_{e,2}}f(m_e); |\alpha|\leqslant 1, v\in V_0, e\in E_{11}\}$

唯一确定，其中 V_0 是 Δ_2 位于平面 $x=x_0$，$y=y_0$ 及 $z=z_0$ 上的顶点集合，E_2 是 Δ_2 中平行 x 轴，或平行于 y 轴，或平行于 z 轴的网线集合。

与 $S_2^1(\Delta_2)$ 不同，关于 $S_3^1(\Delta_2)$，我们有

定理 4.61[82] 当 r, s 和 t 充分大时，在空间 $S_3^1(\Delta_2)$ 中存在非平凡的局部支集函数。

证明 考查区域 $\Omega'=[x_0,x_a]\otimes[y_b,y_b]\otimes[z_c,z_c]$，其中 a，

b,c 为正整数. 若 $f\in S_3^1(\Delta_2)$ 以 Ω' 为支集,显然只需 f 在 Ω' 的边界上的顶点 v 处有 $D^\alpha f(v)=0$, $|\alpha|\leqslant 1$, 及 $D_{n_{e,1}}f(m_e)=D_{n_{e,2}}f(m_e)=0$,其中 e 是 E_2 中 Ω' 边界上的网线. 为做到这一点,最多需要

$$d=16(ab+bc+ca)+8$$

个条件. 因为

$$\begin{aligned}\dim S_3^1(\bar{\Delta}_2)-d=&6abc-8(ab+bc+ca)\\&+6(a+b+c)-4,\end{aligned}$$

这里 $\bar{\Delta}_2$ 是 Ω' 上的 2 型剖分. 当 a,b,c 适当大, 比如取 $a=b=3,c=4$ 时,有

$$\dim S_3^1(\bar{\Delta}_2)-d=8>0.$$

从而在必有 $f\in S_3^1(\bar{\Delta}_2)$ 以 Ω' 为支集.

类似地,我们还有

定理 4.62[81]:

$$\begin{aligned}\dim S_4^1(\Delta_2)=&39rst+22(rs+st+tr)\\&+9(r+s+t)+4,\\ \dim S_5^1(\Delta_2)=&120rst+44(rs+st+tr)\\&+12(r+s+t)+4,\\ \dim S_6^1(\Delta_2)=&273rst+74(rs+st+tr)\\&+15(r+s+t)+4,\end{aligned}$$

及当 $k\geqslant 7$ 时,

$$\begin{aligned}\dim S_k^1(\Delta_2)=&\sum_{v\in V}\dim S_k^1(\mathrm{St}(v))\\&+(3k+19)(29rst+6rs+6st+6tr+r+s+t)\\&+(k-5)^2(48rst+4rs+4st+4tr)\\&+4(k-5)(k-6)(k-7)rst\\&+(k-5)(10rst+4rs+4st+4tr),\end{aligned}$$

其中

$$
\dim S_3^1(\mathrm{St}(v)) = \begin{cases} 52, \text{如果 } v \text{ 是形如 } w_0 \text{ 的内网点}, \\ 32, \text{如果 } v \text{ 是形如 } w_0' \text{ 的内网点}, \\ 28, \text{如果 } v \text{ 是形如 } w_0' \text{ 的边界网点}, \\ 88, \text{如果 } v \text{ 是形如}(x_i, y_j, z_k)\text{的内网点}, \\ 34, \text{如果 } v \text{ 是 } \Omega \text{ 的顶点}, \\ 49, \text{如果 } v \text{ 是 } \Omega \text{ 棱上的网点(顶点除外)}, \\ 66, v \text{ 是其它边界网点}. \end{cases}
$$

此外，在定理 4.62 的证明中，我们还用到了

$$
\dim S_2^1(\mathrm{St}(v)) = \begin{cases} 22, \text{如果 } v \text{ 是形如}(x_i, y_j, z_k)\text{的内网点}, \\ 13, \text{如果 } v \text{ 是区域 } \Omega \text{ 的顶点}, \\ 16, \text{如果 } v \text{ 是区域 } \Omega \text{ 棱上的网点}, \\ 19, v \text{是形如}(x_i, y_j, z_k)\text{的其它边界网点}. \end{cases}
$$

第五章　有理样条函数

在有限元计算及计算机辅助设计中引入加细剖分的技巧是有效的。然而引入加细剖分，会给计算带来某些不便。本章我们将讨论有理样条函数，特别是具有局部支集的二元有理样条函数的理论和方法。我们将看到它们以非线性为代价避免了比较复杂的加细剖分及其上的插值样条函数的计算。

先从简单的二元 C^0 逼近元谈起：

(i) 三角形元。设 Ω 为平面上的多边形区域，Δ是 Ω 上的三角剖分。 $u(x, y)$ 是由所有顶点处的函数值所唯一决定的分片线性函数。对如图 5.1 所示的 $T \in \Delta$，有

$$u(x,y) = \sum_{i=1}^{3} u(x_i, y_i) w_i(x,y), \tag{5.1}$$

其中 $w_i(x,y) = l_i(x,y)/l_i(x_i,y_i)$，$i = 1, 2, 3$，$l_i(x,y) = 0$ 为顶点 v_i 的对边 $e_i = v_{i+1}v_{i-1}(v_{i+3} = v_i)$ 的方程。称函数 $w_i(x,y)$ 为相应于顶点 v_i 的楔函数 (Wedge function)。显然，就三角剖分而言，楔函数与面积坐标是等同的。在剖分Δ中，所有以 v_i 为

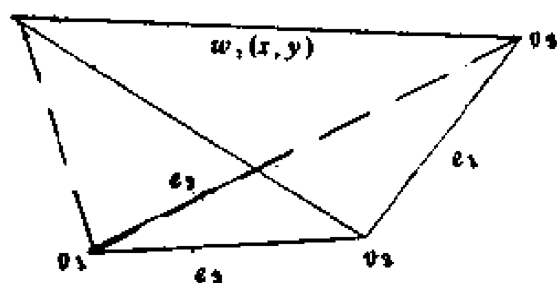


图 5.1

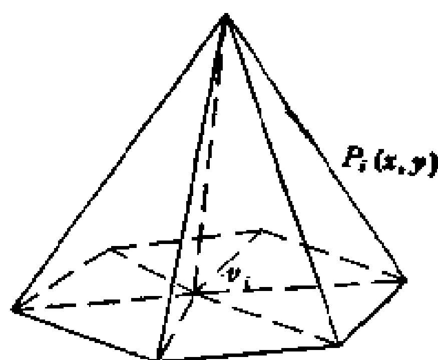


图 5.2

顶点的三角形上相应于 v_i 的楔函数构成关于 v_i 的"棱锥"函数 (Pyramid function)，记为 $p_i(x, y)$（见图 5.2）．显然 $p_i(x,y)$ 是分片线性的连续函数，且其在 v_i 的对边上恒为零．因此，在整个剖分上的 C^0 分片线性函数可表为

$$u(x,y)=\sum_i u_i p_i(x,y),\quad u_i=u(x_i,y_i). \tag{5.2}$$

(ii) 矩形元．设 Ω 为平面上由一些矩形组成的平面区域．每个矩形域上的楔函数是由双线性形式组成的．图 5.3 所示的各顶点处的楔函数分别是

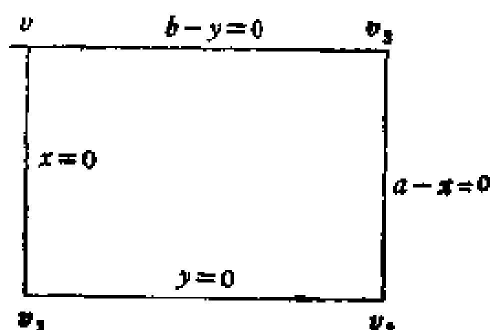


图 5.3

$$\begin{aligned} w_1(x,y)&=\frac{(a-x)(b-y)}{ab}, & w_2(x,y)&=\frac{y(a-x)}{ab},\\ w_3(x,y)&=\frac{xy}{ab}, & w_4(x,y)&=\frac{x(b-y)}{ab}. \end{aligned} \tag{5.3}$$

注意到(5.3)式中的楔函数在矩形的每一边上是线性的．因此

$$u(x,y)=\sum_{i=1}^{4} u_i w_i(x,y),\quad u_i=u(x_i,y_i) \tag{5.4}$$

在单元的边界上也是线性的．类似于三角形元，对于 Ω 中的每个剖分顶点也存在着"棱锥"函数．这些函数构成 C^0 分片线性函数空间的一组基函数．对于平行四边形单元的讨论是明显类似的．

(5.1)和(5.4)中的楔函数有如下性质：

1° $w_i(v_i)=1,\ w_i(v_j)=0,\ i\neq j$；

2° $w_i(x,y)=0$，(x, y) 在 v_i 的对边上；

3° $w_i(x,y)$ 为线性函数，(x,y) 在 v_i 的邻边上。

所以只要对任意的单元构造满足性质 $1^\circ, 2^\circ, 3^\circ$ 的楔函数，便可按(5.4)构造C^0 有限元函数．换句话说，只要能构造满足性质 $1^\circ, 2^\circ, 3^\circ$ 的楔函数，便可构造具有局部支集的 C^0 样条函数类．

E. L. Wachspress[93],[94],[95]借助于楔函数方法，讨论并建立了关于任意单元上 C^0 有理样条函数类的理论． 罗钟铉[92]引入了广义楔函数，并建立了 $C^\mu(\mu \geq 1)$ 有理样条函数类的相应理论．本章将介绍有理样条函数的这些理论与方法．不难看出，它们与加细剖分的出发点是明显不同的．

§1. 任意凸多边形上的 C^0 有理函数

设 $\Omega \subset R^2$ 是平面上的多边形区域，Δ_P 为Ω的任意多边形剖分，$v_i(i=1,2,\cdots,N_v)$ 和 $e_j(j=1,2,\cdots,N_E)$ 分别表示 Δ_P 的顶点和网线．引入记号：

$l_j(x,y)=0$ 表示 e_j 的法式方程；

∂P 指凸多边形 P 的边界；

$\mathring{P}$ 指凸多边形 P 的内部；

$\bar{P}=\partial P \cup \mathring{P}$.

所有由一(凸)多边形的边界或由它的延长线组成的(凸)多边形的边界称为该(凸)多边形的外直径．以下约定三角形和平行四边形的外直径的线性形式为 $l_k(x,y)=1$．实际上，平行四边形的外直径是无穷远直线． 除此之外，四边形的外直径有如图 5.4 所示的两种可能：$v_i(i=1,2,3,4)$ 为四边形的顶点，$l_i(x,y)=0$ 为 e_i 的法式方程，e_5 为四边形的外直径．

以下讨论凸多边形上的楔函数及其性质．

引理 5.1 任何凸多边形的外直径均在该凸多边形的外部．

引理 5.2 假设三条直线 $e_i, i=1,2,3$ 共点，则 $l_1(x,y)/l_2(x,y)$ 在 e_3 上为常数，$l_2(x,y)/l_3(x,y)$ 在 e_1 上为常数，$l_3(x,y)/l_1(x,y)$ 在 e_2 上为常数.

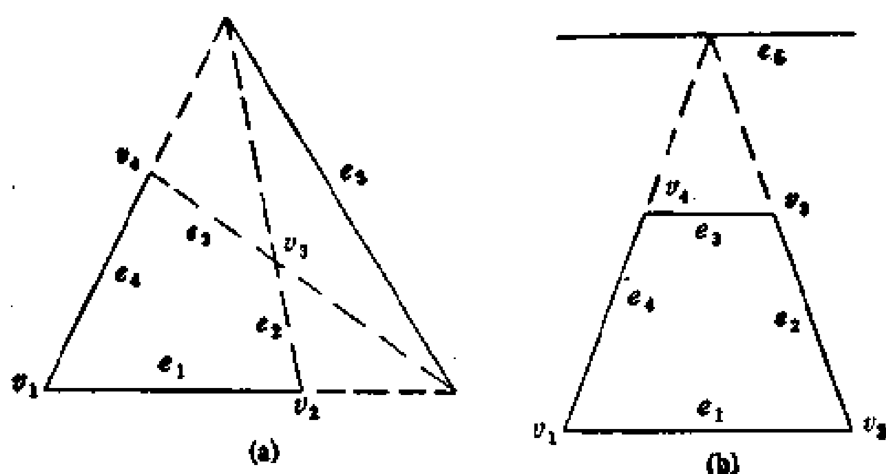


图 5.4

证明 不妨设 $e_i, i=1, 2, 3$ 的位置如图 5.5 所示. 显然对任意的 e_2 上的点 (x,y), 恒有

$$|l_1(x,y)|\sin\theta_2 = |l_3(x,y)|\cdot\sin\theta_1,$$

亦即

$$\frac{|l_3(x,y)|}{|l_1(x,y)|} = \frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1}.$$

因为当 (x,y) 沿 e_2 通过 o 点时, $l_1(x,y)$ 和 $l_3(x,y)$ 同时变号, 所以 $\operatorname{sign}\left(\frac{l_3(x,y)}{l_1(x,y)}\right)$ 保持不变. 其余结果可同样证明. □

设 $P\in\Delta_p$ 是一凸 n 边形, 以下给出凸 n 边形上的楔函数的构造方法.

(1) 当 $n=3$ 时,其已由(5.1)式中给出.

(2) 当 $n=4$ 时,记 $P=v_1v_2v_3v_4$ (见图 5.4(a), (b)). 楔函数为

$$w_1(x,y) = \frac{l_5(v_1)}{l_2(v_1)l_3(v_1)}\cdot\frac{l_2\cdot l_3}{l_5},$$

$$w_2(x,y) = \frac{l_5(v_2)}{l_2(v_2)l_4(v_2)}\cdot\frac{l_3\cdot l_4}{l_5},$$

$$w_3(x,y) = \frac{l_5(v_3)}{l_1(v_3)l_4(v_3)}\cdot\frac{l_1\cdot l_4}{l_5},$$

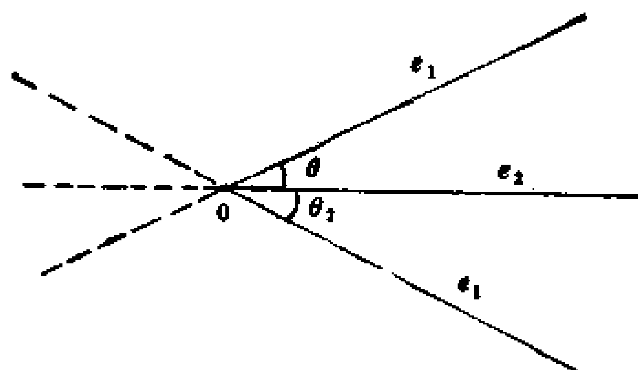


图 5.5

$$w_4(x,y)=\frac{l_5(v_4)}{l_1(v_4)l_2(v_4)}\cdot\frac{l_1\cdot l_2}{l_5}.\tag{5.5}$$

借助于引理 5.2，不难验证楔函数(5.5)满足性质 1°，2°，3°。而且可以通过适当选取 $l_i(x,y)$，$i=1,2,3,4,5$ 的符号，使得每一楔函数在 P 的内部均有 $w_i(x,y)>0$，$(x,y)\in\mathring{P}$。进一步可断言楔函数(5.5)满足

$$\sum_{i=1}^{4}w_i(x,y)\equiv 1.\tag{5.6}$$

事实上，因为

$$\begin{aligned}g(x,y)&=\sum_{i=1}^{4}w_i(x,y)-1\\&=\frac{k_1l_3l_4+k_2l_1l_4+k_3l_1l_2+k_4l_2l_3-l_5}{l_5(x,y)}.\end{aligned}$$

由楔函数 $w_i(x,y)(i=1,2,3,4)$ 的性质，可知 $g(x,y)$ 在 ∂P 上为零，从而 $g(x,y)\equiv 0$，$(x,y)\in\overline{P}$。

(3) 当 $n=5$ 时，记 $P=v_1v_2v_3v_4v_5$（如图 5.6）其上的楔函数为

$$w_1'(x,y)=\left(\frac{l_8\cdot l_{10}}{l_2l_3l_4}\right)_{v_1}\cdot\frac{l_2l_3l_4}{l_8l_{10}},$$

$$w_2'(x,y)=\left(\frac{l_6\cdot l_9}{l_3l_4l_5}\right)_{v_2}\cdot\frac{l_3l_4l_5}{l_6l_9},$$

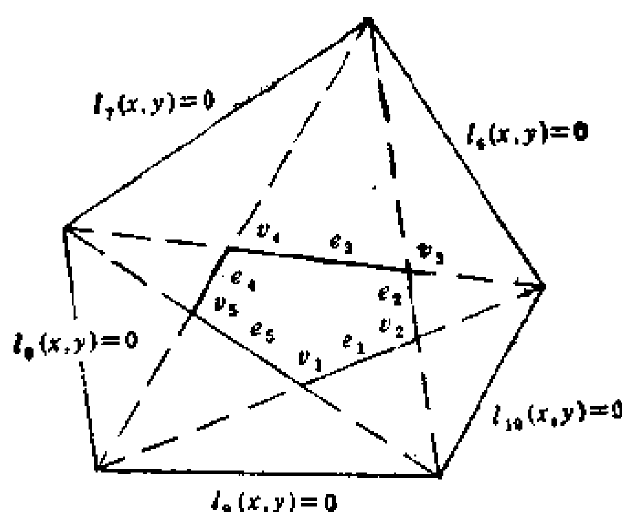


图 5.6

$$w_3'(x,y)=\left(\frac{l_7\cdot l_{10}}{l_4l_5l_1}\right)_{v_3}\cdot\frac{l_4l_5l_1}{l_7\cdot l_{10}},$$

$$w_4'(x,y)=\left(\frac{l_6\cdot l_8}{l_1l_2l_5}\right)_{v_4}\cdot\frac{l_1l_2l_5}{l_6l_8},$$

$$w_5'(x,y)=\left(\frac{l_7\cdot l_9}{l_2l_3l_1}\right)_{v_5}\cdot\frac{l_2l_3l_1}{l_7\cdot l_9};$$

$$w_i(x,y)=\frac{w_i'(x,y)}{\sum_{i=1}^{5}w_i'(x,y)},\ i=1,2,3,4,5. \quad (5.7)$$

由引理 5.1，容易证明以上诸 $w_i'(x,y)(i=1,2,\cdots,5)$ 满足性质 1°，2°，3°，且只须适当选择 $l_i(x,y)$ 的符号，即可保证当 $(x,y)\in\mathring{P}$ 时，$w_i(x,y)>0$。(5.7) 中的表达式是楔函数组 $\{w_i'(x,y)\}_{i=1}^{5}$ 的单位化，使得单位分解性质成立：

$$\sum_{i=1}^{5}w_i(x,y)=1.$$

(4) 当 $P\in\Delta_P$ 为任意凸 n 边形时。 每一楔函数具有如下形式：相应于顶点 v_i 的楔函数是

$$w_i'(x,y)=k_i\frac{l_1\cdot l_2\cdot\cdots\cdot l_{i-1}\cdot l_{i+2}\cdot\cdots\cdot l_n}{l_i\cdot l_{i+1}\cdot\cdots\cdot l_t\cdots},\quad (5.8)$$

其中分母 $l_i \cdot l_{i+1} \cdot \cdots \cdot l_t \cdot \cdots$ 是某 $n-3$ 个凸 n 边形的外直径的线性形式的乘积，分子是由 $n-2$ 个相对边的线性形式的乘积，而 k_i 是使 $w_i'(x,y)$ 在 v_i 处单位化的常数。由引理 5.1 和引理5.2，在顶点 v_i 处，不难选取凸 n 边形的 $n-3$ 个外直径的线性形式 $l_i,\cdots,l_t,\cdots$，使得 $w_i'(x,y)$ 在 v_i 的邻边 $e_{i-1}:l_{i-1}(x,y)=0$ 和 $e_{i+1}:l_{i+1}(x,y)=0$ 上为线性函数，且满足前面提到的楔函数的性质 1°，2°，3°，类似于 $n=5$ 的情形，可以适当选取(5.8)中的各线性因子的符号，使得 $w_i'(x,y)>0$，$(x,y)\in \mathring{P}$。当 $n\geqslant 5$ 时，楔函数组 $\{w_i'(x,y)\}$ 一般不再满足单位分解性质。但仍可作如下的单位化处理：

$$w_i(x,y)=w_i'(x,y)\Big/\sum_{i=1}^{n} w_i'(x,y),\quad i=1,2,\cdots,n,$$

并转而采用函数组 $\{w_i(x,y)\}_{i=1}^{n}$。

命题 5.3 如果一凸 n 边形的一个内角趋于 180°，则相应于它的楔函数组将退化为相应的 $n-1$ 边形的楔函数组.

以下介绍在插值问题中的楔函数配置方法。前面讨论了在任意多边形单元上的楔函数的构造方法. 考虑插值问题：对于分布在任意多边形区域 Ω 的多边形剖分 Δ_p 中网线上的点 z_i，$i=1,2,\cdots,m$ 以及 z_j 上的函数值 u_j，构造一个在 Δ_p 上连续的有理插值函数 $u(x,y)$，使得

$$u(z_j)=u_j,\quad j=1,2,\cdots,m. \tag{5.9}$$

这里采用楔函数方法来构造线性元关组 $\{h_i(x,y)\}_{i=1}^{m}$，使得唯一存在一组数 $\{a_i\}_{i=1}^{m}$，满足

$$u(z_j)=\sum_{i=1}^{m} a_ih_i(z_j),\ j=1,2,\cdots,m. \tag{5.10}$$

注意到前面介绍的楔函数 $w_i(x,y)$ 和 $w_{i+1}(x,y)$ 在边 $e_i=v_iv_{i+1}$ 上为线性函数且 $w_i(x,y)+w_{i+1}(x,y)=1$。因此在 e_i 上存在由 $w_i(x,y)$ 和 $w_{i+1}(x,y)$ 生成的线性无关组。选取一组如此的线性无关函数组

$$\{w_i,w_{i+1},w_iw_{i+1},w_iw_{i+1}(w_i-w_{i+1}),w_iw_{i+1}(2w_{i+1}$$

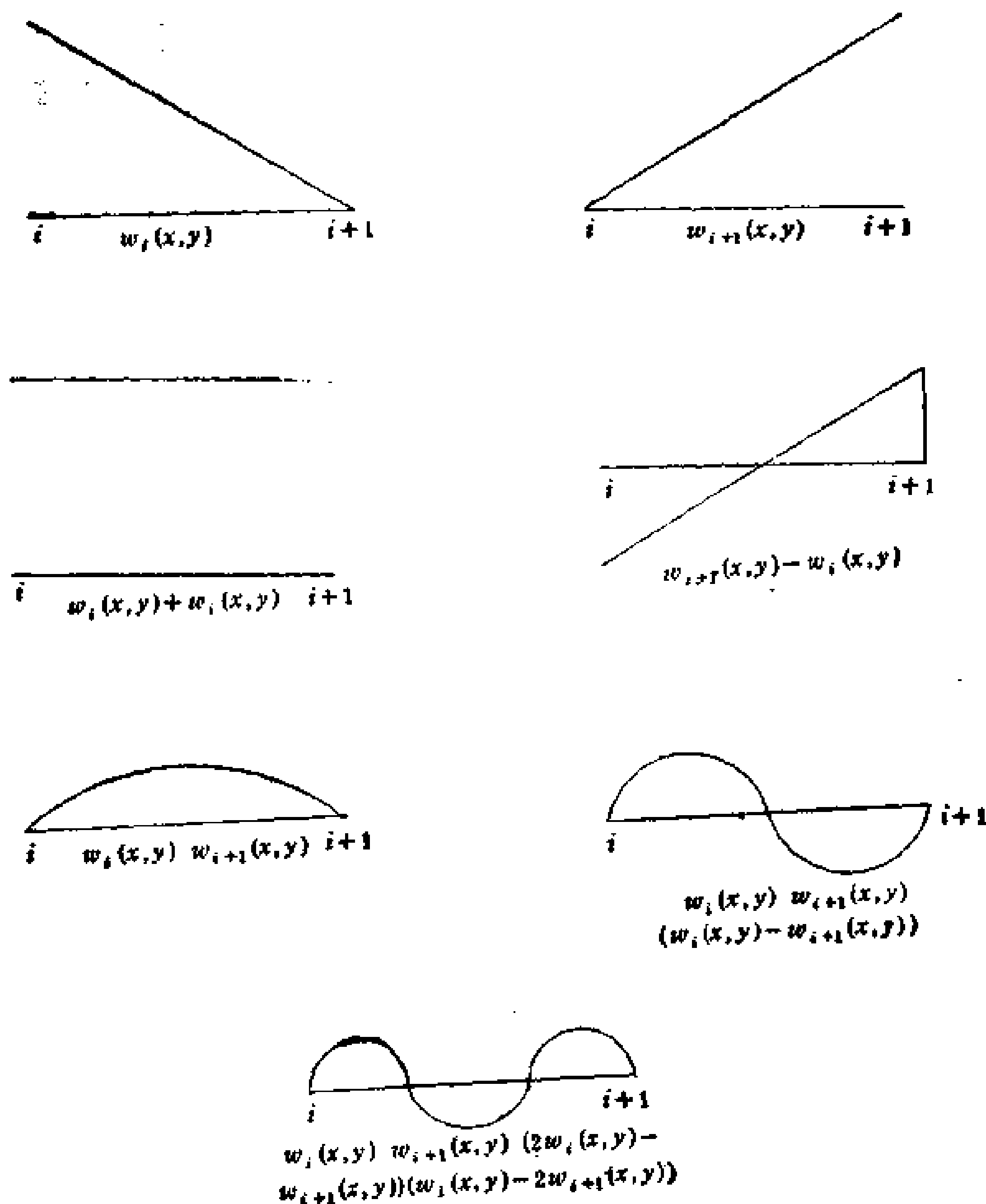


图 5.7

$$-w_i)(2w_i-w_{i+1}),\cdots\}.$$

它们的特性由下列图示给出：在 e_i 上，

下面列出插值问题(5.9)和(5.10)中常用的几种简单的基函数组：

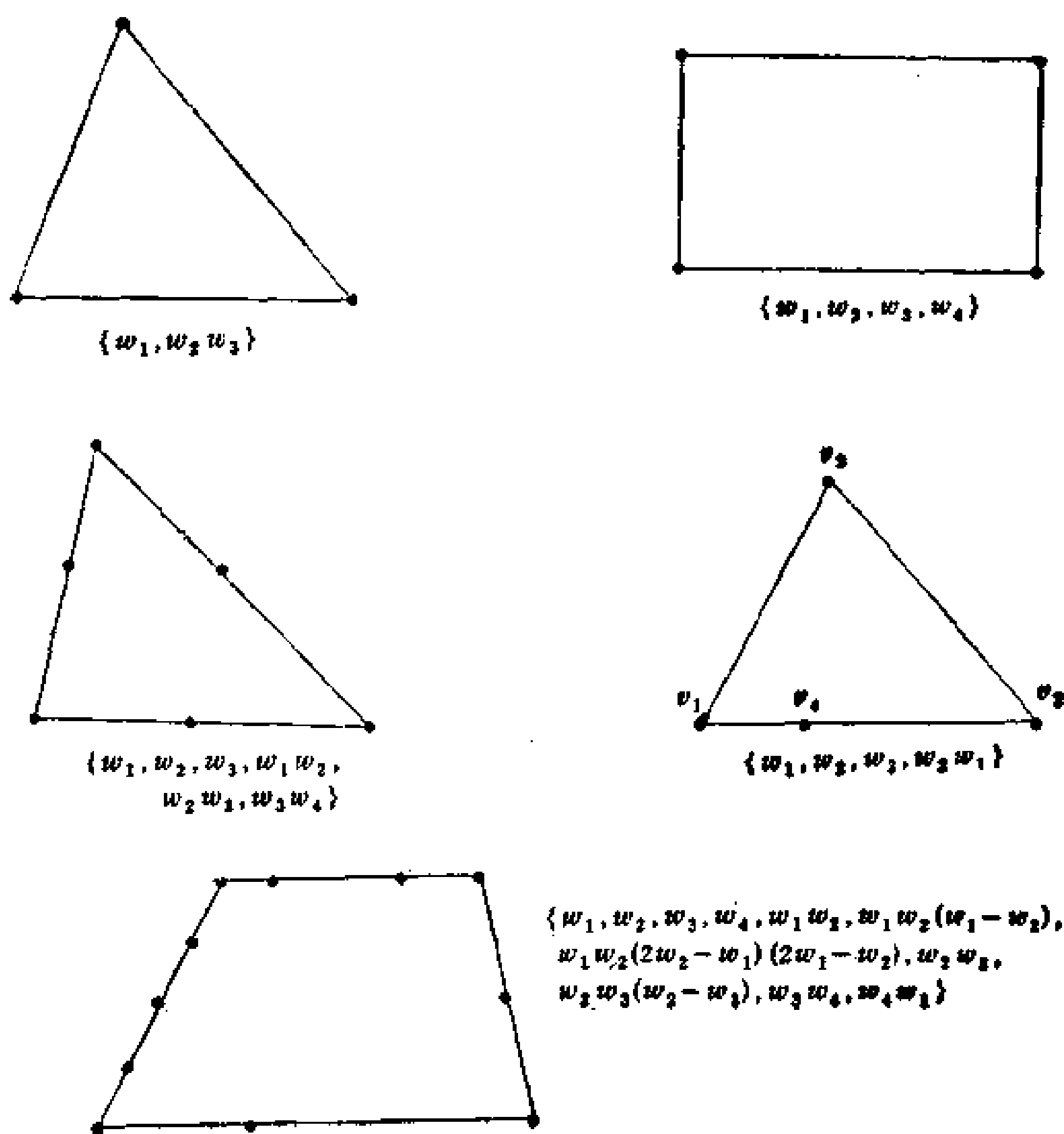


图 5.8

借助于如此的基函数组，就不难构造出满足插值条件(5.9)的插值函数了。

例 1 假定三角形 $P = v_1 v_2 v_3$ 边界上的插值信息如图 5.9 所示。

设 $u(x,y) = \sum_{i=1}^{3} (c_i w_i(x, y) + d_i w_i(x, y) w_{i+1}(x, y))$ （这里 $w_{i+3}(x,y) = w_i(x,y)$），则由插值条件，有

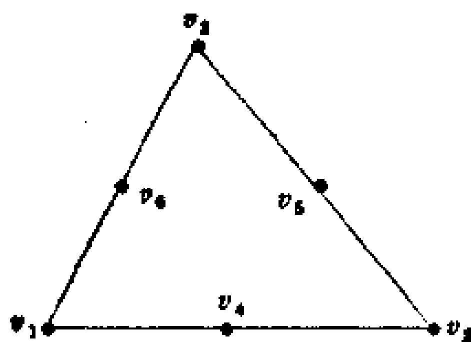


图 5.9

$$
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
w_1(4) & w_2(4) & 0 & w_1(4)w_2(4) & 0 & 0 \\
0 & w_2(5) & w_3(5) & 0 & w_2(5)w_3(5) & 0 \\
w_1(6) & 0 & w_3(6) & 0 & 0 & w_1(6)w_3(6)
\end{bmatrix}
\cdot
\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix}.
$$

解之得

$$c_1 = u_1,\ c_2 = u_2,\ c_3 = u_3,$$

$$d_1 = (u_4 - w_1(4)u_1 - w_4(4)u_2)/w_1(4)w_2(4),$$

$$d_2 = (u_5 - w_2(5)u_2 - w_3(5)u_3)/w_3(5)w_2(5),$$

$$d_3 = (u_6 - w_1(6)u_1 - w_3(6)u_3)/w_1(6)w_3(6).$$

由此得到

$$u(x,y) = w_1(x,y)\left(1 - \frac{w_3(x,y)}{w_3(6)} - \frac{w_2(x,y)}{w_2(4)}\right)u_1$$

$$+ w_2(x,y)\left(1 - \frac{w_1(x,y)}{w_1(4)} - \frac{w_3(x,y)}{w_3(5)}\right)u_2$$

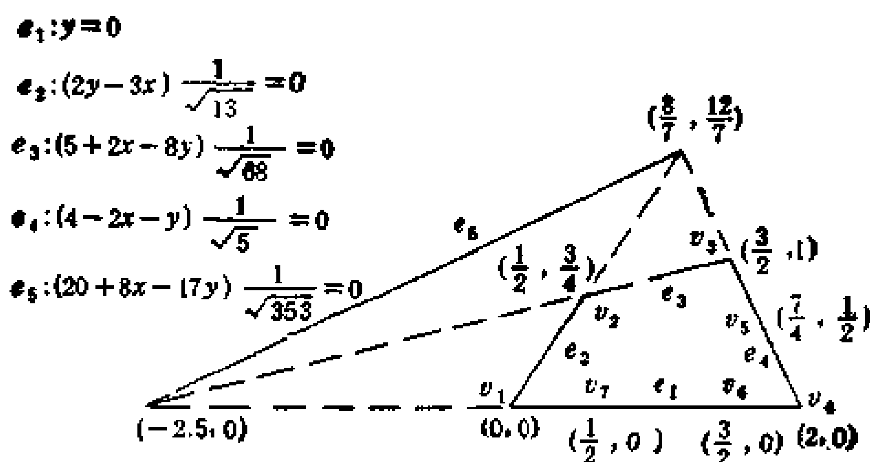


图 5.10

$$
+ w_3(x,y)\left(1 - \frac{w_1(x,y)}{w_1(6)} - \frac{w_2(x,y)}{w_2(5)}\right) u_3
$$

$$
+ \frac{w_1(x,y) \cdot w_2(x,y)}{w_1(4)w_2(4)} \cdot u_4 + \frac{w_2(x,y)w_3(x,y)}{w_2(5)w_3(5)} u_5
$$

$$
+ \frac{w_1(x,y)w_3(x,y)}{w_1(6)w_3(6)} u_6.
$$

例 2 设四边形单元 $P \in \Delta_P$ 的边界上的插值信息如图 5.10 所示.

设

$$
u(x,y) = \sum_{i=1}^{7} c_i h_i(x,y),
$$

其中

$$
\{h_i(x,y)\} = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_3 w_4, w_4 w_1, w_4 w_1 (w_4 - w_1)\},
$$

而

$$
w_1(x,y) = (5 + 2x - 8y)(4 - 2x - y)/(20 + 8x - 17y),
$$

$$
w_2(x,y) = 20y(4 - 2x - y)/(3(20 + 8x - 17y)),
$$

$$
w_3(x,y) = 6y(3x - 2y)/(20 + 8x - 17y)),
$$

$$
w_4(x,y) = 2(3x - 2y)(5 + 2x - 8y)/(3(20 + 8x - 17y)).
$$

由插值条件,得到下面的方程组

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{3}{16} & \frac{3}{32} \\ \frac{3}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{16} & \frac{3}{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \\ c_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \end{pmatrix}.$$

解之得

$$c_i = u_i, i = 1,2,3,4, \quad c_5 = 4u_5 - 2u_3 - 2u_4,$$

$$c_6 = \frac{8}{3}((u_6 + u_7) - (u_1 + u_4)),$$

$$c_7 = \frac{16}{3}((u_6 - u_7) + (u_1 - u_4)).$$

于是

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \sum_{i=1}^{7} c_i h_i(x,y) \\ &= w_1 \cdot \left\{1 - \frac{8}{3} w_4 (1 - 2(w_4 - w_1))\right\} u_1 \\ &\quad + w_2 \cdot u_2 + w_3 \cdot (1 - 2w_4) \cdot u_3 \\ &\quad + w_4 \cdot \left\{1 - 2w_3 - \frac{8}{3} w_1 \cdot (1 + 2(w_4 - w_1))\right\} u_4 \\ &\quad + 4w_3 \cdot w_4 \cdot u_5 + \frac{8}{3} w_1 \cdot w_4 \cdot (1 + 2(w_4 - w_1)) \\ &\qquad \cdot u_6 + \frac{3}{8} w_1 \cdot w_6 \cdot (1 - 2(w_4 - w_1)) \cdot u_7, \end{aligned}$$

这里约定 $w_i := w_i(x,y)$.

由于所选取的基函数的个数及最高次数均是根据网线上的插

值节点数目而相应确定的。例如在某一网线上的插值节点数是 $k+1$，则相应基函数的最高次数（在该网线上）为 k。因此，不难证明，对如图 5.11 的多边形剖分和插值信息，按照上面楔函数配置所构造的插值函数 $u(x,y)$ 在整个区域 Ω 上是连续的。

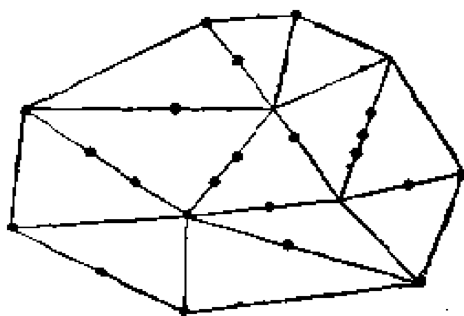


图 5.11

除多边形剖分情形外，在某些应用问题中还需要讨论曲边元情形。E. L. Wachspress 在其文[95]，[96]中已有详尽的讨论，此处从略。

§2. 三角剖分上的 C^1 插值有理样条函数

仍设 Ω 为平面上的多边形区域，Δ 为 Ω 的三角剖分，其顶点和网线集合分别记作 $V=\{v_i: 1\leqslant i\leqslant N_v\}$ 和 $E=\{e_j: 1\leqslant j\leqslant N_E\}$。若无特别说明，$T\in\Delta$ 均表示剖分 Δ 中的某一三角形单元。

两个有理分式

$$R_1(x,y)=P_1(x,y)/Q_1(x,y),$$
$$R_2(x,y)=P_2(x,y)/Q_2(x,y) \qquad (5.11)$$

称为恒等，记作 $R_1(x,y)\equiv R_2(x,y)$，如果存在一非零常数 a，使得

$$P_1(x,y)=aP_2(x,y),\quad Q_1(x,y)=aQ_2(x,y).$$

(5.11)式中所示的两个有理分式称为等价，记作 $R_1(x,y)\sim R_2(x,y)$，如果

$$P_1(x,y)\cdot Q_2(x,y)\equiv P_2(x,y)\cdot Q_1(x,y).$$

显然此处定义的关系“~”是一种等价关系。今后，关于有理函数的唯一性等都是在此等价的意义下说的。

2.1. C^1 广义楔函数

关于结点的选取。首先选取剖分 Δ 的顶点作为结点。在每一

网线 $e_j(j=1,2,\cdots,N_E)$ 的内部再选取一个结点，记为 $v_{N_V+j}^{(2)}$，称之为边结点。为方便计，常选取各网线的中点为边结点。

定义 5.4 对任一结点 v_q，构造相应的有理函数

$$w_q(x,y)=\frac{F_q(x,y)\cdot R_q(x,y)}{Q_q(x,y)}.$$

称有理函数族 $\{w_q(x,y)\}$ 为 C^1 广义楔函数，如果它们满足：

a) 当 v_q 为顶点时，有

(1) $\dfrac{\partial^{i+j}}{\partial x^i\partial y^j}w_q(v_p)=\xi_{ij}\delta_{pq}=\begin{cases}\xi_{ij} & p=q,\\ 0 & p\neq q,0\leqslant i+j\leqslant 1,\end{cases}$

(2) $\dfrac{\partial^{i+j}}{\partial x^i\partial y^j}w_q(x,y)=0$，$0\leqslant i+j\leqslant 1$，若 (x,y) 在 v_q 的对边上，

(3) $\dfrac{\partial^{i+j}}{\partial x^i\partial y^j}w_q(x,y)=\dfrac{\partial^{i+j}}{\partial x^i\partial y^j}p_3^{(q)}(x,y),0\leqslant i+j\leqslant 1$，若 (x,y) 在 v_q 的邻边上，其中 $p_3^{(q)}(x,y)$ 为某一 3 次多项式；

b) 当 v_q 为边结点时，有

(1) $\dfrac{\partial}{\partial n}w_q(v_q)=1$，

(2) $\dfrac{\partial^{i+j}}{\partial x^i\partial y^j}w_q(x,y)=0$，$0\leqslant i+j\leqslant 1$，若$(x,y)$在 v_q 的对边上，

(3) $\dfrac{\partial^{i+j}}{\partial x^i\partial y^j}w_q(x,y)=\dfrac{\partial^{i+j}}{\partial x^i\partial y^j}\bar{p}_3^{(q)}(x,y),0\leqslant i+j\leqslant 1$，若 (x,y) 在 v_q 的邻边上，其中 $\bar{p}_3^{(q)}(x,y)$ 为某一 3 次多项式。

定义中所谓 v_q 的对边(或邻边)是指 v_q 所在单元上的那些不含(或含)结点 v_q 的网线，且 $\{\xi_{00},\xi_{10},\xi_{01}\}$ 为一数组，$\dfrac{\partial}{\partial n}$ 表示沿 v_q 所在网线的法线方向求导。特别当 $\{\xi_{00},\xi_{10},\xi_{01}\}$取遍$\{1,0,0\}$的排列时，相应的有理函数族 $\{w_q(x,y)\}$ 称为标准 C^1 广义楔函数族。

定义 5 4 中的 $F_q(x,y)$，$R_q(x,y)$ 和 $Q_q(x,y)$ 分别称为结

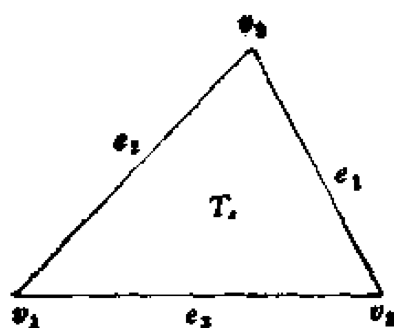


图 5.12

点 v_q 的相对元素，相邻元素和伴随元素。

设 $T\in\Delta$ 为以 v_1, v_2, v_3 为顶点的三角形单元，其三边为 e_1: $l_1(x,y)=0$, e_2: $l_2(x,y)=0$, e_3: $l_3(x,y)=0$，如图 5.12 所示，并约定 $v_{i+3}=v_i$, $e_{i+3}=e_i$ $(i=1,2,3)$.

如果满足定义 5.4 的广义楔函数存在，不失一般性，以单元 T 中的 v_i 为例，为满足 σ)-(1)，只须选取 $F_i(x,y)=l_i^2(x,y)$，而在 e_{i-1} 和 e_{i+1} 上，

$$l_i^2(x,y)\cdot R_i(x,y)-p_3^{(i)}(x,y)\cdot Q_i(x,y)=0.$$

由 Bezout 定理，存在多项式 $H_i(x,y)$，使得

$$l_i^2(x,y)\cdot R_i(x,y)-p_3^{(i)}(x,y)\cdot Q_i(x,y)+H_i(x,y)\cdot l_{i-1}(x,y)l_{i+1}(x,y)=0. \tag{5.12}$$

结合 σ)-(3) 并再次利用 Bezout 定理，不难证明 $H_i(x,y)$ 必被 $l_{i-1}(x,y)l_{i+1}(x,y)$ 整除，于是存在多项式 $G_i(x,y)$，使得成立着

$$l_i^2(x,y)R_i(x,y)-p_3^i(x,y)Q_3(x,y)+l_{i-1}(x,y)l_{i+1}(x,y)G_i(x,y)=0. \tag{5.13}$$

方程(5.13)称为相应于结点 v_i 的协调方程。

定理 5.5 如果协调方程(5.13)存在非零解，则为使满足定义 5.4 的最简有理分式 $w_i(x,y)=l_i^2(x,y)R_i(x,y)/Q_i(x,y)$ 存在，必须且只须协调方程(5.13)的任意一组非零解 $\{R_i^*(x,y), Q_i^*(x,y), G_i^*(x,y)\}$ 在约去一切公因子后所得的多项式 $\{A(x,y), B(x,y), C(x,y)\}$ 仍是方程(5.13)的解，即仍有

$$l_i^2(x,y)A(x,y)-p_3^{(i)}(x,y)B(x,y)$$

$$+ l_{i-1}^2(x,y) l_{i+1}^2(x,y) C(x,y) = 0. \tag{5.14}$$

证明 为方便计，将 $l_i(x, y)$ 简写为 l_i. 先证必要性. 设 $\{R_i^*(x,y), Q_i^*(x,y), G_i^*(x, y)\}$ 是协调方程(5.13)的任意一组非平凡解:

$$l_i^2 \cdot R_i^*(x,y) - p_3^{(i)}(x,p) Q_i^*(x,y) + l_{i-1}^2 l_{i+1}^2 \cdot G_i^*(x,y) = 0. \tag{5.15}$$

并设 $w_i(x,y) = \dfrac{l_i^2 \cdot t(x,y)}{v(x,y)}$ 是满足定义 5.4 的最简有理分式，其中 $t(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 是互质的多项式,于是由(5.15)式得

$$l_i^2 \cdot R_i^*(x,y) \cdot v(x,y) - l_i^2 \cdot t(x,y) Q_i^*(x,y) + l_{i-1}^2 \cdot l_{i+1}^2 H(x,y) = 0.$$

记 $d(x, y)$ 为 $R^*(x, y)$ 和 $Q_i^*(x, y)$ 的最大公因子，则必有 $\widetilde{H}(x, y)$ 存在,使得 $H(x,y) = d(x,y) \cdot \widetilde{H}(x,y)$. 从而

$$l_i^2 \cdot A(x,y) v(x,y) - l_i^2 t(x,y) B(x,y) + l_{i-1}^2 l_{i+1}^2 \widetilde{H}(x,y) = 0.$$

于是在 $l_{i+1} = 0$ 或 $l_{i-1} = 0$ 上有

$$l_i^2 \cdot A(x,y) v(x,y) - l_i^2 \cdot t(x,y) \cdot B(x,y) = 0. \tag{5.16}$$

按 $t(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 的互质性,即可知在 e_{i-1} 或 e_{i+1} 上 $v(x,y)$ 不恒为零. 用 $v(x,y)$ 除(5.16)式的两边，便知在 e_{i-1} 或 e_{i+1} 上有

$$l_i^2 \cdot A(x,y) - p_3^{(i)}(x,y) \cdot B(x,y) = 0,$$

其中 $p_3^{(i)}(x, y) = l_i^2 \cdot t(x, y)/v(x, y)$. 再利用在 $e_{i-1} \cup e_{i+1}$ 上 $D(l_i^2 \cdot t(x,y)/v(x,y)) = Dp_3^{(i)}/(x,y)$ 的关系,可知函数 $A(x, y)$ 和 $B(x, y)$ 满足方程:

$$l_i^2 \cdot A(x,y) - p_3^{(i)}(x,y) B(x,y) + l_{i-1}^2 l_{i+1}^2 C(x,y) = 0,$$

其中 $C(x, y)$ 为多项式.

再证充分性. 假定 $\{A(x, y), B(x, y), C(x, y)\}$ 是如上定义的方程 5.14 的不可约非零解. 于是在 $e_{i-1} \cup e_{i+1}$ 上 $B(x,y)$ 不恒为零,从而,在 $e_{i-1} \cup e_{i+1}$ 上有

$$l_i^2 A(x,y)/B(x,y) = p_3(x,y),$$

$$D(l_i^2 \cdot A(x,y)/B(x,y)) = Dp_3(x,y).$$

即 $l_i^2 A(x,y)/B(x,y)$ 是满足定义 5.4 的最简有理分式。 □

由定理 5.5 可知，C^1 广义楔函数的存在性取决于形如 (5.13) 方程的不可约非零解的存在性。

显然，只要协调方程(5.13)左边的最高次数 m 适当的大，它的解总是存在的。为保证由定义 5.4 界定的广义楔函数满足插值性质，选取多项式 $p_3^{(i)}(x,y)\in \mathbf{P}_3$，使得

$$\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial y^l} p_3^{(i)}(v_i) = \xi_{kl},$$

$$\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial y^l} p_3^{(i)}(v_j) = 0, \quad 0 \leqslant k+l \leqslant 1, \; j \neq i$$

$$\frac{\partial}{\partial n} p_3^{(i)}(v_{i,i}^{(i-1)}) = 0, \quad i,j = 1,2,3. \tag{5.17}$$

下面讨论相应于顶点的形如(5.13)型协调方程的解法。因为满足插值条件(5.17)的 3 次多项式可唯一表示为

$$p_3^{(i)}(x,y) = l_i^2 \cdot p_1^{(i)}(x,y) + d_i l_1 l_2 l_3, \quad i = 1,2,3, \tag{5.18}$$

其中 $p_1^{(i)}(x,y)\in \mathbf{P}_1$ 由下列条件可唯一决定:

$$\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial y^l}[l_i^2 \cdot p_1^{(i)}(x,y)]_{v_i} = \xi_{kl}, \quad 0 \leqslant k+l \leqslant 1,$$

而 d_i 是满足 $\frac{\partial}{\partial n}(l_i^2 p_1^{(i)}(x,y) + d_i l_1 l_2 l_3)_{v_{i,i}^{(i-1)}} = 0$ 的常数。将(5.18)代入协调方程(5.13)，得到

$$l_i \cdot R_i(x,y) - (l_i \cdot p_1^{(i)}(x,y) + d_i l_{i-1} l_{i+1}) \cdot Q_i(x,y) \\ + l_{i-1}^2 \cdot l_{i+1}^2 \cdot \tilde{G}_i(x,y) = 0, \tag{5.19}$$

其中 $R_i(x,y)\in \mathbf{P}_{m-2}$，$Q_i(x,y)\in \mathbf{P}_{m-3}$，$\tilde{G}_i(x,y)\in \mathbf{P}_{m-5}$。经整理可知

$$l_i(R_i(x,y) - p_1^{(i)}(x,y)Q_i(x,y)) \\ = l_{i-1}l_{i+1}(d_i Q_i(x,y) - \tilde{G}_i(x,y) l_{i-1} l_{i+1}).$$

因为 $l_i \nmid l_{i-1} l_{i+1}$，所以必有多项式 $H_i(x,y)\in \mathbf{P}_{m-4}$，使得

$$R_i(x,y) - p_1^{(i)}(x,y) \cdot Q_i(x,y) = l_{i-1} l_{i+1} \cdot H_i(x,y), \tag{5.20}$$

$$d_i Q_i(x,y) - \tilde{G}_i(x,y) l_{i-1} l_{i+1} = l_i \cdot H_i(x,y). \tag{5.21}$$

注意到 $d_i \neq 0$，所以

$$Q_i(x,y)=\frac{1}{d_i}(l_i\cdot H_i(x,y)+\widetilde{G}_i(x,y)l_{i-1}l_{i+1}),$$

$$R_i(x,y)=p_1^{(i)}(x,y)Q_i(x,y)+l_{i-1}l_{i+1}H_i(x,y).$$

这样就得到了满足定义 5.4 条件的相应于顶点 v_i 的 C^1 广义楔函数的一般表达式:

$$w_i(x,y)=p_1^{(i)}(x,y)\cdot l_i^2(x,y)+\frac{d_il_i^2l_{i-1}l_{i+1}H_i(x,y)}{l_i\cdot H_i(x,y)+l_{i-1}l_{i+1}\cdot\widetilde{G}_i(x,y)},\tag{5.22}$$

其中 $p_1^{(i)}(x,y)\in\mathbf{P}_1$ 和 d_i 分别是已确定的 1 次多项式和常数，而 $H_i(x,y)\in\mathbf{P}_{m-4}$ 和 $\widetilde{G}_i(x,y)\in\mathbf{P}_{m-5}$ 是任意的非零多项式。(5.22) 式在顶点 v_i 处的函数值以及 1 阶偏导数值出现 $\frac{0}{0}$ 型的不定型，这时可以用 $p_1^{(i)}(x,y)$ 在该顶点处的相应值来代替它们即可。

当结点 v_q 为边结点的情形。以 $v_{i,i}^{(i)}$ 为例来说明。类似于顶点情形的讨论，也可得相应于结点 $v_{i,i}^{(i)}$ 的协调方程:

$$l_{i-1}^2\cdot l_{i+1}^2\cdot\widetilde{R}_i(x,y)-\widetilde{p}_3^{(i)}\widetilde{Q}_i(x,y)+l_i^2\cdot\overline{G}_i(x,y)=0,\tag{5.23}$$

其中 $\widetilde{p}_3^{(i)}(x,y)\in\mathbf{P}_3$ 形如

$$\widetilde{p}_3^{(i)}(x,y)=l_i^2\cdot\overline{p}_1^{(i)}(x,y)+\tilde{d}_il_1l_2l_3.\tag{5.24}$$

将(5.24)代入(5.23)，并利用多项式的整除性，即可得到相应于 $v_{i,i}^{(i)}$ 的 C^1 广义楔函数表达式

$$\widetilde{w}_i(x,y)=\frac{\tilde{d}_i\hat{G}_i(x,y)l_{i-1}^2l_{i+1}^2l_i}{\hat{G}_i(x,y)l_{i-1}l_{i+1}+l_i\cdot\hat{H}_i(x,y)}\tag{5.25}$$

其中 $\hat{H}_i(x,y)\in\mathbf{P}_{m-4}$, $\hat{G}_i(x,y)\in\mathbf{P}_{m-5}$ 是任意的非零多项式，而 $\tilde{d}_i$ 是已确定的常数。

2.2. 三角剖分上 C^1 插值有理样条的表现

设 $f(x,y)\in C^1(\Omega)$，Ω 为平面上的多边形区域，Δ 为 Ω 的任意三角剖分。$T\in\Delta$ 是剖分 Δ 中的任意三角形单元（见图 5.12）。并设 $\{w_i^{(1)}(x,y),\ w_i^{(2)}(x,y),\ w_i^{(3)}(x,y),\ \widetilde{w}_i(x,y)\}$ 是 T 上的标准 C^1- 广义楔函数族。亦即 $w_i^{(1)}(x,y)$，$w_i^{(2)}(x,y)$ 和 $w_i^{(3)}(x,y)$ 是

当 $\{\xi_{00}, \xi_{10}, \xi_{01}\}$ 分别取为 $\{1,0,0\}$, $\{0,1,0\}$ 和 $\{0,0,1\}$ 时相应于顶点 v_i 的广义楔函数. 定义下面的插值算子

$$
\begin{aligned}
R(f;x,y)|_T = \sum_{i=1}^{3}\Big(& f(v_i)w_i^{(1)}(x,y) \\
& + \frac{\partial}{\partial x} f(v_i)\cdot w_i^{(2)}(x,y) + \frac{\partial}{\partial y} f(v_i)w_i^{(3)}(x,y) \\
& + \Big(\frac{\partial}{\partial n}f(v_{i,1}^{(i)}) - a_i f(v_{i+1}) - b_i\frac{\partial}{\partial x} f(v_{i+1}) \\
& - c_i \frac{\partial}{\partial y} f(v_{i+1})\Big) \widetilde{w}_i(x,y) \Big),
\end{aligned} \tag{5.26}
$$

其中

$$
a_i = \frac{\partial}{\partial n} w_{i+1}^{(1)}(v_{i,1}^{(i)}),\ b_i = \frac{\partial}{\partial n} w_{i+1}^{(2)}(v_{i,1}^{(i)}),\ c_i = \frac{\partial}{\partial n} w_{i+1}^{(3)}(v_{i,1}^{(i)}).
$$

根据单元 T 上的广义楔函数族的性质，不难验证 插 值 算 子(5.26)满足如下的插值性质

$$
R(f;v_i) = f(v_i),\ \frac{\partial}{\partial x} R(f;v_i) = \frac{\partial}{\partial x} f(v_i),
$$

$$
\frac{\partial}{\partial y} R(f;v_i) = \frac{\partial}{\partial y} f(v_i),
$$

$$
\frac{\partial}{\partial n} R(f;v_{i,1}^{(i)}) = \frac{\partial}{\partial n} f(v_{i,1}^{(i)}),\ i = 1,2,3. \tag{5.27}
$$

利用(5.27)和广义楔函数的性质,可以证明

定理 5.6 设 $f(x,y)\in C^1(\Omega)$, Δ为 $\Omega\subset R^2$ 的任一三角剖分,若对每一 $T\in\Delta$,构造形如(5.26)的有理插值函数$R(f;x,y)|_T$. 则所得分片有理函数 $R(f;x,y)\in C^1(\Omega)$.

证明 事实上，只须证明Δ中任意两个相邻单元上按以上方式构造的有理插值函数在其公共网线上为 C^1 光滑连接即可,设Δ中任两个相邻单元分别为 T_1 和 T_2,它们的公共网线为 e. 根据 C_1 广义楔函数族的定义和性质,$R(f;x,y)|_{T_1}$ 和 $R(f;x,y)|_{T_2}$ 在网线

e 上均表现为 3 次多项式，且 $R(f;x,y)|_{T_1}$ 和 $R(f;x,y)|_{T_2}$ 在 e 的两端点处具有相同的插值条件。从而在 e 上恒有 $R(f;x,y)|_{T_1}=R(f;x,y)|_{T_2}$。进一步，$\frac{\partial}{\partial x}R(f;x,y)|_{T_1}$ 和 $\frac{\partial}{\partial x}R(f;x,y)|_{T_2}$，$\frac{\partial}{\partial y}R(f;x,y)|_{T_1}$ 和 $\frac{\partial}{\partial y}R(f;x,y)|_{T_2}$ 在 e 上均为一元 2 次多项式，而这些 2 次多项式又都由 e 的两端点和内结点上的插值条件所唯一确定。所以在 e 上恒有

$$\frac{\partial}{\partial x}R(f;x,y)|_{T_1}=\frac{\partial}{\partial x}R(f;x,y)|_{T_2},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}R(f;x,y)|_{T_1}=\frac{\partial}{\partial y}R(f;x,y)|_{T_2}.$$

2.3. 3 阶逼近基和插值有理样条的等价表示

为深入研究广义楔函数的性质，引入下面的逼近基的定义。

定义 5.7 对于插值格式

$$\tilde{u}(x,y)=\sum_{q=1}^{M}u_q\cdot w_q(x,y), \tag{5.28}$$

其中 u_q 记为函数 $u(x,y)$ 在"结点" v_q 上的结点值，$\{w_q(x,y)\}$ 为与 $\{v_q\}$ 相应的一组函数，称 $\{w_q(x,y)\}$ 为 k 阶逼近基，如果

a) 对所有次数小于 $k+1$ 的多项式 $u(x,y)$，式 (5.28) 精确成立，即

$$u(x,y)=\sum_{i=1}^{M}u_q\cdot w_q(x,y),\ (x,y)\in\Omega;$$

b) 存在一个次数为 $k+1$ 的多项式 $u(x,y)$，使得 a) 中的等式不恒成立。

如果在(5.22)和(5.25)中适当地选取 $H_i(x,y)$，$\tilde{G}_i(x,y)$ 和 $\hat{H}_i(x,y)$，$\hat{G}_i(x,y)$，则可得到不同的广义楔函数。例如 G.Birkhoff 和 L. Mansfield[97] 的三角形单元上的基函数就是本节结果的特例。

取 $m=5$，要求单元 T 上所有 (12 个)的广义楔函数具有公

共的分母，则可推得此公共分母形如

$$Q(x,y)=C_1l_2l_3+C_2l_3l_1+C_3l_1l_2, \tag{5.29}$$

其中 $C_i(i=1,2,3)$ 是任意非零常数。

定理 5.8 如果单元T上的C^1广义楔函数族具有公共分母，则此C^1广义楔函数族便构成T上的3阶逼近基。

证明 设$f(x,y)$是任意的3次多项式，则

$$R(f;x,y)-f(x,y)=\frac{P_5(x,y)}{Q_2(x,y)}:=r(x,y),(x,y)\in T. \tag{5.30}$$

根据广义楔函数的性质，$r(x,y)$在结点处满足齐次插值条件，且在T的可表现为3次多项式。由代数曲线理论，知$P_5(x,y)$必含因子$l_1^2\cdot l_2^2\cdot l_3^2$。但这是不可能的，因此只有$P_5(x,y)=0$，从而该$C^1$广义楔函数族是$T$上的3阶逼近基。 □

若特别取$C_i=1\ (i=1,2,3)$，则单元T上的3阶逼近基为

$$w_1^{(\xi_{00},\xi_{1,0},\xi_{0,1})}(x,y)=l_1^2(A_1+B_1l_2+C_1l_3)+\frac{d_1l_1^2l_2l_3(l_2+l_3)}{l_1l_2+l_2l_3+l_3l_1}, \tag{5.31}$$

$$\tilde{w}(x,y)=-\frac{\tilde{d}_1l_1^2l_2^2l_3}{l_1l_2+l_2l_3+l_3l_1}, \tag{5.32}$$

其中

$$A_1=\xi_{00}/l_1^2(v_1),$$

$$B_1=((x_2-x_1)P_1-(y_2-y_1)Q_1)/((x_1-x_3)(y_2-y_3)-(y_1-y_3)(x_2-x_3)),$$

$$C_1=((y_1-y_3)Q_1-(x_1-x_3)P_1)/((x_1-x_3)(y_2-y_3)-(y_1-y_3)(x_2-x_3)),$$

$$P_1=-\xi_{10}/l_1^2(v_1)-2\xi_{00}\cdot(y_3-y_2)/l_1^3(v_1),$$

$$Q_1=\xi_{10}/l_1^2(v_1)-2\xi_{00}\cdot(x_3-x_2)/l_1^3(v_1),$$

$$d_1=-(2(A_1+C_1l_3(v_{1,1}^{(3)}))\cdot l_1(v_{1,1}^{(3)})\cdot((y_3-y_2)(y_3-y_1)+(x_3-x_2)(x_3-x_1))+l_1^2(v_{1,1}^{(3)})(C_1((y_3-y_2)(y_2-y_1)-(x_3-x_1)(x_3-x_2))+B_1\cdot((x_1-x_3)^2+(y_1-y_3)^2))$$

$$/(l_1(v_{1,1}^{(3)})l_3(v_{1,1}^{(3)})((x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2)),$$

$$\tilde{d}_1 = 1/(l_1(v_{1,1}^{(1)})l_2(v_{1,1}^{(1)})((x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2));$$

而 $w_2^{(\xi_{00},\xi_{10},\xi_{01})}(x,y)$，$w_3^{(\xi_{00},\xi_{10},\xi_{01})}(x,y)$，$\tilde{w}_2(x,y)$ 和 $\tilde{w}_3(x,y)$ 可对上述表达式通过上(下)标的适当轮换来得到。于是单元T上的 3 阶 c^1 逼近基是

$$w_i^{(1)}(x,y) = w_i^{(1,0,0)}(x,y),\ w_i^{(2)}(x,y) = w_i^{(0,1,0)}(x,y),$$

$$w_i^{(3)}(x,y) = w_i^{(0,0,1)}(x,y),\ \tilde{w}_i(x,y) = \tilde{w}_i(x,y), i = 1,2,3.$$

为得到便于应用的插值有理样条函数的等价表示，将单元T上具有公共分母(5.29)的 C^1 广义楔函数族代入(5.26)，经整理得

$$R(f;x,y)|_T = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i(x,y)p_3^{(i)}(x,y), \tag{5.33}$$

其中

$$\alpha_i(x,y) = \frac{c_i l_j l_k}{c_1 l_2 l_3 + c_2 l_1 l_3 + c_3 l_1 l_2},$$

$$i \neq j \neq k \neq i,\ i,j,k = 1,2,3, \tag{5.34}$$

而 $p_3^{(i)}(x,y) \in \mathrm{P}_3$ 为满足下述插值条件的多项式

$$\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial y^l}p_3^{(i)}(v_r) = \frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial y^l}f(v_r),\ r = 1,2,3,\ 0 \leqslant k+l \leqslant 1,$$

$$\frac{\partial}{\partial n}p_3^{(i)}(v_{1,1}^{(i)}) = \frac{\partial}{\partial n}f(v_{1,1}^{(i)}),\ i = 1,2,3. \tag{5.35}$$

在曲面设计等问题中，人们常常构造满足插值条件(5.35)的三个插值多项式 $p_3^{(i)}(x,y)(i=1,2,3)$，再作这三个插值多项式的凸组合(5.33)。

权函数 $\{\alpha_i(x,y)\}_{i=1}^3$ 具有下面的性质：

$$\sum_{i=1}^{3}\alpha_i(x,y) \equiv 1,\ \alpha_i(x,y)|_{v_j} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases},\ i,j = 1,2,3. \tag{5.36}$$

一般来说，满足(5.36)的有理权函数均可按广义楔函数方法求得。

综合这一节的结果，有

定理 5.9 Δ 为平面多边形区域 Ω 的任意三角剖分. 则在 Δ 上 C^1 光滑的有理样条函数类的最少自由度是 $3N_v + N_E$,其中 N_v 和 N_E 分别是剖分 Δ 的顶点和网线的个数.

§3. 三角剖分上的 C^2 插值有理样条函数

在计算机辅助几何设计等一系列问题中,常常也需要构造具有 2 阶光滑度的曲面. 本节将讨论具有局部支集的 C^2 有理样条函数类的构造方法. 本节所采用的方法,仍然是广义楔函数方法.

3.1. C^2 广义楔函数及其构造

仍设 $\Omega\subset \boldsymbol{R}^2$ 是平面上多边形区域,Δ 是 Ω 的三角剖分. $T\in\Delta$ 是以 v_1, v_2, v_3 为顶点的三角形单元, $e_i(i=1,2,3)$ 是 T 的边界,它们的方程分别是 $l_i(x,y)=0$, 并选定 $l_i(x, y)$ 的形式,使得 $l_i(v_i)>0$.

在单元 T 上按如下的方式选取结点:先选 T 的三个顶点为结点;再于 T 的每一边界的内部选取三个不同点, 记为 $v_{2,1}^{(i)}$, $v_{1,1}^{(i)}$, $v_{2,2}^{(i)}$ $(i=1,2,3)$, 并称之为边结点.

定义 5.10 对任一结点 v_q, 构造相应的有理函数

$$w_q(x,y)=\frac{F_q(x,y)R_q(x,y)}{Q_q(x,y)}. \tag{5.37}$$

称有理函数族 $\{w_q(x,y)\}$ 为 c^2 广义楔函数族, 如果它们满足:

a) 当 v_q 为顶点时,有

$$(1)\ \frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i\partial y^j}w_q(v_p)=\xi_{ij}\delta_{pq}=\begin{cases}\xi_{ij} & p=q,\\ 0 & p\neq q,\end{cases}\ 0\leqslant i+j\leqslant 2,$$

$$(2)\ \frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i\partial y^j}w_q(x,y)=0,\ 0\leqslant i+j\leqslant 2,\ (x,y)\in e_q,$$

$$(3)\ \frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i\partial y^j}w_q(x,y)=\frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i\partial y^j}p_5^{(q)}(x,y),0\leqslant i+j\leqslant 2,(x,y)$$

$\in e_{q+1}\cup e_{q-1}$, 其中 $p_5^{(q)}(x,y)\in \mathbf{P}_5$ 为某一 5 次多项式;

b) 当 v_q 为边结点,如 e_r 上的点 $v_{k,l}^{(r)}$ 时,有

1) $\frac{\partial^k}{\partial n^k} w_{k,l}^{(r)}(v_{k,l}^{(r)}) = \zeta_{k,l}^{(r)}$, $k = 1,2$, $l = 1,2$,

2) $\frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial y^j} w_{k,l}^{(r)}(x,y) = 0$, $0 \leqslant i+j \leqslant 2$, $(x,y) \in e_{r+1} \cup e_{r-1}$,

3) $\frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial y^j} w_{k,l}^{(r)}(x,y) = \frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial y^j} \bar{p}_5^{(r)}(x,y)$, $0 \leqslant i+j \leqslant 2$,

$(x,y) \in e_r$，其中 $\bar{p}_5^{(r)}(x,y) \in \mathbf{P}_5$ 为某一 5 次多项式，并约定 $e_{r+1} = e_r$。

若定义 5.9 中的结点处，$\{\xi_{ij}^{(q)}\}_{3<i+j\leqslant 2}$ 和 $\{\zeta_{1,1}, \zeta_{2,1}, \zeta_{2,2}\}$ 分别取遍 $\{1,0,0,0,0,0\}$ 和 $\{1,0,0\}$ 的所有排列时，相应所得的有理函数族称为标准 C^2 广义楔函数族。与前一节类似，(5.37)式中的 $F_q(x,y)$，$R_q(x,y)$ 和 $Q_q(x,y)$ 分别被称为相应于结点 v_q 的相对元素，相邻元素和伴随元素。

以下讨论 C^2 广义楔函数族的存在性和具体构造问题。

对于顶点 v_i。假设满足定义 5.9 的 C^2 广义楔函数存在，且

$$w_i(x,y) = \frac{F_i(x,y)R_i(x,y)}{Q_i(x,y)}.$$

由广义楔函数的性质，只须选取相应于结点 v_i 的相对元素为 $F_i(x,y) = l_i^3(x,y)$。与前一节类似，由 Bezout 定理，可知 $R_i(x,y)$ 和 $Q_i(x,y)$ 一定满足如下的协调方程：

$$l_i^3 \cdot R_i(x,y) - p_5^{(i)}(x,y) \cdot Q_i(x,y) + l_{i+1}^3 \cdot l_{i+2}^3 G_i(x,y) = 0. \tag{5.38}$$

与定理 5.5 类似地有

定理 5.11 如果协调方程 (5.38) 存在非零解，则为使满足定义 5.9 的最简有理分式 $w_i(x,y) = l_i^3 \cdot R_i(x,y)/Q_i(x,y)$ 存在，必须且只需协调方程(5.38)的任意一组非零解 $R_i^*(x,y)$，$Q_i^*(x,y)$ 和 $G_i^*(x,y)$ 在约去一切公因子后所得的多项式 $A(x,y)$，$B(x,y)$ 和 $C(x,y)$ 仍是形如(5.38)的方程的解。即

$$l_i^3 \cdot A(x,y) - p_5^{(i)}(x,y)B(x,y) + l_{i+1}^3 \cdot l_{i+2}^3 \cdot C(x,y) = 0. \tag{5.39}$$

所以为求满足定义 5.9 的C^2 广义楔函数只须求得形如协调方程(5.38)的不可约非零解。

对于顶点结点 v_i，为使相应的广义楔函数 $w_i(x, y)$ 满足定义 5.9 中界定的插值条件，应选取 $p_5^{(i)}(x,y)\in \mathrm{P}_5$，使得

$$\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial y^l} p_5^{(i)}(v_i) = \xi_{kl}^{(i)},$$

$$\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial y^l} p_5^{(i)}(v_j) = 0,\ 0 \leqslant k+l \leqslant 2,\ j \neq i,$$

$$\frac{\partial}{\partial n} p_5^{(i)}(v_{1,1}^{(i+2)}) = \frac{\partial^2}{\partial n^2} p_5^{(i)}(v_{2,1}^{(i+2)}) = \frac{\partial^2}{\partial n^2} p_5^{(i)}(v_{2,2}^{(i+2)}) = 0. \quad (5.40)$$

上面式子中约定 $v_{k,l}^{(i+3)} := v_{k,l}^{(i)}$.

引理 5.10 满足插值条件(5.40)的 5 次多项式恒可表现为

$$p_5^{(i)}(x,y) = l_i^3 \cdot p_2^{(i)}(x,y) + l_1 l_2 l_3 \bar{p}_2^{(i)}(x,y),\ i = 1,2,3, \quad (5.41)$$

其中 $p_2^{(i)}(x,y)$, $\bar{p}_2^{(i)}(x,y)\in \mathrm{P}_2$，且

$$\bar{p}_2^{(i)}(x,y) = A_i l_1 l_2 + B_i l_2 l_3 + C_i l_3 l_1.$$

证明 显然，满足条件

$$\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial y^l}[l_i^3(x,y)\cdot p_2^{(i)}(x,y)]_{v_i} = \xi_{kl}^{(i)},\ 0 \leqslant k+l \leqslant 2$$

的 2 次多项式 $p_2^{(i)}(x,y)$ 是唯一存在的。若记

$$\bar{p}_5^{(i)}(x,y) = p_5^{(i)}(x,y) - l_i^3 \cdot p_2^{(i)}(x,y),$$

则 $v_i(i=1,2,3)$ 是代数曲线 $\bar{p}_5^{(i)}(x,y)=0$ 的 3 重零点。因此 $\bar{p}_5^{(i)}(x,y)=0$ 以 $l_j(x,y)=0$ $(j=1,2,3)$ 为其分量，即

$$\bar{p}_5^{(i)}(x,y) = l_1\cdot l_2\cdot l_3\cdot \bar{p}_2^{(i)}(x,y),$$

且

$$\bar{p}_2^{(i)}(x,y) = A_i l_1 l_2 + B_i l_2 l_3 + C_i l_3 l_1,$$

其中 A_i, B_i, C_i 由多项式 $p_5^{(i)}(x,y)$ 在 e_{i+2} 上边结点处的法向条件所唯一决定。 □

将(5.41)式代入协调方程(5.38)，得到

$$l_i^3\cdot R_i(x,y) - (l_i^3\cdot p_2^{(i)}(x,y) + l_{i+1}\cdot l_{i+2}\cdot \bar{p}_2^{(i)}(x,y))Q_i(x,y) + l_{i+1}^3 l_{i+2}^3 \tilde{G}_i(x,y) = 0, \quad (5.42)$$

其中 $\widetilde{G}_i(x,y)=G_i(x,y)/l_i(x,y)$。往后恒假定(5.38)式左端的最高次幂为 m，整理上式，有

$$
\begin{aligned}
& l_i^2(R_i(x,y)-p_2^{(i)}(x,y)Q_i(x,y)) \\
& \quad = l_{i+1}l_{i+2}(\bar{p}_2^{(i)}(x,y)\cdot Q_i(x,y)-l_{i+1}^2l_{i+2}^2\widetilde{G}_i(x,y)).
\end{aligned}
$$

根据多项式的整除性理论，存在一多项式 $h_i(x,y)\in \mathrm{P}_{m-5}$，使得

$$
R_i(x,y)-p_2^{(i)}(x,y)Q_i(x,y)=l_{i+1}l_{i+2}h_i(x,y), \tag{5.43}
$$

$$
\bar{p}_2^{(i)}(x,y)\cdot Q_i(x,y)-l_{i+1}^2l_{i+2}^2\widetilde{G}_i(x,y)=l_i^2\cdot h_i(x,y). \tag{5.44}
$$

再将 $\bar{p}_2^i(x,y)$ 代入(5.44)，经整理得

$$
\begin{aligned}
& l_i(l_i\cdot h_i(x,y)-(A_il_{i+1}+B_il_{i+2})\cdot Q_i(x,y)) \\
& \quad = l_{i+1}l_{i+2}(c_iQ_i(x,y)-l_{i+1}l_{i+2}\widetilde{G}_i(x,y).
\end{aligned} \tag{5.45}
$$

这说明，存在多项式 $K_i(x,y)\in \mathrm{P}_{m-6}$，使得

$$
C_i\cdot Q_i(x,y)-l_{i+1}l_{i+2}\widetilde{G}_i(x,y)=l_i\cdot K_i(x,y), \tag{5.46}
$$

$$
\begin{aligned}
& l_i\cdot h_i(x,y)-(A_il_{i+1}+B_il_{i+2})\cdot Q_i(x,y) \\
& \quad = l_{i+1}l_{i+2}\cdot K_i(x,y).
\end{aligned} \tag{5.47}
$$

于是有

$$
Q_i(x,y)=\frac{1}{C_i}l_{i+1}l_{i+2}\widetilde{G}_i(x,y)+\frac{1}{C_i}l_i\cdot K_i(x,y) \tag{5.48}
$$

和

$$
\begin{aligned}
& l_i(h_i(x,y)-\frac{1}{C_i}(A_i\cdot l_{i+1}+B_il_{i+2})\cdot K_i(x,y)) \\
& \quad = l_{i+1}l_{i+2}(K_i(x,y)+\frac{1}{C_i}(A_il_{i+1}+B_il_{i+2})\widetilde{G}_i(x,y)).
\end{aligned} \tag{5.49}
$$

由多项式的整除性和(5.49)式，知存在一多项式 $L_i(x,y)\in \mathrm{P}_{m-7}$，使得

$$
\begin{aligned}
& h_i(x,y)-\frac{1}{C_i}(A_il_{i+1}+B_il_{i+1})\cdot K_i(x,y) \\
& \quad = l_{i+1}l_{i+2}\cdot L_i(x,y),
\end{aligned} \tag{5.50}
$$

$$
K_i(x,y)+\frac{1}{C_i}(A_il_{i+1}+B_il_{i+2})\widetilde{G}_i(x,y)=l_i\cdot L_i(x,y). \tag{5.51}
$$

所以

$$K_i(x,y) = -\frac{1}{C_i}(A_i l_{i+1} B_i l_{i+2})\widetilde{G}_i(x,y) + l_i \cdot L_i(x,y). \quad (5.52)$$

于是协调方程(5.38)的通解为

$$\begin{cases} Q_i(x,y) = -\frac{1}{C_i^2}(p_2^{(i)}(x,y) - 2C_i l_{i+1} l_{i+2})\widetilde{G}_i(x,y) \\ \qquad + \frac{1}{C_i} l_i^2 \cdot L_i(x,y), \\ R_i(x,y) = -\frac{1}{C_i^2}(p_2^{(i)}(x,y)(\bar{p}_2^{(i)}(x,y) - 2C_i l_{i+1} l_{i+2}) \\ \qquad + (A_i l_{i+1} + B_i l_{i+2})^2 l_{i+1} l_{i+2})\widetilde{G}_i(x,y) \\ \qquad + \frac{1}{C_i}(l_i^2 \cdot p_2^{(i)}(x,y) + l_{i+1} l_{i+2} \\ \qquad \cdot \bar{p}_2^{(i)}(x,y)) \cdot L_i(x,y), \\ G_i(x,y) = l_i \cdot \widetilde{G}_i(x,y), \end{cases} \quad (5.53)$$

其中 $\widetilde{G}_i(x,y) \in \mathbf{P}_{m-7}$，$L_i(x,y) \in \mathbf{P}_{m-7}$ 为任意的非零多项式。

对边结点，例如 e_i 上的结点。相应的协调方程是

$$l_{i+1}^2 \cdot l_{i+2}^2 \cdot R_i^0(x,y) - p_5^{(i)}(x,y) \cdot Q_i^0(x,y) + l_i^3 \cdot G_i^0(x,y) \equiv 0, \quad (5.54)$$

其中 $p_5^{(i)}(x,y) \in \mathbf{P}_5$ 是满足下列插值条件

$$\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial y^l} p_5^{(i)}(v_t) = 0, \ 0 \leqslant k + l \leqslant 2, \ t = i + 1, i + 2,$$

$$\frac{\partial}{\partial n} p_5^{(i)}(v_{1,1}^{(i)}) = \xi_{1,1}^{(i)}, \ \frac{\partial^2}{\partial n^2} p_5^{(i)}(v_{2,1}^{(i)}) = \zeta_{2,1}^{(i)}, \ \frac{\partial^2}{\partial n^2} p_5^{(i)}(v_{2,2}^{(i)}) = \zeta_{2,2}^{(i)}$$

的 5 次多项式。而这样的 5 次多项式可以表示成

$$p_5^{(i)}(x,y) = l_i^3(x,y) \cdot p_2^i(x,y) + l_1 l_2 l_3 \cdot \bar{p}_2^{(i)}(x,y), \quad (5.55)$$

此处 $\bar{p}_2^{(i)}(x,y) = \bar{A}_i l_2 l_3 + \bar{B}_i l_1 l_3 + \bar{C}_i l_1 l_2$，且常数 $\bar{A}_i$，$\bar{B}_i$ 和 $\bar{C}_i$ 由 e_i 上边结点处的插值条件所唯一确定，$p_2^i(x, y) \in \mathbf{P}_2$ 为任意的 2 次多项式。

将(5.55)代入(5.54)式，类似于顶点情形的推导，最终可得方程(5.54)的通解表达式。例如

$$
\begin{cases}
R_i^0(x,y) = l_i \cdot \tilde{R}_i^0(x,y), \\
Q_i^0(x,y) = -\dfrac{1}{C_i^2}(\bar{p}_2^{(i)}(x,y) - 2C_i l_{i+1} l_{i+2})\tilde{R}_i^0(x,y) \\
\qquad\qquad + \dfrac{1}{C_i^2} l_i^2 \cdot S_i(x,y),
\end{cases}
\tag{5.56}
$$

其中 $\tilde{R}_i^0(x,y) \in \mathbf{P}_{m-7}$ 和 $S_i(x,y) \in \mathbf{P}_{m-7}$ 是任意的多项式。

由(5.53)和(5.56)，即可得到单元T上的c^2广义楔函数的表达式:

$$
w_i(x,y) = \frac{l_i^3(x,y) \cdot R_i(x,y)}{Q_i(x,y)},\ i = 1,2,3
$$

和

$$
w_{k,l}^{(i)}(x,y) = \frac{C_i l_{i+1}^3 l_{i+2}^3 \cdot l_i \cdot \tilde{R}_i^0(x,y)}{Q_i^0(x,y)},
$$

$$
k = 1,2,\ l = 1,2,\cdots,k\ \ i = 1,2,3,
$$

式中 $R_i(x,y)$, $Q_i(x,y)$ 和 $\tilde{R}_i^0(x,y)$, $Q_i^0(x,y)$ 分别由(5.53)和(5.56)式给出．这里，广义楔函数在顶点 $v_i(i=1,2,3)$ 处的函数值和一阶偏导数值出现 $\frac{0}{0}$ 型的不定型，此时可以用 $p_5^{(i)}(x,y)$ 在 v_i 处的相应值来代替它们即可。

由上述的过程，可知

$$
\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial y^l} w_i(v_i) = \xi_{kl}^{(i)},\ 0 \leqslant k+l \leqslant 2,
$$

$$
\frac{\partial}{\partial n} w_{1,1}^{(i)}(v_{1,1}^{(i)}) = \zeta_{1,1}^{(i)},\ \frac{\partial^2}{\partial n^2} w_{2,1}^{(i)}(v_{2,1}^{(i)}) = \zeta_{2,1}^{(i)},\ \frac{\partial^2}{\partial n^2} w_{2,2}^{(i)}(v_{2,2}^{(i)}) = \zeta_{2,2}^{(i)}.
$$

也就是说 $w_i(x,y)$ 和 $w_{s,t}^{(i)}(x,y)$ $(i=1,2,3,\ s=1,2,t=1,s)$ 分别与给定数组 $\{\xi_{kl}^{(i)}\}_{0\leqslant k+l\leqslant 2}$ 和 $\{\zeta_{1,1},\zeta_{2,1},\zeta_{2,2}\}$ 有关。特别地，如果 $\{\xi_{kl}^{(i)}\}_{0\leqslant k+l\leqslant 2}$ 和 $\{\zeta_{1,1},\zeta_{2,1},\zeta_{2,2}\}$ 分别取遍$\{1,0,0,0,0,0\}$和$\{1,0,0\}$的所有排列，则所得相应的有理函数族便是标准C^2广义楔函数族。于是可得到单元T上的C^2广义楔函数族，并记为

$\{w_{ij}^{(k)}(x,y), w_{1,1}^{(k)}(x,y), w_{2,1}^{(k)}(x,y), w_{2,2}^{(k)}(x,y)\}_{0\leqslant i+j\leqslant 2}$, $k = 1,2,3$。

3.2. 三角剖分上 C^2 插值有理样条表现

设Δ是平面多边形区域 $\Omega\subset R^2$ 的三角剖分，基于前一段中结点的选择，除剖分的顶点外，在每一网线的内部选取三个互异的点作为剖分的结点. 根据结点处的标准 C^2 广义楔函数族 $\{w_{ij}^{(k)}(x,y), w_{1,1}^{(s)}, w_{2,1}^{(s)}(x,y), w_{2,2}^{(s)}(x,y)\}_{0\le i+j\le 2}$, $k=1,2,\cdots,N_v$, $s=1,2,\cdots,N_E$, 对 $f(x,y)\in C^2(\Omega)$, 定义插值算子

$$
\begin{aligned}
R(f;x,y)|_T = \sum_{k=1}^{3}\Bigg(&\sum_{0\le i+j\le 2} f_{ij}^{(k)}\cdot w_{ij}^{(k)}(x,y) \\
&+\left(\frac{\partial}{\partial n}f(v_{1,1}^{(k)})-\sum_{0\le i+j\le 2} a_{ij}^{(k+1)}\cdot f_{ij}^{(k+1)}\right)\cdot w_{1,1}^{(k)}(x,y) \\
&+\left(\frac{\partial^2}{\partial n^2}f(v_{2,1}^{(k)})-\sum_{0\le i+j\le 2} b_{ij}^{(k+1)}f_{ij}^{(k+1)}\right)\cdot w_{2,1}^{(k)}(x,y) \\
&+\left(\frac{\partial^2}{\partial n^2}f(v_{2,2}^{(k)})-\sum_{0\le i+j\le 2} c_{ij}^{(k+1)}\cdot f_{ij}^{(k+1)}\right)\cdot w_{2,2}^{(k)}(x,y)\Bigg), \\
&(x,y)\in T,
\end{aligned}
\tag{5.57}
$$

其中T为Δ中以 $v_i(i=1,2,3)$ 为顶点的三角形单元，而

$$
f_{ij}^{(k)}=\frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i\partial y^j}f(v_k),\quad a_{ij}^{(k+1)}=\frac{\partial}{\partial n}w_{ij}^{(k+1)}(v_{1,1}^{(k)}),
$$

$$
b_{ij}^{(k+1)}=\frac{\partial^2}{\partial n^2}w_{ij}^{(k+1)}(v_{2,1}^{(k)}),\quad c_{ij}^{(k+1)}=\frac{\partial^2}{\partial n^2}w_{ij}^{(k+1)}(v_{2,2}^{(k)}).
$$

这里约定 $k+3:=k$.

根据 C^2 广义楔函数的性质和 $R(f;x,y)$ 的定义，不难证明 $R(f;x,y)$ 满足插值性质

$$
\frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i\partial y^j}R(f;v_k)=\frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i\partial y^j}f(v_k),
$$

$$
0\le i+j\le 2\quad k=1,2,\cdots,N_v,
$$

$$
\frac{\partial}{\partial n}R(f;v_{1,1}^{(s)})=\frac{\partial}{\partial n}f(v_{1,1}^{(s)}),\quad \frac{\partial^2}{\partial n^2}R(f;v_{2,1}^{(s)})=\frac{\partial^2}{\partial n^2}f(v_{2,1}^{(s)}),
$$

$$
\frac{\partial^2}{\partial n^2}R(f;v_{2,2}^{(s)})=\frac{\partial^2}{\partial n^2}f(v_{2,2}^{(s)}),\quad s=1,2,\cdots,N_E.
$$

定理 5.13 设 Ω 是一多边形区域。Δ 是 Ω 的三角剖分，$f(x,y)\in C^2(\Omega)$. 则由(5.57)定义的分片有理插值函数 $R(f;x,y)\in C^2(\Omega)$。

定理 5.14 平面多边形区域 $\Omega\subset \boldsymbol{R}^2$ 的三角剖分 Δ 上的 C^2 插值有理样条函数类的最少自由度是 $6N_v+3N_E$，其中 N_v 和 N_E 分别是剖分 Δ 的顶点和网线的个数。

3.3. C^2 插值有理样条的等价表示

在前一段中假定 $m=9$，且单元 T 上的 C^2 一广义楔函数族具有公共分母。经适当选取(5.53)和(5.56)中的 $\widetilde{G}_i(x,y)$，$L_i(x,y)$，$\widetilde{R}_i^0(x,y)$ 和 $S_i(x,y)$，可使 $Q_i(x,y)$ 和 $Q_i^0(x,y)$ 都具有形式

$$Q(x,y)=\alpha l_1^2\cdot l_2^2+\beta l_2^2 l_3^2+\gamma l_3^2 l_1^2, \tag{5.58}$$

其中 α,β,γ 为任意正常数。其实，还可取(5.58)所示的 $Q(x,y)$ 作为单元 T 上所有 C^2 广义楔函数的公共分母。

利用(5.58)所示的 $Q(x,y)$，按(5.57)式定义的插值算子 $R(f;x,y)$ 可以表示为

$$R(f;x,y)=\sum_{i=1}^{3}\alpha_i(x,y)B_5^{(i)}(x,y),\ (x,y)\in T, \tag{5.59}$$

其中

$$\begin{cases}\alpha_1(x,y)=\dfrac{\beta l_2^2\cdot l_3^2}{\alpha l_1^2 l_2^2+\beta l_2^2 l_3^2+\gamma l_3^2 l_1^2},\\ \alpha_2(x,y)=\dfrac{\gamma l_3^2\cdot l_1^2}{\alpha l_1^2\cdot l_2^2+\beta l_2^2\cdot l_3^2+\gamma l_3^2\cdot l_1^2},\\ \alpha_3(x,y)=\dfrac{\alpha l_1^2 l_2^2}{\alpha l_1^2 l_2^2+\beta l_2^2 l_3^2+\gamma l_3^2 l_1^2},\end{cases} \tag{5.60}$$

而 $B_5^{(i)}(x,y)\in P_5(i=1,2,3)$ 由如下插值条件所唯一确定

$$\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k\partial y^l}B_5^{(i)}(v_t)=\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k\partial y^l}f(v_t),$$

$$0\leqslant k+l\leqslant 2,\ i,t=1,2,3,$$

$$\frac{\partial}{\partial n}B_5^{(i)}(v_{1,1}^{(i)})=\frac{\partial}{\partial n}f(v_{1,1}^{(i)}),\quad \frac{\partial^2}{\partial n^2}B_5^{(i)}(v_{2,1}^{(i)})=\frac{\partial^2}{\partial n^2}f(v_{2,1}^{(i)}),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial n^2} B_5^{(i)}(v_{2,2}^{(i)}) = \frac{\partial^2}{\partial n^2} f(v_{2,2}^{(i)}), \quad i = 1, 2, 3. \qquad (5.61)$$

(5.59) 式所示的正是 Blending 插值方法中的 Little-Brown 格式。

顺便指出，权函数 $\alpha_i(x,y)(i=1,2,3)$ 具有如下的性质

i) $\alpha_i(x,y) > 0, \ i = 1,2,3,$

ii) $\sum_{i=1}^{3} \alpha_i(x,y) \equiv 1,$

iii) $\alpha_i(x, y)|_{e_j} = S_{ij}, \ D\alpha_i(x, y)|_{e_j} = 0$, D为微分算子，$i,j = 1,2,3.$

而满足插值条件(5.61)的 5 次多项式可表示为

$$B_5^{(i)}(x,y) = l_1^3 \cdot p_2^{(1)}(x,y) + l_2^3 \cdot p_2^{(2)}(x,y) + l_3^3 \cdot p_2^{(3)}(x,y) + l_1 l_2 l_3 \cdot Q_2^{(i)}(x,y),$$

其中 $p_2^{(k)}(x,y) \in P_2, \ k = 1,2,3$ 由下面的条件所唯一确定：

$$\frac{\partial^{s+t}}{\partial x^s \partial y^t}(l_k^3 \cdot p_2^{(k)}(x,y)|_{v_k} = \frac{\partial^{s+t}}{\partial x^s \partial y^t} f(v_k), \quad 0 \leqslant s + t \leqslant 2;$$

$Q_2^{(i)}(x, y) = A_i l_1 l_2 + B_i l_2 l_3 + C_i l_3 l_1$，此处 A_i, B_i 和 C_i 由(5.61)中边界法向导数的条件所唯一确定。

可以证明，插值格式(5.59)对 5 次多项式是精确的。

§4. 三角剖分下 C^μ 插值有理样条函数

同前面类似地，为在三角剖分 Δ 上讨论 C^μ—有理样条函数类，必须先选取剖分 Δ 上的结点。结点的选取可按前面类似的方式进行。例如将剖分的顶点取为顶结点。再在剖分的每一网线内部选取 $\mu(\mu+1)/2$ 个点，作为边结点。在这边结点处将赋予相应法向导数值。常把第 i 条网线上的结点记为 $v_{k,l}^{(i)}$，它们通常被选为网线的等分点。

设 T 是剖分 Δ 中的以 v_1, v_2 和 v_3 为顶点的三角形单元。T 的三条边 e_1, e_2 和 e_3 的方程分别为 $l_1(x, y) = 0$, $l_2(x, y) = 0$ 和

$l_3(x,y)=0$，其中假定线性多项式 $l_i(x,y)$ $(i=1,2,3)$ 满足条件 $l_i(v_i)>0$ $(i=1,2,3)$。

定义 5.15 设三角形单元 $T\in\Delta$，$\{v_q\}$ 是 T 上的结点组，对任一结点 v_q，构造有理函数

$$w_q(x,y)=\frac{F_q(x,y)\cdot R_q(x,y)}{Q_q(x,y)}. \tag{5.62}$$

称有理函数族 $\{w_q(x,y)\}$ 为 C^μ 广义楔函数族，如果它们满足：

a) 当 v_q 为顶点 $v_s(v_s:=v_{s+3})$ 时，

i) $D^r w_s(v_s)=\xi^{(s)}_{r_1r_2}$，$D^r w_s(v_{s-1})=D^r w_s(v_{s+1})=0$，

$|r|=r_1+r_2$，$|r|\leqslant\mu$，$r_1\geqslant 0$，$r_2\geqslant 0$，

ii) $D^r w_s(x,y)=0$，$|r|\leqslant\mu$，$(x,y)\in e_s$

iii) $D^r w_s(x,y)=D^r p^{(s)}_{2\mu+1}(x,y)$，$|r|\leqslant\mu$，$(x,y)\in e_{s-1}\cup e_{s+1}$，其中 $\{\xi^{(s)}_{r_1r_2}\}_{0\leqslant r_1+r_2\leqslant\mu}$ 为给定的数组，$p^{(s)}_{2\mu+1}(x,y)\in \mathbf{P}_{2\mu+1}$；$s=1,2,3$ 均为 $2\mu+1$ 次多项式；

b) 当 v_q 为边结点 $v^{(s)}_{k,l}(k=1,2,\cdots,\mu,l=1,2,\cdots,k)$ 时，

i) $\dfrac{\partial^k}{\partial n^k}w_q(v^{(s)}_{k'l'})=\delta^{kk'}_{ll'}$

$$=\begin{cases}1 & l'=l,\ k'=k \qquad k'=1,2,\cdots,\mu,\\ 0 & l'\neq l \text{ 或 } k'\neq k,\quad l'=1,2,\cdots,k',\end{cases}$$

ii) $D^r w_q(x,y)=0$，$|r|\leqslant\mu$，$(x,y)\in e_{s-1}\cup e_{s+1}$，

iii) $D^r w_q(x,y)=D^r \bar{p}^{(s)}_{2\mu+1}(x,y)$，$|r|\leqslant\mu$，$(x,y)\in e_s$，

其中 $\bar{p}^{(s)}_{2\mu+1}(x,y)\in\mathbf{P}_s$，$s=1,2,3$ 均为 $2\mu+1$ 次多项式。C^μ 广义楔函数族常记为 $\{w^{(s)}_{r_1r_2}(x,y)$，$0\leqslant r_1+r_2\leqslant\mu$，$w^{(s)}_{k,l}(x,y)$，$k=1,2,\cdots,\mu$，$l=1,2,\cdots,k\}$。类似于前两节，$F_q(x,y)$，$R_q(x,y)$ 和 $Q_q(x,y)$ 分别称为相应于结点 v_q 的相对元素，相邻元素和伴随元素。

以下讨论三角剖分 Δ 上 C^μ 广义楔函数的存在性和构造方法。

当结点 v_q 为顶点 v_s 时，根据 C^μ 广义楔函数的表达式(5.62)以及 ii) 知，只须选取与其相应的相对元素

$$F_s(x,y)=(l_s(x,y))^{\mu+1},$$

根据条件 i) 和 iii)，

$$D^r w_s(x,y) = D^r p_{2\mu+1}^{(s)}(x,y),\ |r| \leqslant \mu,\ (x,y) \in e_{s-1} \cup e_{s+1}.$$

而当 $r=(0,0)$ 时，由于

$$\frac{l_s^{\mu+1}(x,y) \cdot R_s(x,y)}{Q_s(x,y)} = p_{2\mu+1}^{(s)}(x,y),\ (x,y) \in e_{s-1} \cup e_{s+1},$$

所以在 $e_{s-1} \cup e_{s+1}$ 上，恒有

$$l_s^{\mu+1}(x,y) R_s(x,y) - p_{2\mu+1}^{(s)}(x,y) Q_s(x,y) = 0. \tag{5.63}$$

根据 Bezout 定理，代数曲线(5.63)以 e_{s-1} 和 e_{s+1} 为其分量．亦即必存在 $\widetilde{G}_s(x,y) \in \mathbf{P}_{m-2}$，其中 m 为 $w_q(x,y)$ 分子的最高次数，使得

$$\begin{aligned} & l_s^{\mu+1}(x,y) R_s(x,y) - p_{2\mu+1}^{(s)}(x,y) Q_s(x,y) \\ & \quad + l_{s-1}(x,y) l_{s+1}(x,y) \widetilde{G}_s(x,y) = 0. \end{aligned} \tag{5.64}$$

在 $|r|=1$ 时，也可作相应的讨论，从而

$$\begin{aligned} & l_s^{\mu+1} \cdot R_s(x,y) - p_{2\mu+1}^{(s)} \cdot Q_s(x,y) + l_{s-1}^2 \cdot l_{s+1}^2 \widetilde{\widetilde{G}}_s(x,y) \\ & \quad = 0, \end{aligned} \tag{5.65}$$

其中 $\widetilde{\widetilde{G}}_s(x,y) \in \mathbf{P}_{m-4}$．事实上，由假设条件知

$$D\left(\frac{l_s^{\mu+1} \cdot R_s(x,y)}{Q_s(x,y)}\right) = D p_{2\mu+1}^{(s)}(x,y),\ (x,y) \in e_{s-1} \cup e_{s+1},$$

即

$$\begin{aligned} & Q_s(x,y) \cdot [D(l_s^{\mu+1}) \cdot R_s(x,y) + l_s^{\mu+1} \cdot D R_s(x,y)] \\ & \quad - l_s^{\mu+1} \cdot R_s(x,y) \cdot D Q_s(x,y) \\ & \quad = Q_s^2(x,y) \cdot D(p_{2\mu+1}^{(s)}(x,y)),\ (x,y) \in e_{s-1} \cup e_{s+1}. \end{aligned}$$

由(5.64)，

$$\begin{aligned} & D(l_s^{\mu+1}) \cdot R_s(x,y) + l_s^{\mu+1} \cdot D R_s(x,y) - Q_s(x,y) \cdot D p_{2\mu+1}^{(s)}(x,y) \\ & \quad - p_{2\mu+1}^{(s)}(x,y) - D Q_s(x,y) + D(l_{s-1} \cdot l_{s+1}) \cdot \widetilde{G}_s(x,y) \\ & \quad + l_{s-1} l_{s+1} \cdot D(\widetilde{G}_s(x,y)) = 0. \end{aligned}$$

因此不难得到在 e_2 和 e_3 上，恒有 $\widetilde{G}(x,y)=0$．所以 $\widetilde{G}_s((x,y)$ 含有因子 $l_{s-1}(x,y) \cdot l_{s+1}(x,y)$．于是(5.64)可写成(5.65)的形式．

类似地，相应于 v_s 的相邻元素与伴随元素满足

$$l_s^{\mu+1} \cdot R_s(x,y) - p_{2\mu+1}^{(s)}(x,y) \cdot Q_s(x,y)$$

$$+ l_{i-1}^{\mu+1} \cdot l_{i+1}^{\mu+1} \cdot G_i(x,y) = 0, \tag{5.66}$$

其中 $G_i(x,y) \in \mathrm{P}_{m-2(\mu+1)}$. 方程(5.66)称为相应于结点 v_i 的协调方程.

为使 $w_i(x, y)$ 满足插值条件 i), 选取 $p_{2\mu+1}^{(i)}(x,y)$ 为满足下面插值条件的多项式

i) $D^r p_{2\mu+1}^{(i)}(v_i) = \xi_{r_1 r_2}^{(i)}$, $D^r p_{2\mu+1}^{(i)}(v_{i+1}) = D^r p_{2\mu+1}^{(i)}(v_{i+1}) = 0$,

$$r = (r_1, r_2), \ |r| = r_1 + r_2, \ |r| \leqslant \mu, \tag{5.67}$$

ii) $\dfrac{\partial^k}{\partial n^k} p_{2\mu+1}^{(i)}(v_{k,l}^{(i+1)}) = 0, k = 1, 2, \cdots, \mu, l = 1, 2, \cdots, k.$

当结点 v_q 为边结点 $v_{k,l}^{(i)}$ 时. 可选取其相对元素为

$$F_{k,l}^{(i)}(x,y) = l_{i-1}^{\mu+1}(x,y) \cdot l_{i+1}^{\mu+1}(x,y).$$

类似于顶点情形的讨论, 可推断相应于结点 $v_{k,l}^{(i)}$ 的相邻元素和相对元素满足方程

$$l_{i-1}^{\mu+1} \cdot l_{i+1}^{\mu+1} \cdot R_{k,l}^{(i)}(x,y) - \bar{p}_{2\mu+1}^{(i)}(x,y) \cdot Q_{k,l}^{(i)}(x,y)$$
$$+ l_i^{\mu+1} \cdot \bar{G}_{k,l}^{(i)} = 0, \tag{5.68}$$

其中 $\bar{p}_{2\mu+1}^{(i)}(x,y) \in \mathrm{P}_{2\mu+1}$ 是满足条件

i) $D^r \bar{p}_{2\mu+1}^{(i)}(v_{i-1}) = D^r \bar{p}_{2\mu+1}^{(i)}(v_{i+1}) = 0$,

$$r = (r_1, r_2), \ |r| = r_1 + r_2, \ |r| \leqslant \mu,$$

ii) $\dfrac{\partial^k}{\partial n^k} \bar{p}_{2\mu+1}^{(i)}(v_{k',l'}^{(i)}) = \delta_{k l}^{k' l'}$

$$= \begin{cases} 1 & k' = k, \ l' = k \qquad k' = 1, 2, \cdots, \mu \\ 0 & k' \neq k \text{ 或 } l' \neq l, \ \ l' = 1, 2, \cdots, k' \end{cases}$$

的 $2\mu + 1$ 次多项式,而 $\bar{G}_{k,l}^{(i)}(x,y) \in \mathrm{P}_{m-(\mu+1)}$. 称(5.68)为相应于边结点 $v_{k,l}^{(i)}$ 的协调方程.

类似于定理 5.5 的讨论,可以断言寻求满足一结点处的 C^μ 广义楔函数与求解与其相应的协调的不可约非零解组是等价的. 以下讨论协调方程(5.66)和(5.68)的解法.

不难验证,对于协调方程(5.66)(或 (5.68)) 的一组解 $(R_i(x, y), Q_i(x,y), G_i(x,y)$ (或 $(R_{k,l}^{(i)}(x,y), Q_{k,l}^{(i)}(x,y), \bar{G}_{k,l}^{(i)}(x,y))$ 存在公因子的充分必要条件是 $R_i(x,y)$ 和 $Q_i(x,y)$ (或 $R_{k,l}^{(i)}(x,y)$

和 $Q^{(i)}_{i,i}(x,y)$）是可约的. 因此，为求得满足定义 5.15 的最简形式的 C^μ 广义楔函数，只须解出相应的协调方程的不可约非零解.

为求得协调方程(5.66)的通解，先介绍下面几个引理.

引理 5.16 满足插值条件(5.67)的 $2\mu+1$ 次多项式 $p^{(i)}_{2\mu+1}(x,y)$ 可表为

$$p^{(i)}_{2\mu+1}(x,y)=l_i^{\mu+1}\cdot\bar{p}^{(i)}_{\mu}(x,y)+l_1l_2l_3p^{(i)}_{2(\mu-1)}(x,y). \quad (5.69)$$

证明 设 $\bar{p}^{(i)}_{2\mu+1}(x,y)\in\mathbf{P}_{2\mu+1}$ 由条件

$$D^r[l_i^{\mu+1}(x,y)\cdot\bar{p}^{(i)}_{\mu}(x,y)]|_{v_i}=\xi^{(i)}_{r_1r_2},$$

$$r=(r_1,r_2),\ |r|=r_1+r_2,\ |r|\leqslant\mu$$

所唯一决定，令

$$\tilde{p}^{(i)}_{2\mu+1}(x,y)=p^{(i)}_{2\mu+1}(x,y)-l_i^{\mu+1}(x,y)\cdot\bar{p}^{(i)}_{\mu}(x,y),$$

则容易证明 $v_i(i=1,2,3)$ 是代数曲线 $\tilde{p}^{(i)}_{2\mu+1}(x,y)=0$ 的 $\mu+1$ 重零点。因而 $\tilde{p}^{(i)}_{2\mu+1}(x,y)=0$ 与直线 $l_i(x,y)=0$ 共有 $2\mu+2$ 个公共零点. 根据 Bezout 定理和 $l_i(x,y)$ 的不可约性，即知 $\tilde{p}^{(i)}_{2\mu+1}(x,y)$ 含有因子 $l_1(x,y)l_2(x,y)l_3(x,y)$. 即存在 $p^{(i)}_{2(\mu-1)}(x,y)\in\mathbf{P}_{2(\mu-1)}$，使得 $\tilde{p}^{(i)}_{2\mu+1}(x,y)=l_1\cdot l_2\cdot l_3\cdot p^{(i)}_{2(\mu-1)}(x,y)$. □

引理 5.17 引理 5.16 中的多项式 $p^{(i)}_{2(\mu-1)}(x,y)\in\mathbf{P}_{2(\mu-1)}$ 可表为

$$p^{(i)}_{2(\mu-1)}(x,y)=l_i^{\mu-1}\cdot\tilde{p}^{(i)}_{\mu-1}(x,y)+l_{i-1}\cdot l_{i+1}\cdot p^{(i)}_{2(\mu-2)}(x,y).$$

(5.70)

证明 事实上，引理 5.16 中的 $p^{(i)}_{2(\mu-1)}(x,y)$ 满足下面的插值条件

$$D^r p^{(i)}_{2(\mu-1)}(v_i)=0,\ |r|\leqslant\mu-2,\ i=1,2,3.$$

设 $\tilde{p}^{(i)}_{\mu-1}(x,y)\in\mathbf{P}_{\mu-1}$ 是被下面条件

$$D^r(l_i^{\mu-1}\cdot\tilde{p}^{(i)}_{\mu-1}(x,y))|_{v_i}=D^r p^{(i)}_{2(\mu-1)}(v_i),\ |r|\leqslant\mu-1$$

所唯一确定的 $\mu-1$ 次多项式. 则顶点 v_i 是代数曲线

$$\bar{p}^{(i)}_{2(\mu-1)}(x,y):=p^{(i)}_{2(\mu-1)}(x,y)-l_i^{\mu-1}\cdot\tilde{p}^{(i)}_{\mu-1}(x,y)=0$$

的 μ 重零点. 又可证明，v_{i-1} 和 v_{i+1} 也都是 $\bar{p}^{(i)}_{2(\mu-1)}(x,y)=0$ 的 $\mu-1$ 重零点. 于是直线 $l_{i-1}(x,y)=0$ 和 $l_{i+1}(x,y)=0$ 均与曲线 $\bar{p}^{(i)}_{2(\mu-1)}(x,y)=0$ 有 $2\mu-1$ 个公共零点(包括重数). 从而

$\bar{p}^{(s)}_{2(\mu-1)}(x,y)$ 含有因子 $l_{s-1}\cdot l_s$. □

一般地

引理 5.18 多项式 $p^{(s)}_{2(\mu-k)}(x,y)\in \mathbf{P}_{2(\mu-k)}$ 恒可表为

$$p^{(s)}_{2(\mu-k)}(x,y)=l_s^{\mu-k}\cdot \bar{p}^{(s)}_{\mu-k}(x,y)+l_{s-1}\cdot l_{s+1}p^{(s)}_{2(\mu-k-1)}(x,y),$$
$$k=1,2,\cdots,\mu-1. \tag{5.71}$$

利用引理 5.16，将 $p^{(s)}_{2\mu+1}(x,y)$ 的表达式(5.69)代入方程(5.66)，并利用多项式整除理论，可知

$$l_s^\mu\cdot R_s(x,y)-(l_s^\mu\cdot \bar{p}^{(s)}_\mu(x,y)+l_{s-1}\cdot l_{s+1}p^{(s)}_{2(\mu-1)}(x,y))$$
$$\cdot Q_s(x,y)+l_{s-1}^{\mu+1}\cdot l_{s+1}^{\mu+1}\cdot G_s^{(1)}(x,y)=0.$$

经整理得

$$l_s^\mu\cdot(R_s(x,y)-\bar{p}^{(s)}_\mu(x,y)\cdot Q_s(x,y))$$
$$=l_{s-1}l_{s+1}(p^{(s)}_{2(\mu-1)}(x,y)Q_s(x,y)-l_{s-1}^\mu\cdot l_{s+1}^\mu\cdot G_s^{(1)}(x,y)).$$

由多项式的整除性理论，存在非零多项式 $H_s(x,y)\in \mathbf{P}_{m-\mu-3}$，使得

$$R_s(x,y)-\bar{p}^{(s)}_\mu(x,y)\cdot Q_s(x,y)=l_{s-1}l_{s+1}\cdot H_s(x,y), \tag{5.72}$$

$$p^{(s)}_{2(\mu-1)}(x,y)\cdot Q_s(x,y)-l_{s-1}^\mu\cdot l_{s+1}^\mu\cdot G_s^{(1)}(x,y)$$
$$=l_s^\mu\cdot H_s(x,y), \tag{5.73}$$

这里 m 是协调方程(5.66)和(5.68)左端的最高次数. 由(5.72)和(5.73)知，只要求得 $Q_s(x,y)$, $G_s^{(1)}(x,y)$ 和 $H_s(x,y)$ 便可以求出 $R_s(x,y)$ 了，结合引理 5.17，将 $p^{(s)}_{2(\mu-1)}(x,y)$ 的表达式代入(5.73)，经整理得

$$l_{s-1}\cdot l_{s+1}(p^{(s)}_{2(\mu-1)}(x,y)Q_s(x,y)-l_{s-1}^\mu l_{s+1}^\mu G_s(x,y))$$
$$=l_s^{\mu-1}(l_s\cdot H_s(x,y)-\bar{p}^{(s)}_{\mu-1}(x,y)\cdot Q_s(x,y)). \tag{5.74}$$

因而存在一非零多项式 $S_s(x,y)\in \mathbf{P}_{m-\mu-4}$，使得

$$l_s\cdot H_s(x,y)-\bar{p}^{(s)}_{\mu-1}(x,y)Q_s(x,y)=l_{s-1}l_{s+1}\cdot S_s(x,y), \tag{5.75}$$

$$p^{(s)}_{2(\mu-2)}(x,y)Q_s(x,y)-l_{s-1}^{\mu-1}l_{s+1}^{\mu-1}G_s(x,y)=l_s^{\mu-1}\cdot S_s(x,y). \tag{5.76}$$

再将引理 5.18 中的 $p^{(s)}_{2(\mu-2)}(x,y)$ 的表达式代入(5.76)，重复上面的讨论过程，必将在有限步内求得 $Q_s(x,y)$ 的表达式. 然后逆转上述过程，便可最终得到 $R_s(x,y)$ 的表达式.

对于边结点情形. 因为协调方程(5.68)中的多项式 $\bar{p}^{(s)}_{2\mu+1}(x,y)\in \mathbf{P}_{2\mu+1}$，在形式上也有类似于引理 5.15—5.17 的结论，所以可

以通过类似的讨论得到相应协调方程的非零解组。

假定已求得协调方程(5.66)(和(5.68))的一组不可约非零解 $R_t(x,y), Q_t(x,y), G_t(x,y)$(和 $R_{k,l}^{(t)}(x,y)$, $Q_{k,l}^{(t)}(x,y)$, $\bar{G}_{k,l}^{(t)}(x,y)$, 则函数

$$W_t(x,y)=\frac{l_t^{\mu+1}\cdot R_t(x,y)}{Q_t(x,y)},$$

$$W_{k,l}^{(t)}(x,y)=\frac{l_{t-1}^{\mu+1}l_{t+1}^{\mu+1}\cdot R_{k,l}^{(t)}(x,y)}{Q_{k,l}^{(t)}(x,y)} \tag{5.77}$$

必为满足定义 5.14 的 C^μ 广义楔函数.

值得注意的是(5.77)式在 T 的顶点处的函数值以及各阶偏导数值出现 $\frac{0}{0}$ 型的不定型,这时可以用 $p_{2\mu+1}^{(t)}(x,y)$ 及 $\bar{p}_{2\mu+1}^{(t)}(x,y)$ 在该顶点处的相应值来代替它们即可。

设 $\{w_{r_1r_2}^{(t)}(x,y),\ 0\leqslant|\boldsymbol{r}|\leqslant\mu,\ w_{k,l}^{(t)}(x,y),\ k=1,2,\cdots,\mu,\ l=1,2,\cdots,k\}_{t=1}^{3}$ 是三角形单元 T 上记 $\{\xi_{r_1r_2}^{(t)}\}_{0\leqslant r_1+r_2\leqslant\mu}$ 取遍 $\{\overbrace{1,0,\cdots,0}^{\mu(\mu+1)/2\text{ 个}}\}$的所有排列而得到的标准 C^μ 广义楔函数族, $f(x,y)\in C^\mu(\Omega)$. 定义插值算子

$$\begin{aligned}R(f;x,y)=\sum_{t=1}^{3}\Big\{&\sum_{0\leqslant r_1+r_2\leqslant\mu}\frac{\partial^{r_1+r_2}}{\partial x^{r_1}\partial y^{r_2}}f(\nu_t)w_{r_1r_2}^{(t)}(x,y)\\&+\sum_{k=1}^{\mu}\sum_{l=1}^{k}\Big[\frac{\partial^k}{\partial n^k}f(\nu_{k,l}^{(t)})-\sum_{0\leqslant r_1+r_2\leqslant\mu}\frac{\partial^{r_1+r_2}}{\partial x^{r_1}\partial y^{r_2}}f(\nu_t)\\&\cdot\frac{\partial^k}{\partial n^k}w_{r_1r_2}^{(t)}(\nu_{k,l}^{(t+1)})\Big]\cdot w_{k,l}^{(t)}(x,y)\Big\},\quad(x,y)\in T.\end{aligned} \tag{5.78}$$

由 C^μ 广义楔函数族的性质,可直接验证下面的插值性质

$$\frac{\partial^{|\boldsymbol{r}|}}{\partial x^{r_1}\partial y^{r_2}}R(f;\nu_t)=\frac{\partial^{|\boldsymbol{r}|}}{\partial x^{r_1}\partial y^{r_2}}f(\nu_t),$$

$$\boldsymbol{r}=(r_1,r_2),\ |\boldsymbol{r}|=r_1+r_2,\ |\boldsymbol{r}|\leqslant\mu,$$

$$\frac{\partial^k}{\partial n^k}R(f;\nu_{k,l}^{(t)})=\frac{\partial^k}{\partial n^k}f(\nu_{k,l}^{(t)}),$$

$$k=1,2,\cdots,\mu,\ l=1,2,\cdots,k,\ s=1,2,3. \tag{5.79}$$

定理5.19 设 $\Omega\subset R^2$ 为多边形区域，Δ是Ω的任意的三角剖分，且 $f(x,y)\in C^{\mu}(\Omega)$. 若在$\Delta$中的每一单元上构造形如(5.78)的插值有理函数，则 $R(f;x,y)\in C^{\mu}(\Omega)$.

证明 假定 T_1 和 T_2 是三角剖分Δ中的两个相邻单元，其公共边为 $e:l(x,y)=0$, 而 $v^1=(x^{(1)},y^{(1)})$ 和 $v^2=(x^{(2)},y^{(2)})$ 是 e 的两个端点，记

$$R(x,y)=R(f;x,y)|_{T_1}-R(f;x,y)|_{T_2}.$$

往证在 e 上

$$D^{r}R(x,y)=0,\ |r|\leqslant\mu. \tag{5.80}$$

因为 $\partial^{|r|}R(x,y)/\partial x^{r_1}\partial y^{r_2}$ ($|r|=r_1+r_2$) 可由下面 $|r|+1$ 个方向导数线性表出

$$\frac{\partial^{|r|}R(x,y)}{\partial n^{|r|}},\frac{\partial^{|r|}R(x,y)}{\partial n^{|r|-1}\partial\tau},\cdots,\frac{\partial^{|r|}R(x,y)}{\partial n\partial\tau^{|r|-1}},\frac{\partial^{|r|}R(x,y)}{\partial\tau^{|r|}},$$

其中 $\partial/\partial n$ 和 $\partial/\partial\tau$ 分别表示沿 e 方向的法向导数和方向导数.这样，只需证明，在 e 上

$$\frac{\partial^{|r|}}{\partial n^{r_1}\partial\tau^{r_2}}R(x,y)=0,\ r_1,r_2=0,1,\cdots,\mu,\ |r|=r_1+r_2\leqslant\mu. \tag{5.81}$$

由 C^{μ} 广义楔函数及其各阶偏导数在单元的边界上表现为相应的多项式的性质可知

$$D^{r}R(x,y)=D^{r}g_{2\mu+1}(x,y),\ |r|\leqslant\mu,\ (x,y)\in e,$$

其中 $g_{2\mu+1}(x,y)\in P_{2\mu+1}$ 是在 e 的两端点和 e 上边结点处满足齐次插值条件的 $2\mu+1$ 次多项式. 设

$$\tilde g_{\alpha}(t)=\frac{\partial^{\alpha}}{\partial n^{\alpha}}R(x,y)|_{e}=\frac{\partial^{\alpha}}{\partial n^{\alpha}}g_{2\mu+1}(x,y)|_{e}$$

$$=\frac{\partial^{\alpha}}{\partial n^{\alpha}}g_{2\mu+1}(x^{(1)}+(x^{(2)}-x^{(1)})t,y^{(1)}+(y^{(2)}-y^{(1)})t),$$

此处 $t\in[0,1]$, $\alpha=1,2,\cdots,\mu$. 由定理的假设及 C^{μ} 广义楔函数的性质，易知 $\tilde g_{\alpha}(t)$ 为 $2\mu+1-\alpha$ 次多项式且满足

$$\frac{d^\beta}{dt^\beta}\tilde{g}_\alpha(0)=\frac{d^\beta}{dt^\beta}\tilde{g}_\alpha(1)=g_\alpha(t_1)=\cdots=g_\alpha(t_\alpha)=0 \quad (5.82)$$

其中 $\beta=0,1,\cdots,\mu-\alpha$, $0<t_1<t_2<\cdots<t_\alpha<1$。因此必有 $\tilde{g}_\alpha(t)\equiv 0$ $(\alpha=1,2,\cdots,\mu)$。由此得到

$$\frac{d^j}{dt^j}\tilde{g}_\alpha(t)\equiv 0,\ j=1,2,\cdots. \qquad \square$$

定理 5.20 平面多边形区域 $\Omega\subset R^2$ 的三角剖分 Δ 上的 C^μ 插值有理样条函数类的最少自由度是 $\binom{\mu+2}{2}\cdot N_v+\binom{\mu+1}{2}N_E$，其中 N_v 和 N_E 分别是剖分 Δ 的顶点和网线的个数。

下面的表格列出对相同光滑度的 Zenisek 元[136]、加细分片多项式元[150]和有理元的最少自由度之间的大、小关系。

μ	$\dim S^\mu_{4\mu+1}(T)$ Zenisek 元	$\dim S^\mu_{\mu+1}(T^*)$ 加细元	$\dim RS^\mu(T)$ 有理元
1	21	12	12
2	55	28	27
3	105	51	48
…	…	…	…
μ	$8\mu^2+10\mu+3$	$\frac{7}{2}\mu^2+\frac{11}{2}\mu+3$	$3\mu^2+6\mu+3$

图 5.13

§5. 正则四边形剖分上的插值有理样条

设 $\Omega\subset R^2$ 是平面上有界的单连通或多连通多边形区域。若 τ 为 Ω 的仅由凸四边形胞腔组成的剖分，而且 τ 中四边形胞腔的各边界内部没有其它的顶点，则称 τ 为 Ω 的正则四边形剖分，可进行四边形剖分的多边形区域称为可正则四边形剖分的区域，以下恒假定多边形区域 Ω 是可正则四边形剖分的，且 τ 为 Ω 的正则四边形剖分。τ 的顶点、网线和四边形胞腔集合分别记为 $V=\{v_i: i=1,2\cdots N_v\}$，$E=\{e_j:j=1,2,\cdots,N_E\}$ 和 $\tau=\{\tau_k:k=1,$

$2,\cdots,N_e\}$. 为讨论方便,仅以具有1阶光滑度的情形加以详细介绍.

选择结点组. 先将 τ 的所有顶点 V 均选作结点. 再在每一网线的内部选取一点作为结点,称之为边结点.第 i 条网线上的边结点记为 $\hat{v}_i$. 这两类结点便构成 τ 上的 C^1 有理样条函数的结点组.

5.1. 四边形单元上 C^1 广义楔函数

设 $T_s \in \tau$ 的顶点为 $v_i(i=1,2,3,4)$, 边界 $e_i:l_i(x,y)=0$ 上的边结点为 $\hat{v}_i(i=1,2,3,4)$. 选择线性形式 $l_i(x,y)$ 的符号, 使对 T_s 之内部的点 (x_0,y_0), 有 $l_i(x_0,y_0)>0$, $i=1,2,3,4$ (见图 5.14a).

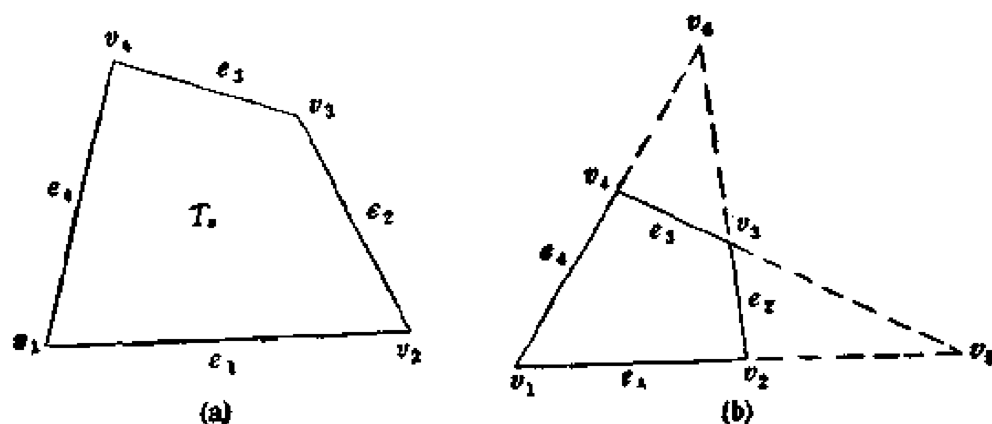


图 5.14

定义 5.21 对 T_s 上的任一结点 v_q,构造与之相应的有理函数

$$w_q(x,y)=\frac{F^{v_q}(x,y)\cdot R^{v_q}(x,y)}{Q(x,y)}.$$

称有理函数族 $\{w_q(x,y)\}$ 为 C^1 广义楔函数族, 如果它们满足

a)当 v_q 为顶点,例如为 v_i 时,有

1) $D^r w_i(v_i)=\xi^{(i)}_{r_1r_2}$, $D^r w_i(v_j)=0, j=i+1,i+2,i+3$, $|r|\leqslant 1$,

2) $D^r w_i(x,y)=0$, $|r|\leqslant 1$, $(x,y)\in e_{i+1}\cup e_{i+2}$,

3) $D^r w_i(x,y)=D^r p^{(i)}_i(x,y)$, $(x,y)\in e_i$,

$D^r w_i(x,y)=D^r \bar{p}^{(i)}_i(x,y)$, $(x,y)\in e_{i+3}$, $|r|\leqslant 1$,

其中 $p_3^{(i)}(x,y)$，$\bar{p}_3^{(i)}(x,y)\in \mathrm{P}_3$ 是两个特定的多项式；

b）当 ν_q 为边结点，例如为 $\hat{\nu}_i$ 时，有

4）$\frac{\partial}{\partial n}\hat{\phi}_i(\hat{\nu}_i)=1$，

5）$D^r\hat{\phi}_i(x,y)=0$，$|r|\leqslant 1$，$(x,y)\in e_{i+1}\cup e_{i+2}\cup e_{i+3}$，

6）$D^r\hat{\phi}_i(x,y)=D^r\bar{p}_3^{(i)}(x,y)$，$|r|\leqslant 1$，$(x,y)\in e_i$，

其中 $\bar{p}_3^{(i)}(x,y)\in \mathrm{P}_3$ 是某一特定的多项式． 而约定 $\nu_{i+4}:=\nu_i$，$e_{i+4}:=e_i$，$i=1,2,3,4$

特别地，如果 $\{\xi_{00},\xi_{10},\xi_{01}\}$ 选自 $\{1,0,0\}$ 的某一排列，则称相应的广义楔函数为 T_t 上的标准 C^1 广义楔函数．

定义 5.21 中，将因子 $F^{\nu_q}(x,y)$，$R^{\nu_q}(x,y)$ 和 $Q(x,y)$ 分别称为相应于结点 ν_q 的相对元素，相邻元素和单元 T_t 的伴随元素．

假定凸四边形单元 T_t 的任何两边都不平行．记 e_1 和 e_3 的延长线的交点为 ν_5，e_2 和 e_4 的延长线的交点为 ν_6（见图 5.14b）． 下面进一步分析 C^1 广义楔函数所应满足的性质．

a）当结点为顶点，例如为 ν_i 时，由条件 2)，选取

$$F_i(x,y)=l_{i+1}^2(x,y)\cdot l_{i+2}^2(x,y):=l_{i+1}^2\cdot l_{i+2}^2,$$

为书写方便用 $F_i(x,y)$ 表示 $F^{\nu_i}(x,y)$．由条件 3) 知，在 e_i 上

$$\frac{l_{i+1}^2 l_{i+2}^2\cdot R_i(x,y)}{Q(x,y)}=p_3^{(i)}(x,y), \tag{5.83}$$

$$D\left(\frac{l_{i+1}^2 l_{i+2}^2\cdot R_i(x,y)}{Q(x,y)}\right)=Dp_3^{(i)}(x,y), \tag{5.84}$$

在 e_{i+3} 上

$$\frac{l_{i+1}^2 l_{i+2}^2\cdot R_i(x,y)}{Q(x,y)}=\bar{p}_3^{(i)}(x,y), \tag{5.85}$$

$$D\left(\frac{l_{i+1}^2 l_{i+2}^2\cdot R_i(x,y)}{Q(x,y)}\right)=D\bar{p}_3^{(i)}(x,y). \tag{5.86}$$

关系式(5.83)表明，当 $(x,y)\in e_i$ 时，恒有

$$l_{i+1}^2 l_{i+2}^2\cdot R_i(x,y)-p_3^{(i)}(x,y)\cdot Q(x,y)=0.$$

利用 Bezout 定理,存在一多项式 $\hat{G}_i(x,y)$,使得

$$l_{i+1}^2 l_{i+2}^2 \cdot R_i(x,y) - p_3^{(i)}(x,y)Q(x,y) + l_i \cdot \hat{G}_i(x,y) \equiv 0. \tag{5.87}$$

两边同时用偏微分算子D作用,得到

$$D(l_{i+1}^2 \cdot l_{i+2}^2 \cdot R_i(x,y)) - p_3^{(i)}(x,y) \cdot DQ(x,y) - Q(x,y) \cdot Dp_3^{(i)}(x,y) - l_i \cdot D\hat{G}_i(x,y) - \hat{G}_i(x,y) \cdot Dl_i \equiv 0.$$

利用(5.84)式,可知当 $(x,y) \in e_i$ 时,$\hat{G}_i(x,y) = 0$. 再次利用 Bezout 定理,存在一多项式 $G_i(x,y)$,满足

$$\hat{G}_i(x,y) = l_i G_i(x,y).$$

将上式代入(5.87),便得

$$l_{i+1}^2 \cdot l_{i+2}^2 \cdot R_i(x,y) - p_3^{(i)}(x,y)Q(x,y) + l_i^2 \cdot G_i(x,y) \equiv 0.$$

类似地,可知 $R_i(x,y)$ 和 $Q(x,y)$ 也满足方程

$$l_{i+1}^2 \cdot l_{i+2}^2 \cdot R_i(x,y) - p_3^{(i)}(x,y)Q(x,y) + l_{i+3}^2 \cdot \bar{G}_i(x,y) \equiv 0,$$

其中 $\bar{G}_i(x,y)$ 为多项式.

为使定义 5.21 中的条件 1) 得以满足,只要选取 $p_3^{(i)}(x,y)$ 和 $\bar{p}_3^{(i)}(x,y)$ 为分别满足下述条件的 3 次多项式,当 $i = 1, 3$ 时,取 $t = 6$, $t' = 5$; $i = 2,4$ 时,取 $t = 5$, $t' = 6$,

$$D^r p_3^{(i)}(v_i) = \xi_{r_1 r_2}^{(i)},\ D^r p_3^{(i)}(v_{i+1}) = D^r p_3^{(i)}(v_t) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial n} p_3^{(i)}(\hat{v}_i) = 0,\ |r| \leqslant 1 \tag{5.88}$$

和

$$D^r \bar{p}_3^{(i)}(v_i) = \xi_{r_1 r_2}^{(i)},\ D^r \bar{p}_3^{(i)}(v_{i+2}) = D^r \bar{p}_3^{(i)}(v_{t'}) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial n} \bar{p}_3^{(i)}(\hat{v}_{i+3}) = 0,\ |r| \leqslant 1. \tag{5.89}$$

综上所述,如果存在满足定义 5.21 中相应于顶点 v_i 的 C^1 广义楔函数,则相应于 v_i 的相对元素 $F_i(x,y)$,相邻元素 $R_i(x,y)$ 和(单元的)伴随元素 $Q(x,y)$ 必然满足

$$l_{i+1}^2 \cdot l_{i+2}^2 \cdot R_i(x,y) - p_3^{(i)}(x,y)Q(x,y) + l_i^2 \cdot G_i(x,y)$$

$$\equiv 0, \tag{5.90}$$

$$l_{i+1}^2 \cdot l_{i+2}^2 \cdot R_i(x,y) - \bar{p}_3^{(i)}(x,y)Q(x,y) + l_{i+3}^2\bar{G}_i(x,y)$$
$$\equiv 0. \tag{5.91}$$

它们称为相应于顶点 v_i 的协调方程。

b) 当结点为边结点，例如为 $\hat{v}_i$ 时，类似地可以证明，相应的相邻元素 $\hat{R}_i(x, y)$ 必满足如下的相应于结点 $\hat{v}_i$ 的协调方程

$$l_{i+1}^2 \cdot l_{i+2}^2 \cdot l_{i+3}^2 \cdot \hat{R}_i(x,y) - \tilde{p}_3^{(i)}(x,y) \cdot Q(x,y)$$
$$+ l_i^2 \cdot \tilde{G}_i(x,y) \equiv 0, \tag{5.92}$$

其中 $\tilde{G}_i((x,y)$ 为多项式，而 $\tilde{p}_3^{(i)}(x,y) \in \mathbf{P}_3$ 满足

$$D^r\tilde{p}_3^{(i)}(v_l) = 0, \ |r| \leqslant 1, \ l = i+1, i+4,$$
$$\frac{\partial}{\partial n} \tilde{p}_3^{(i)}(\hat{v}_i) = 1. \tag{5.93}$$

上面的讨论表明，若对单元 T_s 上给定的结点，存在满足定义 5.21 中条件的 C^1 广义楔函数，则与该结点相应的相邻元素和单元的伴随元素必满足形如(5.90)，(5.91)和(5.92)的协调方程。类似于定理 5.5，可以证明寻求满足定义 5.21 的 C^1 广义楔函数的问题与求相应协调方程的不可约非零解问题是等价的。

5.2. 协调方程的求解和 C^1 广义楔函数构造

以下为构造任意凸四边形上的 C^1 广义楔函数讨论相应的协调方程的解法。不失一般性，以结点 v_1 和 $\hat{v}_1$ 为例说明相应协调方程的解法。假定协调方程的次数为 m。

首先讨论相应于边结点 $\hat{v}_1$ 的协调方程(5.92)。因为满足插值条件(5.93)的 3 次多项式恒可表为下面的形式：

$$\tilde{p}_3^{(1)}(x,y) = l_1^2 \cdot \tilde{p}_1^{(1)}(x,y) + \tilde{d}_1 l_1 l_2 l_4, \tag{5.94}$$

其中 $\tilde{p}_1^{(1)}(x,y) \in \mathbf{P}_1$ 是任意 1 次多项式，常数 $\tilde{d}_1$ 由条件

$$\frac{\partial}{\partial n} \tilde{p}_3^{(1)}(\hat{v}_1) = 1$$

所决定。将(5.94)代入(5.92)($i = 1$)，得

$$l_2^2 \cdot l_3^2 \cdot l_4^2 \cdot \hat{R}_1(x,y) - (l_1^2 \cdot \tilde{p}_1^{(1)}(x,y) + \tilde{d}l_1l_2l_4) \cdot Q(x,y)$$
$$+ l_1^2 \cdot \tilde{G}_1(x,y) \equiv 0. \tag{5.95}$$

由多项式的整除性质知，$\hat{R}_1(x,y)$ 可被 $l_1(x,y)$ 整除。记

$$\hat{R}_1^*(x,y)=\hat{R}_1(x,y)/l_1(x,y),$$

由此可得

$$\begin{aligned}&l_2l_4(l_2l_3^2l_4\hat{R}_1^*(x,y)-\tilde{d}_1Q(x,y))\\&\quad=l_1\cdot(\tilde{p}_1^{(1)}(x,y)Q(x,y)-\tilde{G}_1(x,y)).\end{aligned}$$

于是存在一多项式 $h_1(x,y)\in\mathbf{P}_{m-4}$，使得

$$l_2\cdot l_3^2\cdot l_4\cdot\hat{R}_1^*(x,y)-\tilde{d}_1\cdot Q(x,y)=-l_1\cdot h_1(x,y),\quad(5.96)$$

$$\tilde{p}_1^{(1)}(x,y)\cdot Q(x,y)-\tilde{G}_1(x,y)=-l_2l_4\cdot h_1(x,y).\quad(5.97)$$

因为 $\tilde{d}_1\neq0$，所以

$$Q(x,y)=\frac{1}{\tilde{d}_1}l_2\cdot l_3^2\cdot l_4\cdot\hat{R}_1^*(x,y)+\frac{1}{\tilde{d}_1}l_1\cdot h_1(x,y).\quad(5.98)$$

结合(5.97)可知，方程(5.92)的解有下面的表现形式：

$$(l_1\cdot\hat{R}_1^*(x,y),\ Q(x,y),\ \tilde{p}_1^{(1)}(x,y)Q(x,y)+l_2\cdot l_4h_1(x,y)),\quad(5.99)$$

其中 $\hat{R}_1^*(x,y)\in\mathbf{P}_{m-7}$，$h_1(x,y)\in\mathbf{P}_{m-4}$ 是任意的非零多项式，而 $Q(x,y)$ 由(5.98)给出。

因为伴随元素 $Q(x,y)$ 是单元 T_i 上所有 C^1 广义楔函数的公共分母，所以 $Q(x,y)$ 的表达式(5.98)也应满足相应其它结点的协调方程。再根据多项式的整除理论，$Q(x,y)$ 应具有如下的形式

$$\begin{aligned}Q(x,y)=&\,l_1^2l_2^2l_4\cdot\hat{R}_3^*(x,y)+l_1l_2^2l_3\cdot\hat{R}_4^*(x,y)+l_2l_3^2l_4\\&\cdot\hat{R}_1^*(x,y)+l_1l_3l_4^2\hat{R}_2^*(x,y)+l_1l_2l_3l_4\cdot A(x,y),\quad(5.100)\end{aligned}$$

其中 $\hat{R}_i^*(x,y)\in\mathbf{P}_{m-7}$，$i=1,2,3,4$ 是任意的非零多项式，而 $A(x,y)\in\mathbf{P}_{m-7}$ 是任意的多项式。

以下，假定 $m=7$。这样(5.90)式可简写为

$$Q(x,y)=c_1l_1^2l_2l_4+c_2l_1l_2^2l_3+c_3l_2l_3^2l_4+c_4l_1l_3l_4^2+cl_1l_2l_3l_4,\quad(5.101)$$

其中 $c_i\neq0\ (i=1,2,3,4)$ 而 c 是任意的常数。

至今已经求得单元 T_i 上的伴随元素 $Q(x,y)$，因此为求得协调方程(5.90)和(5.91)的解，只须解出 $R_1(x,y)$，$G_1(x,y)$ 和 $\tilde{G}_1(x,y)$。为此，将(5.101)代人(5.90)式，得到

$$l_2^2l_3^2R_1(x,y) - p_3(x,y)(c_1l_1^2l_2l_4 + c_2l_1l_2^2l_3 + c_3l_2l_3^2l_4 + c_4l_1l_3l_4^2$$
$$+ cl_1l_2l_3l_4) + l_1^2 \cdot G_1(x,y) \equiv 0,$$

即

$$l_2l_3(l_2l_3 \cdot R_1(x,y) - p_3(x,y)(c_2l_1l_2 + c_3l_3l_4 + cl_1l_4)$$
$$\equiv l_1 \cdot (p_3(x,y)(c_1l_1l_2l_4 + c_4l_3l_4^2) - l_1 \cdot G_1(x,y)).$$

利用多项式的整除性理论，有一多项式 $s_1(x,y) \in \mathrm{P}_4$，使得

$$l_2l_3R_1(x,y) - p_3(x,y)(c_2l_1l_2 + c_3l_3l_4 + cl_1l_4)$$
$$= l_1 \cdot s_1(x,y), \tag{5.102}$$

$$p_3(x,y) \cdot (c_1l_1l_2l_4 + c_4l_3l_4^2) - l_1 \cdot G(x,y)$$
$$= l_2 \cdot l_3 \cdot s_1(x,y). \tag{5.103}$$

由(5.102)得

$$l_3 \cdot (l_2 \cdot R_1(x,y) - c_3l_4 \cdot p_3(x,y))$$
$$= l_1 \cdot (s_1(x,y) + p_3(x,y)(c_2l_2 + c_4l_4)).$$

再利用多项式的整除性理论，存在多项式 $t_1(x,y) \in \mathrm{P}_3$，使得

$$l_2 \cdot R_1(x,y) - c_3l_4p_3(x,y) = l_1 \cdot t_1(x,y), \tag{5.104}$$

$$s_1(x,y) + p_3(x,y)(c_2l_2 + c_4l_4) = l_3 \cdot t_1(x,y). \tag{5.105}$$

注意到 $p_3(x,y)$ 是满足插值条件(5.98)的多项式，因而具有形式

$$p_3(x,y) = l_2^2p_1(x,y) + d_1l_1l_2l_4, \tag{5.106}$$

其中 $p_1(x,y) \in \mathrm{P}_1$ 是由 $D^r(l_2^2 \cdot p_1(x,y))|_{v_1} = \xi^{(1)}_{r_1r_2}$，$|r| \leqslant 1$ 所决定的 1 次多项式，而 d_1 是由条件 $\frac{\partial}{\partial n}p_3(\hat{v}_1) = 0$ 所决定的常数。

将 $p_3(x,y)$ 的表达式(5.106)代入(5.104)和(5.105)，得

$$R_1(x,y) = c_3(l_2 \cdot p_1(x,y) + d_1l_1l_4)l_4 + l_1 \cdot \hat{t}_1(x,y), \tag{5.107}$$

$$s_1(x,y) = l_2l_3 \cdot \hat{t}_1(x,y) - p_3(x,y)(c_2l_2 + c_4l_4), \tag{5.108}$$

其中 $\hat{t}_1(x,y) = t(x,y)/l_2(x,y) \in \mathrm{P}_2$。结合(5.103)，可得

$$l_1(c_1l_2l_4 \cdot p_3(x,y) - G_1(x,y)) = l_3 \cdot (l_2^2l_3\hat{t}_1(x,y)$$
$$- l_2 \cdot p_3(x,y)(c_2l_2 + c_4l_4) - c_4l_4^2 \cdot p_3(x,y)).$$

于是存在多项式 $H_1(x,y) \in \mathrm{P}_4$，使得

$$l_2^2l_3 \cdot \hat{t}_1(x,y) - (c_2l_2^2 + cl_2l_4 + c_4l_4^2)p_3(x,y)$$
$$= l_1 \cdot H_1(x,y). \tag{5.109}$$

对于协调方程(5.91)作类似的讨论,可得 $R_1(x,y)$ 的另一表示

$$R_1(x,y) = c_2 l_1 l_3 \bar{p}_1(x,y) + c_2 \cdot \bar{d}_1 l_1^2 l_4 + l_4 \cdot \bar{r}(x,y), \quad (5.110)$$

其中 $\bar{r}_1(x,y) \in \mathbf{P}_2$, 而 $\bar{p}_1(x,y) \in \mathbf{P}_1$ 和常数 $\bar{d}_1$ 由表达式

$$\bar{p}_3(x,y) = l_3^2 \cdot \bar{p}_1(x,y) + \bar{d}_1 l_1 l_3 l_4$$

所确定. 由(5.107)和(5.110),可知

$$R_1(x,y) = c_3 l_2 l_4 p_1(x,y) + c_2 l_1 l_3 \bar{p}_1(x,y) + d_1 c_3 l_1 l_4^2 + \bar{d}_1 c_2 l_1^2 l_4 + l_1 l_4 \cdot L_1(x,y), \quad (5.111)$$

其中 $L_1(x,y) \in \mathbf{P}_1$, 且 $\bar{r}_1(x,y)$ 具有如下的形式

$$\bar{r}_1(x,y) = c_3 l_3 \bar{p}_1(x,y) + c_2 \bar{d}_1 l_1 l_4 + l_4 \cdot L_1(x,y).$$

根据(5.109)式,应有

$$\begin{aligned} l_2 \cdot (c_2 l_3^2 \cdot \bar{p}_1(x,y) &+ l_3 l_4 L_1(x,y) - (c_2 l_2^2 + c l_2 l_4 \\ &+ c_4 l_4^2) p_1(x,y)) = l_1 \cdot (H_1(x,y) - (d_1 l_2 l_3 l_4 \\ &+ d_1 l_4 (c_2 l_2^2 + c l_2 l_4 + c_4 l_4^2))). \end{aligned} \quad (5.112)$$

因此,为使协调方程(5.90)可解,应找到一多项式 $z_1(x,y) \in \mathbf{P}_2$, 使得

$$\begin{aligned} c_2 l_3^2 \cdot \bar{p}_1(x,y) + l_3 l_4 L_1(x,y) - (c_2 l_2^2 + c l_2 l_4 + c_4 l_4^2) p_1(x,y) \\ = l_1 \cdot z_1(x,y). \end{aligned} \quad (5.113)$$

同样地,为使协调方程(5.91)可解,应找到一多项式 $\bar{z}_1(x,y) \in \mathbf{P}_2$, 使得

$$\begin{aligned} c_3 l_2^2 p_1(x,y) + l_1 l_2 L_1(x,y) - (c_1 l_1^2 + c l_1 l_3 + c_3 l_3^2) \bar{p}_1(x,y) \\ = l_4 \cdot \bar{z}_1(x,y). \end{aligned} \quad (5.114)$$

以下命题说明,适当地选取 $c_i \neq 0$ $(i = 1,2,3,4)$ 和 c, 就可使满足(5.113)和(5.114)的多项式 $z_1(x,y)$ 和 $\bar{z}_1(x,y)$ 存在.

命题 5.22 存在常数 $c_i \neq 0$ $(i = 1,2,3,4)$, c 和 1 次多项式 $L_1(x,y)$, 使得多项式

$$\begin{aligned} f_1(x,y) = c_2 l_3^2 \cdot \bar{p}_1(x,y) &+ l_3 \cdot l_4 \cdot L_1(x,y) \\ &- (c_2 l_2^2 + c l_2 l_4 + c_4 l_4^2) p_1(x,y) \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} f_2(x,y) = c_3 l_2^2 p_1(x,y) &+ l_1 l_2 \cdot L_1(x,y) \\ &- (c_1 l_1^2 + c l_1 l_3 + c_3 l_3^2) \bar{p}_1(x,y) \end{aligned}$$

可分别被 $l_1(x,y)$ 和 $l_4(x,y)$ 所整除。

证明 因为1次多项式 $p_1(x,y)$ 和 $\bar{p}_1(x,y)$ 均满足条件

$$D^r(l_2^2 p_1(x,y))|_{v_1} = D^r(l_3^2 \cdot \bar{p}_1(x,y))|_{v_1} = \xi^{(1)}_{r_1,r_2}, |r| \leqslant 1, \quad (5.115)$$

所以有 $f_1(v_1) = f_2(v_1) = 0$。若设 $L_1(x,y)$ 满足条件

$$l_3(v_1)L_1(v_1) - cl_2(v_1)p_1(v_1) = 0. \quad (5.116)$$

则由(5.115)知，此条件等价于

$$l_2(v_1)L_1(v_1) - cl_3(v_1)\bar{p}_1(v_1) = 0.$$

因而此时

$$Df(v_1) = Df_2(v_1) = 0. \quad (5.117)$$

进一步，假定曲线 $f_1(x,y) = 0$ 和 $f_2(x,y) = 0$ 分别经过 v_2 和 v_4 点，即有

$$\{c_2 l_3^2 \bar{p}_1(x,y) - l_3 l_4 L_1(x,y) - c_4 l_4^2 p_1(x,y)\}|_{v_2} = 0 \quad (5.118)$$

和

$$\{c_3 l_2^2 p_1(x,y) - l_1 l_2 L_1(x,y) - c_1 l_1^2 \bar{p}_1(x,y)\}|_{v_4} = 0. \quad (5.119)$$

最后，假定 $c_i(i=1,2,3,4)$ 和 c 满足

$$\frac{c_2 l_2^2(v_5) + c_4 l_4^2(v_5)}{l_2(v_5)l_4(v_5)} = \frac{c_1 l_1^2(v_6) + c_3 l_3^2(v_6)}{l_1(v_6)l_3(v_6)} = -c, \quad (5.120)$$

则容易验证 $f_1(v_5) = 0$，$f_2(v_6) = 0$。容易看出，满足(5.120)的常数 $c_i \neq 0(i=1,2,3,4)$ 和 c 总是存在的，并且选定了满足(5.120)的常数 $c_i \neq 0(i=1,2,3,4)$和 c 后，1次多项式 $L_1(x,y)$ 可被条件(5.116)，(5.118)和(5.119)所唯一确定。以上这些假设说明3次代数曲线 $f_1(x,y)=0$ 和 $f_2(x,y)=0$ 分别与直线 $l_1(x,y)=0$ 和 $l_4(x,y)=0$ 交于4点(含重数在内)。由 Bezout 定理不难知道命题成立。 □

至此，我们完成了协调方程的求解。在求得协调方程的一组不可约非零解后，即可构造相应结点上的 C^1 广义楔函数。以结点 v_1 和 θ_1 为例来说明它们的构造。

相应于结点 v_1 的 C^1 广义楔函数为

$$w_1(x,y) = \frac{l_2^2 \cdot l_3^2 \cdot R_1(x,y)}{Q(x,y)}, \quad (x,y) \in \tau_r \backslash \{v_i\}_{1 \leqslant i \leqslant 4},$$

而在顶点处须补充定义

$$D^r w_1(v_1) = \xi_{r_1 r_2}^{(1)}, \ D^r w_1(v_t) = 0, \ |r| \leqslant 1, \ t = 2,3,4.$$

相应于边结点 $\hat{v}_1$ 的 C^1 广义楔函数为

$$\hat{w}_1(x,y) = \frac{\tilde{d}_1 c_3 l_1 l_2^2 l_3^2 l_4^2}{Q(x,y)}, \ (x,y) \in \tau_s \backslash \{v_i\}_{1 \leqslant i \leqslant 4}.$$

而在顶点处须补充定义

$$D^r \hat{w}_i(v_i) = 0, \ |r| \leqslant 1, \ i = 1,2,3,4.$$

在上面C^1广义楔函数的表达式中$Q(x,y)$的涵义同(5.101)，$R_1(x,y)$的涵义同(5.111)，$\tilde{d}_1$ 满足(5.94)，$c_i \neq 0$，$i = 1,2,3,4$ 和 c 为满足关系式(5.120)的常数，而 $L_1(x,y)$ 是命题 5.22 中构造的 1 次多项式. 因为表达式 $w_i(x,y)$ 是依赖于顶点处的数据 $\{\xi_{00}, \xi_{10}, \xi_{01}\}$，因此可写成 $w_i(x,y) = w_i^{(\xi_{00}^{(i)}, \xi_{10}^{(i)}, \xi_{01}^{(i)})}(x,y)$. 为明确起见，将记

$$w_i^{(1)}(x,y) = w_i^{(1,0,0)}(x,y), \ w_i^{(2)}(x,y) = w_i^{(0,1,0)}(x,y),$$
$$w_i^{(3)}(x,y) = w_i^{(0,0,1)}(x,y).$$

当四边形单元T_s是平行四边形或梯形时，v_5 和 v_6 两点中至少有一个落在无穷远直线上，故需要特殊的处理. 如果 T_s 为平行四边形，见图 5.15.

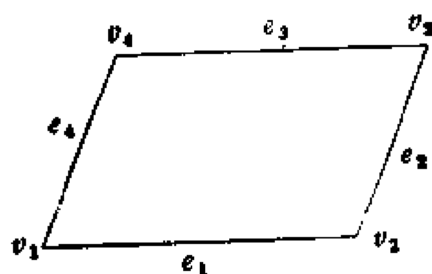


图 5.15

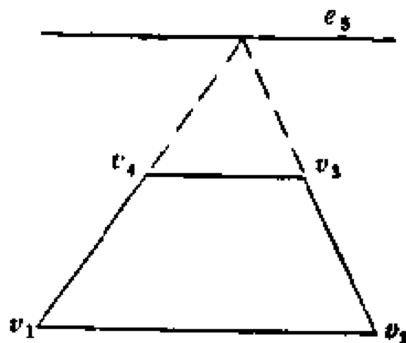


图 5.16

根据 $l_i(x,y)$ $(i = 1,2,3,4)$ 的形式，显然

$$\lim_{v_5 \to \infty} \frac{l_2(v_5)}{l_4(v_5)} = -1, \ \lim_{v_6 \to \infty} \frac{l_1(v_6)}{l_3(v_6)} = -1.$$

因此若在(5.120)式两边取极限,则 $c_i \neq 0(i=1,2,3,4)$ 和 c 应满足关系式

$$c_1 + c_3 = c_2 + c_4 = -c. \tag{5.121}$$

如果 T_t 为梯形,见图 5.16. 设 $v_6 = (x_0, y_0)$, 而 $l_2(x, y) = 0$ 和 $l_4(x,y) = 0$ 分别具有如下形式

$$l_2(x,y) = \sin\theta_2 \cdot x - \cos\theta_2 \cdot y + \cos\theta_2 \cdot y_0 - \sin\theta_2 \cdot x_0 = 0$$

和

$$l_4(x,y) = \sin\theta_4 \cdot x - \cos\theta_4 \cdot y + \cos\theta_4 \cdot y_0 - \sin\theta_4 \cdot x_0 = 0,$$

其中

$$\cos\theta_2 \cdot y_0 - \sin\theta_2 \cdot x_0 > 0, \quad \cos\theta_4 \cdot y_0 - \sin\theta_4 \cdot x_0 > 0.$$

不妨设 v_1 和 v_2 在 ox 轴上. 因为

$$\lim_{v_5 \to \infty} \frac{l_2(v_5)}{l_4(v_5)} = \frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_4},$$

所以此时 $c_i \neq 0(i=1,2,3,4)$ 和 c 应满足

$$\frac{c_2 \sin^2\theta_2 + c_4 \sin^2\theta_4}{\sin\theta_2 \cdot \sin\theta_4} = \frac{c_1 l_1^2(v_6) + c_3 l_3^2(v_6)}{l_1(v_6) l_3(v_6)} = -c. \tag{5.122}$$

综上所述,无论平行四边形或梯形单元,按照相应于(5.121)或(5.122)的条件选取常数 $c_i\,(i=1,2,3,4)$ 和 c 后,其余求在该单元上的 C^1 广义楔函数的方法雷同的,此处从略.

5.3. 四边形单元上 C^1 插值有理逼近算子

设 $\tau_t \in \tau$ 是一凸四边形单元, $\{w_i^{(1)}(x,y),\ w_i^{(2)}(x,y),\ w_i^{(3)}(x,y),\ \hat{w}_i(x,y)\}_{i=1}^4$ 是其上的标准 C^1 广义楔函数族. 对于 $f(x,y) \in C^1(\Omega)$, 定义如下算子:

$$\begin{aligned} R(f;x,y) = \sum_{i=1}^4 \Big(& f(v_i) w_i^{(1)}(x,y) \\ & + \frac{\partial}{\partial x} f(v_i) w_i^{(2)}(x,y) + \frac{\partial}{\partial y} f(v_i) w_i^{(3)}(x,y) \\ & + \frac{\partial}{\partial n} f(\theta_i) \cdot \hat{w}_i(x,y) \Big), \quad (x,y) \in T_t. \end{aligned} \tag{5.123}$$

根据C^1广义楔函数的性质，不难证明按(5.123)定义的插值算子具有下面的插值性质：

$$D^r R(f;v_i) = D^r f(v_i),\ r = (r_1, r_2),\ |r| = r_1 + r_2 \leqslant 1,$$

$$\frac{\partial}{\partial n} R(f;\theta_i) = \frac{\partial}{\partial n} f(\theta_i),\ i = 1,2,3,4.$$

进一步，有

定理5.23 设Ω是平面上可正则四边形剖分的单连通或多连通多边形区域，$f(x,y) \in C^1(\Omega)$. 若在剖分τ每一四边形单元上构造形如(5.123)的插值有理函数，则所得分片有理函数$R(f;x,y) \in C^1(\Omega)$.

证明 假定τ_1和τ_2是Ω的四边形剖分τ中任两个相邻胞腔，其公共边为e_{12}，而$v^{(1)} = (x_1, y_1)$和$v^{(2)} = (x_2, y_2)$为e_{12}的两个端点. 记

$$r(x,y) = R(f;x,y)|_{\tau_1} - R(f;x,y)|_{\tau_2}.$$

经证

$$D^r r(x,y) = 0,\ |r| \leqslant 1,\ (x,y) \in e_{12} \tag{5.124}$$

因为$\frac{\partial}{\partial x} r(x,y)\left(或\ \frac{\partial}{\partial y} r(x,y)\right)$可表为$\frac{\partial}{\partial n} r(x,y)$和$\frac{\partial}{\partial \tau} r(x,y)$的线性组合，其中$\frac{\partial}{\partial n}, \frac{\partial}{\partial \tau}$分别表示沿$e$的法向求导数和方向求导. 由此，只须证明

$$r(x,y) = \frac{\partial}{\partial n} r(x,y) = \frac{\partial}{\partial \tau} r(x,y) = 0,\ (x,y) \in e_{12}.$$

由C^1广义楔函数族及其偏导函数在单元的边界上表现为多项式的性质，可知

$$D^r r(x,y) = D^r g_3(x,y),\ |r| \leqslant 1,\ (x,y) \in e_{12},$$

其中$g_3(x,y) \in \mathrm{P}_3$是在$v^{(1)}$和$v^{(2)}$和边结点处满足齐次插值条件的3次多项式. 设

$$\tilde{g}_\alpha(t) = \frac{\partial^\alpha}{\partial n^\alpha} r(x,y)|_{e_{12}} - \frac{\partial^\alpha}{\partial n^\alpha} g_3(x,y)|_{e_{12}}$$

$$= \frac{\partial^\alpha}{\partial n^\alpha} g_1(x^{(1)} + (x^{(2)} - x^{(1)})t, y^{(1)} + (y^{(2)} - y^{(1)})t),$$

此处 $t \in [0,1]$，$\alpha = 0,1$. 因为 $\tilde{g}_\alpha(t)$ 是 $3-\alpha$ 次多项式，且满足

$$\tilde{g}_0(0) = \tilde{g}_1(0) = \tilde{g}_0(0) = \tilde{g}_1(1),\ \tilde{g}_1(t) = 0,\ t \in (0,1).$$

因此,利用插值多项式的唯一性可知 $\tilde{g}_\alpha(t) \equiv 0$，$\alpha = 0,1$. 因而有 $\frac{\partial^\beta}{\partial \tau^\beta} \tilde{g}_\alpha(t) \equiv 0$，$\beta = 1, 2, \cdots$. □

定理 5.23 有理插值算子 (5.123) 对于次数不超过 3 次的多项式是精确的.

证明 设 $f(x,y) \in \mathrm{P}_3$ 是任意给定的 3 次多项式. 则在每一单元 T_t 上,恒有

$$\bar{R}(x,y) = f(x,y) - R(f;x,y) = \frac{p_7(x,y)}{Q^{T_t}(x,y)},\ (x,y) \in T_t,$$

其中 $Q^{T_t}(x,y) \in \mathrm{P}_4$ 是单元 T_t 上的伴随元素,而 $p_7(x,y)$ 是 7 次多项式. 由定理 5.23 的证明过程可知，$\bar{R}(x,y)$，$\frac{\partial}{\partial x}\bar{R}(x,y)$ 和 $\frac{\partial}{\partial y}\bar{R}(x,y)$ 在单元 T_t 的边界上恒为零. 若记 $l_i(x,y) = 0$，$i = 1, 2, 3, 4$ 为 T_t 的四条边界的方程. 则根据 Bezout 定理可知,多项式 $p_7(x,y)$ 必含有因子 $l_1^2 \cdot l_2^2 \cdot l_3^2 \cdot l_4^2$. 因此只有 $p_7(x,y)$ 为零多项式. □

综合上述讨论,有

定理 5.24 设 τ 是平面上可正则四边形剖分的多边形区域 Ω 的正则四边形剖分. 则其上的 C^1 有理样条函数类的最少自由度是 $3N_v + N_E$，其中 N_v 和 N_E 分别是剖分 τ 的顶点和网线的个数.

由定理 5.9 和定理 5.25 可知，在有限元计算和计算机辅助几何设计中,可将三角形单元上的 C^1 有理插值格式和四边形单元上的 C^1 有理插值格式组合起来使用.

5.4. C^1 分片有理函数的等价表示

将单元 $T_t \in \tau$ 上的 C^1 广义楔函数族 $\{w_i^{(1)}(x,y), w_i^{(2)}(x,y),$

$w_i^{(3)}(x,y)$, $\hat{w}_i(x,y)\}_{i=1}^{4}$ 的表达式代入(5.123),经过整理,可得

$$R(f;x,y)=\sum_{i=1}^{5}\alpha_i(x,y)B_3^{(i)}(x,y),\quad (x,y)\in T_t, \tag{5.125}$$

其中

$$\alpha_1(x,y)=C_3l_2l_3^2l_4/\Delta,\quad \alpha_2(x,y)=C_4l_1l_3l_4^2/\Delta,$$
$$\alpha_3(x,y)=C_1l_1^2l_2l_4/\Delta,\quad \alpha_4(x,y)=C_2l_1l_2^2l_3/\Delta,$$
$$\alpha(x,y)=Cl_1l_2l_3l_4/\Delta,$$
$$\Delta=C_1l_1^2l_2l_4+C_2l_1l_2^2l_3+C_3l_2l_3^2l_4+C_4l_1l_3l_4^2+Cl_1l_2l_3l_4,$$

此处 $C_i\neq 0$ $(i=1,2,3,4)$ 和C是满足条件 (5.110)(或满足(5.121)或(5.122))的常数;而 $B_3^{(i)}(x,y)\in \mathrm{P}_3$, $i=1,2,3,4$ 是由下面插值条件唯一确定的 3 次多项式

$$\begin{cases}\text{(i)}\ \dfrac{\partial^{k+l}}{\partial x^k\partial y^l}B_3^{(i)}(v_t)=\dfrac{\partial^{k+l}}{\partial x^k\partial y^l}f(v_t),\ t=i,i+1,\ v_{i+4}:=v_i,\\ \quad\ \dfrac{\partial^{k+l}}{\partial x^k\partial y^l}B_3^{(1)}(v_6)=\dfrac{\partial^{k+l}}{\partial x^k\partial y^l}B_3^{(3)}(v_6)=0,\\ \quad\ \dfrac{\partial^{k+l}}{\partial x^k\partial y^k}B_3^{(2)}(v_5)=\dfrac{\partial^{k+l}}{\partial x^k\partial y^l}B_3^{(4)}(v_5)=0,\ 0\leqslant k+l\leqslant 1,\\ \text{(ii)}\ \dfrac{\partial}{\partial n}B_3^{(i)}(\hat{v}_i)=\dfrac{\partial}{\partial n}f(\hat{v}_i),\ i=1,2,3,4.\end{cases} \tag{5.126}$$

在曲面造型和设计等问题中,如果首先构造满足(5.126)的 4 个插值多项式 $B_3^{(i)}(x,y)$ $(i=1,2,3,4)$,再作这 4 个多项式的凸组合(5.125),将是十分方便的.

可直接证明,(5.126)决定的插值多项式分别有如下的表现形式

$$B_3^{(1)}(x,y)=l_2^2\cdot P_1^{(1)}(x,y)+l_4^2P_1^{(2)}(x,y)+d_1l_1l_2l_4,$$
$$B_3^{(2)}(x,y)=l_3^2\cdot Q_1^{(1)}(x,y)+l_1^2Q^{(2)}(x,y)+d_2l_1l_2l_3,$$
$$B_3^{(3)}(x,y)=l_4^2\cdot R_1^{(1)}(x,y)+l_2^2R_1^{(2)}(x,y)+d_3l_2l_3l_4,$$
$$B_3^{(4)}(x,y)=l_1^2s_1^{(1)}(x,y)+l_3^2s_1^{(2)}(x,y)+d_4l_1l_3l_4,$$

这里 $P_1^{(1)}(x,y)$, $P_1^{(2)}(x,y)$, $Q_1^{(1)}(x,y)$, $Q_1^{(2)}(x,y)$, $R_1^{(1)}(x,y)$, $R_1^{(2)}(x,y)$, $s_1^{(1)}(x,y)$ 和 $s_1^{(2)}(x,y)$ 分别是由以下条件所确定的 1

次多项式

$$\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial y^l}(l_2^2 P_1^{(1)}(x,y))|_{v_1} = \frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial y^l} f(v_1),$$

$$\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial y^l}(l_4^2 P_1^{(2)}(x,y))|_{v_2} = \frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial y^l} f(v_2),$$

$$\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial y^l}(l_3^2 Q_1^{(1)}(x,y))|_{v_2} = \frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial y^l} f(v_2),$$

$$\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial y^l}(l_1^2 \cdot Q_1^{(2)}(x,y))|_{v_3} = \frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial y^l} f(v_3),$$

$$\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial y^l}(l_4 R_1^{(1)}(x,y))|_{v_3} = \frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial y^l} f(v_3),$$

$$\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial y^l}(l_2^2 R_1^{(2)}(x,y))|_{v_4} = \frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial y^l} f(v_4),$$

$$\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial y^l}(l_1^2 s_1^{(1)}(x,y))|_{v_4} = \frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial y^l} f(v_4),$$

$$\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial y^l}(l_3 \cdot s_1^{(2)}(x,y))|_{v_1} = \frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial y^l} f(v_1),$$

$0 \leqslant k+l \leqslant 1$，$d_i(i=1,2,3,4)$ 由插值条件 (5.126)-(ii) 所决定；而 $B_3^{(5)}(x,y)$ 是如下的 3 次多项式

$$B_3^{(5)}(x,y) = l_2 l_3 L_1(x,y) + l_3 l_4 L_2(x,y) + l_1 l_4 L_3(x,y) + l_1 l_2 L_4(x,y),$$

这里 $L_i(x,y) \in \mathbf{P}_1$，$i=1,2,3,4$ 是由以下条件所唯一确定的 1 次多项式

$$\begin{cases} L_1(v_1) = \dfrac{Cf(v_1)}{l_2(v_1) l_3(v_1)}, \\ L_1(v_2) = C_2 \dfrac{l_3(v_2)}{l_4(v_2)} S_1^{(2)}(v_2) - C_4 \dfrac{l_4(v_2)}{l_3(v_2)} p_1^{(1)}(v_2), \\ L_1(v_4) = C_3 \dfrac{l_2(v_4)}{l_1(v_4)} p_1^{(1)}(v_4) - C_1 \dfrac{l_1(v_4)}{l_2(v_4)} S_1^{(2)}(v_4), \\ L_2(v_2) = \dfrac{Cf(v_2)}{l_3(v_2) l_4(v_2)}, \end{cases}$$

$$
\begin{cases}
L_2(v_3) = C_3 \dfrac{l_4(v_3)}{l_1(v_3)} \ p_1^{(2)}(v_3) - C_1 \dfrac{l_1(v_3)}{l_4(v_3)} Q_1^{(1)}(v_3), \\
L_2(v_1) = C_4 \dfrac{l_3(v_1)}{l_2(v_1)} \ Q_1^{(1)}(v_1) - C_2 \dfrac{l_2(v_1)}{l_3(v_1)} p_1^{(2)}(v_1), \\
L_3(v_3) = \dfrac{Cf(v_3)}{l_1(v_3)l_4(v_3)}, \\
L_3(v_4) = C_4 \dfrac{l_1(V_4)}{l_2(V_4)} Q_1^{(2)}(v_4) - C_2 \dfrac{l_2(v_4)}{l_1(v_4)} R_1^{(1)}(v_4), \\
L_3(v_2) = C_1 \dfrac{l_4(v_2)}{l_3(v_2)} R_1^{(1)}(v_2) - C_3 \dfrac{l_3(v_2)}{l_4(v_2)} Q_1^{(2)}(v_2), \\
L_4(v_4) = \dfrac{Cf(v_4)}{l_1(v_4)l_2(v_4)}, \\
L_4(v_1) = C_1 \dfrac{l_2(v_1)}{l_3(v_1)} \ R_1^{(2)}(v_1) - C_3 \dfrac{l_3(v_1)}{l_2(v_1)} S_1^{(1)}(v_1), \\
L_4(v_3) = C_2 \dfrac{l_1(v_3)}{l_4(v_3)} \ S_1^{(1)}(v_3) - C_4 \dfrac{l_4(v_2)}{l_1(v_2)} R_1^{(2)}(v_3).
\end{cases}
$$

5.5. 构造 C^1 四边形单元的 Blending 技巧

前面所介绍的四边形单元上的 C^1 有理插值格式(5.123)及其等价形式(5.125)均是利用广义楔函数方法构造并使伴随元素次数最低的有理插值格式. 如果放弃对伴随元素最低次数的要求，便可以获得形式上更加紧凑、更便于应用的 C^1 有理插值格式.

设 $\tau_s \in \tau$ 是以 $v_i(i=1,2,3,4)$ 为顶点的一凸四边形单元. T_s 的边界为 $e_i = v_iv_{i+1}: l_i(x,y)=0$ $(i=1,2,3,4)$, 它们的中点为 $\theta_i(i=1,2,3,4)$. 选择线性形式 $l_i(x,y)$ 的符号便对给定的 $p_0 \in T_s$, 有 $l_i(p_0) > 0$, $i=1,2,3,4$.

对给定的 $f(x,y) \in C^1(\Omega)$, 构造 4 个 3 次多项式 $p_3^{(i)}(x,y) \in \mathbf{P}_3$, 使其满足插值条件:

$$
\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial y^l} p_3^{(i)}(v_i) = \frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial y^l} f(v_i),
$$

$$
\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial y^l} p_3^{(i)}(v_{i+1}) = \frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial y^l} f(v_{i+1}),
$$

$$\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial y^l} p_3^{(i)}(v_{i+2}) = \frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial y^l} f(v_{i+2})$$

$$\frac{\partial}{\partial n} p_3^{(i)}(\theta_i) = \frac{\partial}{\partial n} f(\theta_i), \ i = 1,2,3,4, \ v_{i+4} := v_4. \quad (5.127)$$

引入单元 T_s 上的一组权函数

$$\begin{cases} \beta_i(x,y) = c_i l_{i+1} l_{i+2}^2 l_{i+3}^2 / \Delta^*, \ i = 1,2,3,4, \\ \Delta^* = \sum_{i=1}^{4} c_i l_{i+1} l_{i+2}^2 l_{i+3}, \end{cases} \quad (5.128)$$

这里约定 $v_i := v_{i+4}$, $l_i := l_{i+4}$, 而 $c_i > 0$, $i = 1,2,3,4$.

定义

$$R(x, y) = \sum_{i=1}^{4} \beta_i(x,y) p_3^{(i)}(x,y), \ (x,y) \in T_s. \quad (5.129)$$

定理 5.26 按有理插值格式(5.129)所得的分片有理函数是 C^1 连续的.

证明 因为权函数(5.128)满足性质

$$\sum_{i=1}^{4} \beta_i(x,y) \equiv 1, \ \beta_i(x,y)|_{e_j} = \delta_{ij}, \ i,j = 1, 2, 3, 4.$$

特别地, 可选择 $\beta_i(x, y)$ 使 $\beta_i(x, y)|_{e_i}$ 在 v_i 点处的值为 1, 而 $\beta_i(x,y)|e_{i-1}$ 在 v_i 点处的值为 0. 由权函数的性质, 可知

$$R(x,y)|_{e_j} = p_3^{(j)}(x,y)|_{e_j}, \ j = 1,2,3,4. \quad (5.130)$$

因 $p_3^{(j)}(x,y)|_{e_j}$ 已由端点处的插值条件所唯一确定. 于是 $R(x, y)$ 是 C^0 连续的. 又因

$$DR(x,y) = \sum_{i=1}^{4} (\beta_i(x,y) D p_3^{(i)}(x,y) + p_3^{(i)}(x,y) D\beta_i(x,y)), \quad (5.131)$$

其中 D 为 1 阶偏微分算子. 而

$$D\beta_j(x,y)|_{e_{j+1}} = D\beta_j(x,y)|_{e_{j+2}} = 0, \ j = 1,2,3,4,$$

并且 $p_3^{(j+1)}(x,y)|_{e_j}$ 和 $p_3^{(j)}(x,y)|_{e_j}$ 为相同的一元 3 次多项式. 因此由(5.121), 可知

$$DR(x,y)|_{e_j} = \sum_{i=1}^{4} \beta_i(x,y)Dp_3^{(i)}(x,y)|_{e_j}$$

$$+ \sum_{i=1}^{4} p_3^{(i)}(x,y)D\beta_i(x,y)|_{e_j}$$

$$= Dp_3^{(j)}(x,y)|_{e_j} + p_3^{(j)}(x,y)|_{e_j}(D\beta_j(x,y)$$

$$+ D\beta_{j+1}(x,y))|_{e_j} = Dp_3^{(j)}(x,y)|_{e_j} + p_3^{(j)}(x,y)$$

$$\cdot D\left(\sum_{i=1}^{4} \beta_i(x,y)\right)|_{e_j} = Dp_3^{(j)}(x,y)|_{e_j}. \tag{5.132}$$

上述最后一步利用了权函数的单位分解性质. 而 $Dp_3^{(j)}(x,y)|_{e_j}$ 为一元 2 次多项式,并且它被其在 e_j 两端的导数值以及 e_j 上内结点(中点)处的法向导数值所唯一确定. 因此 $R(x,y)$ 的偏导数函数是属于 C^0 类的.

不难证明

定理 5.27 有理插值格式(5.129)对于次数不超过 3 次的多项式是精确的.

事实上, 若设 $f(x,y)$ 是任意给定的次数不超过 3 的多项式. 于是由 $f(x,y)$ 的插值条件所产生的 3 次插值多项式 $p_3^{(i)}(x, y)$, $i = 1,2,3,4$, 即为 $f(x,y)$ 本身. 因此由(5.129)式知

$$R(x, y) = \sum_{i=1}^{4} \beta_i(x,y)p_3^{(i)}(x,y) = f(x,y)\sum_{i=1}^{4} \beta_i(x,y)$$

$$= f(x,y)$$

类似地利用本章所介绍的广义楔函数方法也可以构造出四边形单元上的 C^2 有理插值格式甚至 C^μ 有理插值格式来. 而且,该方法用来研究由不可约代数曲线为边界构成的区域上的有理样条函数类也是有效的.

第六章 分片代数曲线、曲面

代数曲线曲面是交换代数及代数几何基础理论研究的对象．它们在数值逼近、多元样条、计算几何以及 CAGD 等领域也起着重要的作用．

代数曲线或曲面一般按隐式方式定义，即用一个代数方程或代数方程组来定义．可以表示为有理参数形式的代数曲线或曲面称之为有理曲线或曲面．

在 CAGD 中，隐式代数曲线或曲面具有参数曲线曲面所不具备的优点．通过隐式方程容易判断某点是否在曲线或曲面上，因而便于应用到曲线曲面求交问题中；利用隐式代数曲面比较容易表示几何实体．然而隐式曲线、曲面的计算比较复杂，它需通过求解方程来求出曲线或曲面上的一点．但参数曲线、曲面易于计算，因此在 CAGD 中应用更为广泛，当然它们不具备隐式曲线曲面的上述优点．

目前，有关代数曲线、曲面的研究主要有以下的几个方面：

1. 基础理论研究．这主要指交换代数、代数几何等基础理论研究(可参见[104],[105],[106],[107]以及这方面的其它著作和文献)．

2. 在数值逼近、多元样条函数、计算几何、代数方程组的求解以及其它数学领域中的应用(可参见[1],[44]等)．

3. 在 CAGD 及其它工程中的应用，包括代数曲线、曲面逼近，代数曲线，曲面拟合，有理参数曲线曲面的隐式化；有理代数曲线曲面的参数化；分片代数曲线、曲面；混合曲线、曲面；曲面求交；参数曲线曲面等(参见[108—130]等)．

本章主要讨论隐式代数曲线曲面、代数簇，以及它们的光滑拼接问题．给出它们的推广形式，C^μ 分片代数曲线曲面．通过对特

殊的 C^μ 分片代数曲线曲面——C^μ 样条代数曲线、曲面，样条函数环 $S^\mu(\Delta)$ 及空间 $S^\mu_m(\Delta)$ 的细致讨论，指明了 $S^\mu(\Delta)$，样条代数曲线曲面以及样条代数簇的基本结构和特性，并建立了样条空间 $S^\mu_m(\Delta)$ 的插值适定性定理。本章也讨论了代数曲线、曲面的逼近问题。

§1. 代 数 簇

设 k 为一代数封闭域。$\mathbf{A}^n := \{(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)|\alpha_i\in k,\ i=1,2,\cdots,n\}$ 为 k 上的 n 维仿射空间。$\mathbf{A}^n$ 中的元素 $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，$\alpha_i\in k$ 叫做 $\mathbf{A}^n$ 中的点，而 α_i，$i=1,2,\cdots,n$ 叫做点 $\boldsymbol{\alpha}$ 的坐标。k 上的 n 元多项式环 $k[x_1,\cdots,x_n]$ 中的每个多项式 $f\in k[x_1,\cdots,x_n]$ 为定义在 $\mathbf{A}^n$ 上的函数。f 的零点集记为

$$z(f)=\{P\in\mathbf{A}^n|f(P)=0\}.$$

多项式集合 $F\subseteq k[x_1,\cdots,x_n]$ 的零点集记为

$$z(F)=\{P\in\mathbf{A}^n|\forall f\in F,\ f(P)=0\}.$$

定义 6.1 对于给定的集合 $X\subseteq\mathbf{A}^n$，如果存在集合 $F\subseteq k[x_1,\cdots,x_n]$，使得 $X=z(F)$，则称 X 为一代数集合。

如果把 $\mathbf{A}^n$ 中的所有代数集合定义成闭集，则相应得到的拓扑 $\mathscr{T}=\{\mathbf{A}^n\backslash X|X$ 为一代数集合$\}$，称为 Zariski 拓扑。对于拓扑空间 X 的子集 $Y\subseteq X$，如果在 Y 中存在两个闭的非空真子集 Y_1，$Y_2\subset Y$，使得 $Y=Y_1\cup Y_2$，则 Y 称为可约的；否则称为不可约的。

定义 6.2 $\mathbf{A}^n$ 中的闭集称为仿射代数簇（简称代数簇），而 $\mathbf{A}^n$ 中的开集称为拟仿射代数簇。

代数簇是代数几何中的主要研究对象。$\mathbf{A}^2$ 中的闭集 $z(f)$，$f\in k[x,y]$ 为平面代数曲线；$\mathbf{A}^3$ 中的闭集 $z(f)$，$f\in k[x,y,z]$ 为代数曲面；一般地，$\mathbf{A}^n$ 中的闭集 $z(f)$，$f\in k[x_1,\cdots,x_n]$称之为超曲面，这里恒假定 f 为非常数值多项式。它们通常被表示成

$$f(x,y)=0;$$

$$f(x,y,z)=0;$$

和

$$f(x_1, \cdots, x_n) = 0.$$

按代数簇的定义，显然可得到下面基本性质：

命题 6.3[105],[107]

(a) 不可约空间的开子集也是不可约的，并且是稠密的；

(b) 若 $Y \subseteq X$ 为不可约子集，则 Y 在 X 中的闭包 $\bar{Y}$ 也是不可约的；

(c) 对任意 $Y \subseteq \mathbf{A}^n$，多项式环 $k[x_1, \cdots, x_n]$ 中所有在 Y 上取值为零的多项式构成一个理想：

$$I(Y) = \{f \in k[x_1, \cdots, x_n] \mid f(P) = 0,\ P \in Y\};$$

(d) 设 $F_1 \subseteq F_2$ 均为 $k[x_1, \cdots, x_n]$ 的子集，则 $z(F_1) \supseteq z(F_2)$；

(e) 设 $Y_1 \subseteq Y_2$ 均为 $\mathbf{A}^n$ 的子集，则 $I(Y_1) \supseteq I(Y_2)$；

(f) 设 Y_1 与 Y_2 为 $\mathbf{A}^n$ 的子集，则 $I(Y_1 \cup Y_2) = I(Y_1) \cap I(Y_2)$；

(g) 对任意理想 $\mathfrak{A} \subseteq k[x_1, \cdots, x_n]$，有 $I(z(\mathfrak{A})) = \sqrt{\mathfrak{A}}$，其中

$$\sqrt{\mathfrak{A}} = \{f \in k[x_1, \cdots, x_n] \mid f^r \in \mathfrak{A}, r > 0\}$$

称为 $\mathfrak{A}$ 的根理想.

(h) $Y \subseteq \mathbf{A}^n$，$z(I(Y)) = \bar{Y}$；

(i) 代数簇 Y 是不可约的，当且仅当 $I(Y)$ 是素理想；

(j) Y 是一代数簇，当且仅当 $z(I(Y)) = Y$；

(k) 设 $\mathfrak{A}$ 为理想，如果 $I(z(\mathfrak{A})) = \mathfrak{A}$，那么 $\sqrt{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A}$；

(l) 设 $\mathfrak{A}$ 为素理想，则 $I(z(\mathfrak{A})) = \mathfrak{A}$，从而 $\sqrt{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A}$.

以上命题是在交换代数和代数几何中是非常基本而重要的. 上述性质 (g) 称为 Hilbert Nullstellensatz 定理，它也可表述为：如果 $z(f) \supset z(f_1, \cdots, f_q)$，$f_1, f_2, \cdots, f_q \in k[x_1, \cdots, x_n]$，则存在非负整数 r 及 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_q \in k[x_1, \cdots, x_n]$，使得

$$f^r = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \cdots + \alpha_q f_q, \tag{6.1}$$

即 f^r 属于 $f_1, \cdots, f_q$ 生成的理想 $\mathrm{ideal}(f_1, f_2, \cdots, f_q)$.

由 (k) 和 (g) 可知，如果 $\mathfrak{A} = \mathrm{ideal}(f_1, \cdots, f_q)$，且

$$I(z(\mathfrak{A})) = \mathfrak{A},\ z(f) \supseteq z(f_1, \cdots, f_q),$$

则 $f \in \text{ideal}(f_1, \cdots, f_q)$，即存在 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_q \in k[x_1, \cdots, x_n]$，使得

$$f = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \cdots + \alpha_q f_q.$$

定义 6.4 如果 $X \subseteq \mathbf{A}^n$ 是仿射代数簇，则称

$$k[X] = k[x_1, x_2, \cdots, x_n]/I(X)$$

为 X 的坐标环。

实际上，对任意一个仿射簇 X，环 $k[X]$ 是一个整环，并且是有限生成的 k 代数。反之，一个有限生成的 k 代数 A 是一个整环，则它一定也是某个仿射簇的坐标环。

我们知道，Zariski 拓扑是 Noetherian，即对任意闭集序列 $Y_1 \supseteq Y_2 \supseteq \cdots \supseteq$，存在 r，使得 $Y_r = Y_{r+1} = \cdots$。任意给定的闭集 X，均可唯一地表示为有限个不可约闭集的并，

$$X = X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_r,$$

其中 $X_i \not\subseteq X_j$，$i \neq j$，这里的 X_i 称为 X 的不可约分支。

定义 6.5 拓扑空间 X 的维数（记作 $\dim X$）定义为使不可约闭子集序列 $Y_0 \subset Y_1 \subset \cdots \subset Y_n$ 得以存在的最大整数 n。仿射簇或拟仿射簇的维数定义为它们作为拓扑空间所具有的维数。

定义 6.6 环 R 中每一素理想 γ 的高度定义为 $\max\{n \mid$ 存在素理想序列 $\gamma_0 \subset \gamma_1 \subset \cdots \subset \gamma_n = \gamma\}$。环 R 的维数（Krall dimension）定义为其所有素理想的最大高度，

关于代数簇及其维数有下面一些事实。

命题 6.7[105]

(a) 任一仿射代数簇 X 的维数等于它的坐标环 $k[X]$ 的维数；

(b) 任一仿射代数簇 X 的维数等于它的坐标环 $k[X]$ 的商域 $k(X)$ 在 k 上的超越次数。

(c) 如果 Y 是一个拟仿射簇，则 $\dim Y = \dim \overline{Y}$；

(d) $\mathbf{A}^n$ 中不可约代数簇 Y 的维数为 $n-1$ 的充分必要条件是存在一非常数值的不可约多项式 f，使得 $Y = z(f)$。

如果 Y 为代数簇 X 的闭子集，则称 Y 为 X 的子簇。Y 在 X 中的余维数为 $\text{codim}_X Y = \dim X - \dim Y$。代数簇 X 在 $\mathbf{A}^n$ 中的余

维数为 $n-\dim X$，常记为 $\operatorname{codim} X$。例如 $\mathbf{A}^n$ 中的超曲面 $X=z(f)$，$f\in k[x_1,\cdots,x_n]$ 的维数为 $n-1$，那么 X 的余维数 $\operatorname{codim} X$ 为 1。代数簇 $X\subseteq \mathbf{A}^n$，当 $\dim X=1$ 时，称为代数曲线。当 $\dim X=2$ 时，称为代数曲面。

切空间是人们讨论代数簇局部性质时所必须的一个重要概念。所谓代数簇 X 在点 x 处的切空间乃指过 x 且与 X 相切的一切直线的并集。通过适当地选取坐标系，可使 $x=(0,\cdots,0)=\mathbf{0}$ 为原点，这样一来，过原点的任一直线 l 为 $\{ta\mid t\in k\}$，其中 a 为 l 上除原点外的任一点。假设 $I(X)=\text{ideal}(f_1,\cdots,f_q)$，那么 $X\cap l$ 由方程组 $f_1(ta)=\cdots=f_q(ta)=0$ 所决定。如果视 t 为参数，则 $f_i(ta)$ 成为 t 的一元多项式，它们的最大公因子为

$$\begin{aligned} f(t) &= \text{g.c.d}(f_1(ta),\cdots,f_q(ta)) \\ &= c\pi(t-t_i)^{m_i}, \end{aligned} \tag{6.2}$$

其中 m_i 为 $t=t_i$ 作为 $f(t)$ 的根的重数。所以每个值 t_i 都对应直线 l 与代数簇 X 的一个交点。由于 l 过 $\mathbf{0}$ 点，从而 $t=0$ 是 $f(t)=0$ 的一个解。

定义 6.8 直线 l 与代数簇 X 在 $\mathbf{0}$ 点处相交的重数定义为 $t=0$ 作为多项式 $f(t)=\text{g.c.d}(f_1(ta),\cdots,f_q(ta))$ 的根的重数。

特别地，如果 $f_1(at),\cdots,f_q(at)$ 恒等于零，则 l 与 X 相交的重数与 X 生成元的选取无关。

定义 6.9 如果直线 l 在 $\mathbf{0}$ 点与代数簇 X 相交的重数大于 1，则称 X 与 l 相切。

将 f_i 分别表示为 $f_i=f_i^{(1)}+g_i$，$i=1,2,\cdots,q$，其中 $f_i^{(1)}$ 为 f_i 的一次齐次多项式。则当 l 与 X 在 $\mathbf{0}$ 点处相切时，

$$f_i(at)=f_i^{(1)}(at)+g_i(at)=tf_i^{(1)}(a)+g_i(at)$$

必可被 t^2 整除，而 $g_i(at)$ 包含 t^2 因子，是故如下命题成立：

命题 6.10 直线 l 与代数簇 X 在 $\mathbf{0}$ 点处相切的充要条件是

$$f_1^{(1)}(a)=f_2^{(1)}(a)=\cdots=f_q^{(1)}(a)=0. \tag{6.3}$$

定义 6.11 与代数簇 X 在 $x\in X$ 处相切的所有直线的并集称

为代数簇X在 x 处的切空间，记为 $T_{x,X}$.

显然，$\mathbf{A}^n$ 在其每一点处的切空间仍为 $\mathbf{A}^n$.

每一多项式 $f \in k[x_1, \cdots, x_n]$ 在点 $a = (a_1, \cdots, a_n)$ 处可以表示成 Taylor 展式

$$f(x) = f(a) + f^{(1)}(x) + \cdots + f^{(r)}(x),$$

其中 $f^{(i)}(x)$ 是以 $(x_j - a_j)$, $j = 1, 2, \cdots, n$ 为变量的 i 次齐次多项式，$i = 1, 2, \cdots, r$. 称 $f^{(1)}(x)$ 为 f 在 a 处的微分多项式，并记为 df 或 d_af.

$$d_af = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(a)(x_i - a_i). \tag{6.4}$$

于是代数簇X在 a 处的切空间可表示为

$$d_af_1 = d_af_2 = \cdots = d_af_q = 0 \tag{6.5}$$

或

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right)(a)(x_i - a_i) = 0, \ j = 1, 2, \cdots, q. \tag{6.6}$$

这里 $X = z(f_1, \cdots, f_q)$.

命题 6.12 $\mathbf{A}^n$ 中代数簇 X 里任意点 x 处的切空间 $T_{x,X}$ 同构于 $\mathbf{A}^m$ 中的超平面，$m \leqslant n$.

切空间反映了代数簇的局部性质. 于某点处的切空间的结构反映了在该点处的代数簇的“奇性”. 对于不可约代数簇 X，我们有

$$\dim T_{x,X} \geqslant \dim X, \ x \in X. \tag{6.7}$$

定义 6.13 设 X 为不可约代数簇，$x \in X$. 如果

$$\dim T_{x,X} = \min_{y \in X} \dim T_{y,X},$$

则称 x 为简单点或正则点；否则称为奇点.

命题 6.14 不可约代数簇 X 的简单点集合是非空的开集.

命题 6.15 设 X 为不可约代数簇，$x \in X$ 为简单点，则

$$\dim T_{x,X} = \dim X.$$

对于任意一个代数簇 X，如果过点 $x \in X$ 有多个分支，那么X在 x 点处的维数 $\dim_x X$ 可定义为过 x 的维数最大的分支的维

数，从而可得到X的简单点的定义。

定义 6.16 设X为一仿射代数簇，$x \in X$。如果 $\dim T_{x,X} = \dim_x X$，则称 x 为简单点；如果X的每一点都是简单点，则称X为光滑代数簇。

在 $\mathbf{A}^n$ 中超曲面 $X = z(f)$，$f \in k[x_1, \cdots, x_n]$ 的简单点处的切空间一定是 $n-1$ 维的超平面，而在其奇点处的切空间的维数只能是 n，且该切空间就是 $\mathbf{A}^n$。如前所述，在任一点 $a \in X$ 处，$T_{a,X}$ 由下面方程所定义

$$d_a f = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(a)(x_i - a_i) = 0. \tag{6.8}$$

在 $\mathbf{A}^n$ 中，若 $x \neq a$，那么向量 $x_i - a_i$，$i = 1, 2, \cdots, n$ 是线性相关的，因此，若(6.8)对所有的 $x \in \mathbf{A}^n$ 都成立，则必有

$$\frac{\partial f(a)}{\partial x_1} = \frac{\partial f(a)}{\partial x_2} = \cdots = \frac{\partial f(a)}{\partial x_n} = 0. \tag{6.9}$$

反过来，若(6.9)成立，则 $T_{a,X} = \mathbf{A}^n$，即 a 为奇点。

命题 6.17 设 $X = z(f)$，$f \in k[x_1, \cdots, x_n]$ 为 $\mathbf{A}^n$ 中的超曲面，$a \in X$ 为奇点的充分必要条件是(6.9)成立。

设 $\mathbf{A}^n$ 中的超曲面 $X = z(f)$，$f \in k[x_1, \cdots, x_n]$ 为非常数值多项式，且X是不可约的。如果 f 在 $a \in X$ 处可以表示成

$$f(x) = f^{(l)}(x - a) + \cdots + f^{(r)}(x - a), \tag{6.10}$$

其中 $f^{(j)}(x - a)$ 为关于$(x - a)$的 j 次齐次多项式，$j = l, \cdots, r$，$l > 1$，则称 a 为X的 l 重奇点，或称奇点 a 的重数为 l。从另一个角度来讲，当 $f(x)$ 可以表示为(6.10)时，也即 $f(x)$ 与零多项式在 a 点处具有直到 $l-1$ 阶相同的偏导数，此时，l 也称为超曲面 $X = z(f)$ 与 $\mathbf{A}^n = z(0)$ 的相交重数。还可以进一步得到任意两个超曲面的相交重数。

定义 6.18 设 $X = z(f)$，$Y = z(g)$，$f, g \in k[x_1, \cdots, x_n]$ 为两个超曲面，$a \in X \cap Y$。如果存在 $\alpha, \beta \in k[x_1, \cdots, x_n]$，$\alpha(a) \cdot \beta(a) \neq 0$，使得 $\alpha f - \beta g$ 在 a 处一直到 $l-1$ 阶的偏导数皆为零，则称X与Y在 a 点处的相交重数为 l。

例如，曲面 $x_1=f(x_2,\cdots,x_n)$，$x_1=g(x_2,\cdots,x_n)$，在点 $(a_1,\cdots,a_n)\in A^n$ 处的相交重数为 l，意指 $f(x_2,\cdots,x_n)$ 与 $g(x_2,\cdots,x_n)$ 在 $(a_2,\cdots,a_n)\in A^{n-1}$ 处具有直到 $l-1$ 阶相同的偏导数，即函数 f 与 g 在 $(a_2,\cdots,a_n)$ 处是 C^{l-1} 连续的．反之，若 f 与 g 在 $(a_2,\cdots,a_n)\in A^{n-1}$ 处 C^{l-1} 连续，则曲面 $x_1=f(x_2,\cdots,x_n)$ 与 $x_1=g(x_2,\cdots,x_n)$ 在 $(a_1,\cdots,a_n)$ 点处的相交重数为 l，此处 $a_1=f(a_2,\cdots,a_n)=g(a_2,\cdots,a_n)$。

§2. 代数簇的光滑拼接条件

分片代数簇研究中的关键问题是两个代数簇间的光滑拼接。在参数曲面的拼接中，如果两个曲面在某点处具有公共的切平面，那么称两曲面在该点处是光滑拼接的．这种拼接的光滑性被称为几何光滑性．如果把切平面连续的思想用来定义隐式代数曲面或代数簇的光滑性，则有

定义 6.19 设 X，Y 为 A^n 中的两个代数簇，$x\in X\cap Y$ 为 X 和 Y 的简单点．如果 X 在 x 点的切空间 $T_{x,X}$ 与 Y 在 x 点的切空间 $T_{x,Y}$ 相同，那么称 X 和 Y 在点 x 处相切，如果在所有简单点 $x\in X\cap Y$ 处均有 $T_{x,X}=T_{x,Y}$，则称 X 与 Y 相切或 X 与 Y 在 $X\cap Y$ 上光滑拼接．

设 $X=z(f_1,\cdots,f_s)$，$Y=z(g_1,\cdots,g_t)$ 为两个代数簇，$f_1,\cdots,f_s,g_1,\cdots,g_t\in k[x_1,\cdots,x_n]$，$a\in X\cap Y$ 为简单点，由切空间的定义，X 与 Y 在 a 点相切乃指方程组

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)(x_j-a_j)=0,\ i=1,2,\cdots,s$$

同

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(a)(x_j-a_j)=0,\ i=1,2,\cdots,t$$

具有相同的解集，因而

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) = \sum\limits_{l=1}^{t} \alpha_l(a) \dfrac{\partial g_l}{\partial x_j}(a), & i = 1,2,\cdots,s,\ j = 1,2,\cdots,n, \\ \dfrac{\partial g_i}{\partial x_j}(a) = \sum\limits_{l=1}^{s} \beta_l(a) \dfrac{\partial f_l}{\partial x_j}(a), & i = 1,2,\cdots,s,\ j = 1,2,\cdots,n. \end{cases} \tag{6.11}$$

其中 $\alpha_1(a),\cdots,\alpha_t(a),\ \beta_1(a),\cdots,\beta_s(a) \in k$. (6.11)等价于

$$\begin{cases} d_a f_i = \sum\limits_{l=1}^{t} \alpha_l(a) d_a g_l, & i = 1,2,\cdots,s, \\ d_a g_j = \sum\limits_{l=1}^{s} \beta_l(a) d_a f_l, & j = 1,2,\cdots,t. \end{cases} \tag{6.12}$$

进一步，X与Y在 $X\cap Y$ 上光滑拼接的充要条件为：存在于$X\cap Y$上取值不为零的 $\bar{\alpha}_1,\cdots,\bar{\alpha}_s;\alpha_{11},\cdots,\alpha_{st};\ \bar{\beta}_1,\cdots,\bar{\beta}_t;\beta_{11},\cdots,\beta_{ts} \in k[x_1,\cdots,x_n]$，使得

$$\begin{cases} \bar{\alpha}_i \dfrac{\partial f_i}{\partial x_j} = \left(\sum\limits_{l=1}^{t} \alpha_{il} \dfrac{\partial g_l}{\partial x_j}\right) \bmod I(X\cap Y), & i = 1,2,\cdots,s, \\ \bar{\beta}_i \dfrac{\partial g_i}{\partial x_j} = \left(\sum\limits_{l=1}^{s} \beta_{li} \dfrac{\partial f_l}{\partial x_j}\right) \bmod I(X\cap Y), & i = 1,2,\cdots,t, \\ & j = 1,2,\cdots,n. \end{cases}$$

为了得到高阶光滑拼接条件，只有切平面连续是不够的．为此利用相交重数来定义光滑的概念．先讨论两个超曲面 $f=0$, $g=0$ 间的光滑拼接条件．由超曲面间相交重数的定义，可以得到一种光滑性定义．

定义 6.20 超曲面 $X=z(f)$, $Y=z(g)\subseteq \mathbf{A}^n$ 交于不可约代数簇 $X\cap Y$. 如果X和Y的简单点在$X\cap Y$中是稠密的，而且存在 $\alpha,\beta\in k[x_1,\cdots,x_n]\backslash I(X\cap Y)$，使得 αf 和 βg 在 $X\cap Y$ 上有直到μ阶的相同偏导数，则称X和Y在$X\cap Y$上μ阶连续(或μ阶光滑的)，记为 C^μ, $\mu\geqslant 1$.

例 1 设 $X: f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1=0$ 为单位球面；

$Y: g(x,y,z)=x^2+y^2-1=0$ 为一柱面．

由于 $f-g=z^2$ 在 $z=0$ 处的一阶偏导数为零，即它们相切于圆

$$\begin{cases}x^2+y^2=1,\\ z=0.\end{cases}$$

在以上 C^μ 连续的定义中，f 和 g 的关系不是很清晰的. 对于已知的超曲面 $f=0$ 和代数簇 $c=z(f,h)$ 来说，过 c 同 $f=0$ C^μ 连续拼接的超曲面与 f 和 h 间有什么关系呢?

定义 6.21 $\mathbf{A}^n$ 中的光滑代数簇 X 的子簇 $Y_1,\cdots,Y_r$ 在点 $x\in\bigcap_{i=1}^{r}Y_i$ 处满足

$$\operatorname{codim}_X\left(\bigcap_{i=1}^{r}T_{x,Y_i}\right)=\sum_{i=1}^{r}\operatorname{codim}_X Y_i,$$

则称 $Y_1,\cdots,Y_r$ 在 x 点处是横截的 (transversal); 如果在 $\bigcap_{i=1}^{r}Y_i$ 的每个不可约分支上存在不相同的点，使得 $Y_1,\cdots,Y_r$ 在这些点处都是横截的，则称 $Y_1,\cdots,Y_r$ 是横截的.

定理 6.22 设 $X=z(f)$, $Y=z(h)$ 为横截的不可约代数超曲面，$X\cap Y$ 也是不可约的，则 $X'=z(g)\supseteq X\cap Y$ 的充要条件是

$$g\in\text{ideal}(f,h).$$

由以上定理可以看出，$\text{ideal}(f,h)$ 中包含了所有过 $X\cap Y$ 的代数曲面. 进一步，可以得到曲面 $f=0$ 与 $g=0$ 相切条件.

定理 6.23 设 $X=z(f)$, $Y=z(h)$, $X'=z(g)$ 分别为超曲面，X 和 Y 是横截的，且 $X\cap Y$ 为不可约的. 则 X' 在 $X\cap Y$ 处与 X' 是 C^1 光滑拼接的充要条件为

$$g\in\text{ideal}(f,h^2).$$

证明 充分性显然. 下面证明必要性.

由定理 6.22 可知

$$\text{ideal}(f,h)=I(X\cap Y).$$

因 $X'\supset X\cap Y$，所以

$$g\in\text{ideal}(f,h).$$

从而存在 $\alpha,\beta\in k[x_1,\cdots,x_n]$，使得

$$g=\alpha f+\beta h. \tag{6.13}$$

今令 $w=X\cap Y$，由 C^1 连续的定义，X' 与 X 在 w 处 C^1 拼接，乃指存在多项式 $A,B\notin I(w)$，使得

$$A\frac{\partial g}{\partial x_j}=B\frac{\partial f}{\partial x_j}\bmod I(w) \tag{6.14}$$

$$j=1,2,\cdots,n.$$

上式交叉相乘可得

$$AB\left(\frac{\partial g}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_l}-\frac{\partial g}{\partial x_l}\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)=0\bmod I(w),$$

$$j,l=1,2,\cdots,n.$$

由于 $A,B\notin I(w)$，从而

$$\frac{\partial g}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_l}-\frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial g}{\partial x_l}=0\bmod I(w), \tag{6.15}$$

$$j,l=1,2,\cdots,n.$$

对(6.13)求导，并将 $\frac{\partial g}{\partial x_j}$，$j=1,2,\cdots,n$ 代入(6.15)，得

$$\beta\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial g}{\partial x_l}-\frac{\partial f}{\partial x_l}\frac{\partial g}{\partial x_j}\right)=0\bmod I(w), \tag{6.16}$$

$$j,l=1,2,\cdots,n.$$

由于 X 与 Y 在 w 上是横截的，故存在 j，l，使得

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial g}{\partial x_l}-\frac{\partial f}{\partial x_l}\frac{\partial g}{\partial x_j}$$

在 w 上不为零，从而有

$$\beta\in I(w). \tag{6.17}$$

进而得

$$g\in\mathrm{ideal}(f,h^2).$$ □

推论 6.24 设 $X=z(f)$，$Y=z(h)$ 为两个不可约超曲面，它们是横截的且交于一不可约代数簇 $X\cap Y$。则 $X'=z(g)$ 在 $X\cap Y$ 处与 X 是 c^μ 光滑拼接的充要条件为 $g\in\mathrm{ideal}(f,h^{\mu+1})$，即

存在多项式 α,β，使得 $g=\alpha f+\beta h^{\mu+1}$.

由超曲面光滑拼接的讨论，我们给出两个代数簇的光滑拼接的定义.

定义 6.25[132] 设 $X=z(f_1,\cdots,f_r)$，$Y=z(g_1,\cdots,g_s)$ 为两个 d 维不可约代数簇，$\dim(X\cap Y)=d-1$. 如果存在多项式 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$, $\beta_{11},\cdots,\beta_{rs}$, 以及 $\hat{\beta}_1,\cdots,\hat{\beta}_s,\hat{\alpha}_{11},\cdots,\hat{\alpha}_{rs}$, 其中 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$, $\hat{\beta}_1,\cdots,\hat{\beta}_s\in k[x_1,\cdots,x_n]\backslash I(X\cap Y)$，使得

$$\alpha_i f_i-\sum_{j=1}^{s}\beta_{ij}g_j,\quad i=1,2,\cdots,r$$

及

$$\hat{\beta}_j g_j-\sum_{i=1}^{r}\hat{\alpha}_{ij}f_i,\quad j=1,2,\cdots,s.$$

在 $X\cap Y$ 上一直到 μ 阶偏导数皆取值为零，则称 X 与 Y 在 $X\cap Y$ 处是 μ 阶连续拼接的，或 μ 阶光滑拼接的，记作 C^μ.

由此定义及定理 6.22，定理 6.23 不难得到

定理 6.26 设 $X=z(f_1,\cdots,f_r)$ 为 $n-r$ 维不可约代数簇，$Y=z(h)$ 为不可约超曲面，$X\cap Y$ 为 $n-r-1$ 维不可约代数簇，且 $\text{ideal}(f_1,\cdots,f_r,h)=I(X\cap Y)$. 则 $n-r$ 维代数簇 $X'=z(g_1,\cdots,g_s)$ 过 $X\cap Y$ 且与 X 是 C^μ 连续拼接的充要条件为

$$g_i\in\text{ideal}(f_1,\cdots,f_r,h^{\mu+1}),\quad i=1,2,\cdots,s.$$

在曲线曲面设计中，经常采用的是几何连续(或几何光滑)性，记为 GC^μ 或 G^μ. 在微分几何中，$\mathbb{A}^n$ 中的点集 X 称为 m 维 C^μ 光滑流形，当且仅当对每一 $x\in X$，存在其在 X 内的一邻域 U_x 及 C^μ 微分同胚 $\varphi:\Omega\to U_x$，Ω 为 $\mathbb{A}^m$ 中的开集. 一个曲面称为 GC^μ 的当且仅当于它的每一点处存在一邻域，使得这个邻域为一个 C^μ 流形. 关于参数曲线，曲面的几何连续性在[131]，[132]等文献中已有较详细的讨论. 就本质上讲，几何连续是与参数选取无关的一类几何属性. 由代数簇的子集拼接而成的所谓"分片代数簇"的几何光滑性应该如何来描述呢？定义6.25 就是"分片代数簇"的几何连续的一种等价定义. Garrity 与 Warren[126] 得到了下面的结

论。

设 X 为代数簇，则集合

$$\mathscr{A}_X = \{f/g \mid f,g \in k[x_1,\cdots,x_n],\ g \notin I(X)\} \qquad (6.18)$$

为一环。当 X 不可约时，$\mathscr{A}_X$ 中每一个在 X 上不恒为零的元素在 $\mathscr{A}_X$ 中都有逆元。因此 $\mathscr{A}_X$ 中有唯一的极大理想 $\{f/g \mid f/g \in \mathscr{A}_X,\ f/g$ 在 X 上恒为零$\}$。从而 $\mathscr{A}_X$ 为一局部环。

设 Y 为包含 X 的代数簇，则

$$I_{\mathscr{A}_X}(Y) = \{f/g \mid f/g \in \mathscr{A}_X,\ \text{且 } f/g \text{ 在 } Y \text{ 上恒为零}\} \qquad (6.19)$$

构成 $\mathscr{A}_X$ 的一个理想子环。

定理 6.27[120] 设 X, Y 为 m 维代数簇，$x \in X \cap Y$ 为它们的简单点，X 与 Y 在 x 点处 GC^μ 光滑拼接的充要条件为

$$I_{\mathscr{A}_{(x)}}(X) + I_{\mathscr{A}_{(x)}}(\{x\})^{\mu+1} = I_{\mathscr{A}_{(x)}}(Y) + I_{\mathscr{A}_{(x)}}(\{x\})^{\mu+1}.$$

定理 6.28[120] 设 X, Y 为 m 维代数簇，它们在 $m-1$ 维不可约代数簇 w 处 GC^μ 光滑拼接的充要条件为

$$I_{\mathscr{A}_w}(X) + I_{\mathscr{A}_w}(w)^{\mu+1} = I_{\mathscr{A}_w}(Y) + I_{\mathscr{A}_w}(w)^{\mu+1}.$$

在 CAGD 中，通常仅应用实的低维数的代数簇。诸如 $\boldsymbol{R}^3$ 空间中的实代数曲线，曲面，$\boldsymbol{R}^2$ 中的实平面曲线等。以下讨论隐式实代数曲线、曲面的光滑拼接条件。关于代数曲面的连续性，J. Warren, C. L. Bajaj 等[109]指出了

定理 6.29 如果曲面 $g(x,y,z)=0$ 与 $h(x,y,z)=0$ 是横截的，且交于不可约代数曲线 c，则代数曲面 $f(x,y,z)=0$ 在 c 上与 $g(x,y,z)=0$ C^μ 光滑拼接的充要条件是

$$f(x,y,z) = \alpha(x,y,z)g(x,y,z) + \beta(x,y,z)h^{\mu+1}(x,y,z).$$

如果曲面 $g(x,y,z)=0$ 与 $h(x,y,z)=0$ 在无穷远处没有公共分支，则 αg 及 $\beta h^{\mu+1}$ 的次数皆小于等于 f 的次数，这里 α, β 均为在 c 上不恒为零的实多项式。

设曲线 c 由曲面 $g(x,y,z) = x^2+2y^2+2z^2-2=0$ 与 $h(x,y,z)=x=0$ 相交而得。则当 2 次曲面 $f(x,y,z)=0$ 与 $g(x,y,z)=0$ 在 c 上相切时，必有 $f(x,y,z) = \alpha g(x,y,z) +$

$\beta h^2(x, y, z)$, α, β 为实数. 若令 α, β 分别取各种不同的值,则相应得到在 c 上与 $g = 0$ 相切的 2 次曲面簇. 若 $f = 0$ 与 $g = 0$ 在 c 处 C^2 光滑拼接,则有

$$f(x,y,z) = \alpha(x,y,z)g(x,y,z) + \beta h^3(x,y,z),$$

$$\alpha(x,y,z) = ax + by + cz + d,$$

a, b, c, d, β 皆为实数. 它也定义了一簇与 $g = 0$ 在 c 处 C^2 光滑拼接的 3 次曲面.

罗钟铉等[121]也给出了平面代数曲线的光滑拼接条件, 并由 Bezout 定理得到下面的结论.

定理 6.30[121] 两个 m 次平面代数曲线 c_1: $f_1(x, y) = 0$ 与 c_2: $f_2(x,y) = 0$ 在它们的交点 P^* 处 $C^{m+\mu}$ 光滑

$$\left(\mu < \binom{m+2}{2} - m - 2\right)$$

的充要条件为

$$\alpha f_2(x,y) - \beta f_1(x,y) = l^{\mu+1}(x,y)g(x,y),$$

其中 $g(x,y) \in \mathbf{P}_{m-(\mu+1)}$, α, β 为非零实数,且 $g(x^*,y^*) = 0$, 而 $l(x,y) = 0$ 为 c_1 与 c_2 在 P^* 点处的切线方程.

推论 6.31 不可约 2 次曲线 c_1: $f_1(x,y)=0$ 与 c_2: $f_2(x,y)=0$ 在它们的交点 (x^*,y^*) 处 C^2 光滑拼接的充分必要条件为存在 1 次多项式 $P_1(x,y)$, $P_1(x^*,y^*) = 0$, 使得

$$\alpha_2 f_2(x,y) - \alpha_1 f_1(x,y) = l_1(x,y)P_1(x,y),$$

其中 $l_1(x,y) = 0$ 为曲线 c_1 与 c_2 在 (x^*,y^*) 处的切线方程, 而 α_1, α_2 为实数.

推论 6.32 不可约代数曲线 c_1: $f_1(x,y)=0$ 与 c_2: $f_2(x,y)=0$ 在它们的交点 (x^*,y^*) 处 C^3 光滑拼接的充分必要条件为存在常数 α, β, 使得

$$f_2(x,y) - \beta f_1(x,y) = \alpha l_1^2(x,y),$$

其中 $l_1(x,y) = 0$ 为曲线 c_1 与 c_2 在 (x^*, y^*) 处的切线方程.

$\boldsymbol{R}^2$ 中的代数曲线 c_1: $f(x,y) = 0$ 与 c_2: $g(x,y) = 0$ 在它们的交点 $\boldsymbol{P}_0 = (x_0, y_0)$ 处可以展成 Taylor 多项式:

$$f(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}f(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial}{\partial y}f(x_0,y_0)(y-y_0)$$
$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x_0,y_0)(x-x_0)^2+\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}f(x_0,y_0)$$
$$\cdot(x-x_0)(y-y_0)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}f(x_0,y_0)(y-y_0)^2+\cdots \tag{6.20}$$

与

$$g(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}g(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial}{\partial y}g(x_0,y_0)(y-y_0)$$
$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}g(x_0,y_0)(x-x_0)^2+\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}g(x_0,y_0)$$
$$\cdot(x-x_0)(y-y_0)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}g(x_0,y_0)(y-y_0)^2+\cdots. \tag{6.21}$$

由定义 6.20，曲线 c_1 与 c_2 在 $P_0=(x_0,y_0)$ 点处 C^μ 光滑拼接的充要条件为

$$\alpha f(x,y)=\beta g(x,y)\bmod I(P_0)^{\mu+1}, \tag{6.22}$$

其中 $\alpha,\beta\in k[x,y]$，$\alpha(P_0)\beta(P_0)\neq 0$，若令 $a=\beta/\alpha$，则 a 可以展成幂级数

$$a(x,y)=a_{00}+a_{10}(x-x_0)+a_{01}(y-y_0)+\cdots. \tag{6.23}$$

通过(6.21)，(6.22)，(6.23)可得

命题 6.33 曲线 $c_1:f(x,y)=0$ 与曲线 $c_2:g(x,y)=0$ 相交于点 $P_0=(x_0,y_0)$，那么

(a) 曲线 c_1 与 c_2 在 P_0 处 C^1 光滑拼接当且仅当存在非零常数 a_{00} 使得

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial x}f(x_0,y_0)=a_{00}\dfrac{\partial}{\partial x}g(x_0,y_0),\\[2mm] \dfrac{\partial}{\partial y}f(x_0,y_0)=a_{00}\dfrac{\partial}{\partial y}g(x_0,y_0);\end{cases} \tag{6.24}$$

(b) 曲线 c_1 与 c_2 在点 $P_0=(x_0,y_0)$ 处是 C^2 光滑拼接，当且

仅当除了(6.24)外，还有

$$\begin{cases}\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x_0,y_0)=a_{00}\frac{\partial^2}{\partial x^2}g(x_0,y_0)+2a_{10}\frac{\partial}{\partial x}g(x_0,y_0),\\ \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}f(x_0,y_0)=a_{00}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}g(x_0,y_0)+a_{10}\frac{\partial}{\partial y}g(x_0,y_0)\\ \qquad\qquad+a_{01}\frac{\partial}{\partial x}g(x_0,y_0),\\ \frac{\partial^2}{\partial y^2}f(x_0,y_0)=a_{00}\frac{\partial^2}{\partial y^2}g(x_0,y_0)+2a_{01}\frac{\partial}{\partial y}g(x_0,y_0),\end{cases}\tag{6.25}$$

其中 $a_{00}\neq 0$，a_{01}，a_{01} 皆为常数。

例如，设 $g(x,y)=-3x+y+x^2+y^2$，那么在 $(0,0)$ 点处与 $g=0$ C^2 光滑拼接的 2 次曲线 $f=0$ 必然为

$$\begin{aligned}f=a_{00}(-3x+y+x^2+y^2)+a_{10}(-3x^2+xy)\\ +a_{01}(-3xy+y^2)=0,\end{aligned}\tag{6.26}$$

其中 $a_{00}\neq 0$. 按推论 6.32，f 也可以写成

$$f=a_{00}g+(-3x+y)(a_{10}x+a_{01}y).$$

类似地，可以通过 Taylor 展式得到 $\boldsymbol{R}^3$ 中的两个代数曲面在某点处光滑拼接条件。

命题 6.34 曲面 $f(x,y,z)=0$ 与 $g(x,y,z)=0$ 在它们的交点 $P_0=(x_0,y_0,z_0)$ 处相切的充要条件是存在常数 $\alpha\neq 0$，使得

$$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}(P_0)=\alpha\frac{\partial g}{\partial x}(P_0),\\ \frac{\partial f}{\partial y}(P_0)=\alpha\frac{\partial g}{\partial y}(P_0),\\ \frac{\partial f}{\partial z}(P_0)=\alpha\frac{\partial g}{\partial z}(P_0).\end{cases}\tag{6.27}$$

§3. 分片代数簇

在 §2 中，我们讨论了代数簇的光滑拼接问题，由光滑条件便可构造 C^μ 光滑且分片定义的“C^μ 代数簇”。例如，$f=z=0$，

$g = x^2 - z = 0$ 为 R^3 空间中的两个代数曲面，它们显然在曲线 $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ 处是 C^1 光滑拼接的．于是由曲面片 $\begin{cases} f = 0 \\ x \leqslant 0 \end{cases}$ 及 $\begin{cases} g = 0 \\ x \geqslant 0 \end{cases}$ 组合而成的曲面就是一个 C^1 分片代数曲面．另外，我们熟知的样条曲线、曲面则是特殊的分片代数簇．

通过有限个 $\mathbf{A}^n$ 中的超曲面片，将单连通区域 $D \subseteq \mathbf{A}^n$ 剖分成有限个单连通子区域，称为剖分胞腔，这样便形成了 D 的一个剖分．如图 6.1 为平面区域 D 的一种剖分．我们经常用 Δ 记某一区域 $D \subseteq \mathbf{A}^n$ 的剖分，它是由所有剖分胞腔 $\sigma_1, \cdots, \sigma_T$ 及其边 $S_1, \cdots, S_E$ 等的总和．其中 $S_1, \cdots, S_E$ 为维数小于 n 的代数超曲面片或代数簇，它们统称为剖分网面．每个胞腔 $\sigma \in \Delta$ 的边界是由有限个剖分网面组成的，它们称为 σ 的边．网面 S_i 如果是某两个胞腔的公共边，且不属于 D 的边界 ∂D，则称其为内网面，否则称其为边界网面．对任意一网面 S_i，它的关联区域定义为所有以 S_i 为边的胞腔的并集．

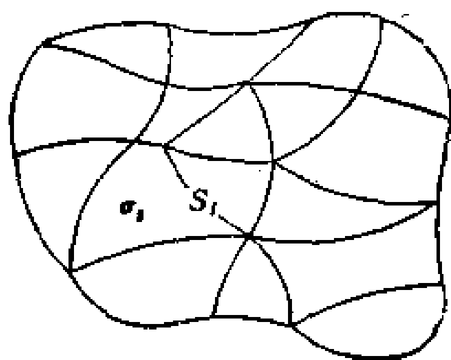


图 6.1

D 上的函数 f 限制在 Δ 的每个胞腔 σ_i 上为一多项式 $P_i \in k[x_1, \cdots, x_n]$，称为 D 上关于剖分 Δ 的分片多项式函数．所有这些函数构成的环称为分片多项式环，记为 $\mathrm{P}(\Delta)$．

定义 6.35 设 Δ 为区域 $D \subseteq \mathbf{A}^n$ 的剖分，$f \in \mathrm{P}(\Delta)$，且 f 在每个胞腔上不恒为零．集合

$$z(f) = \{(x_1, \cdots, x_n) \mid f(x_1, \cdots, x_n) = 0,\ (x_1, \cdots, x_n) \in D\}$$

称为 D 上关于 Δ 的分片超曲面．对于任意两个相邻胞腔 σ_i, σ_j，$z(P_i) \cap (\sigma_i \cap \sigma_j) = z(P_j) \cap (\sigma_i \cap \sigma_j)$，$P_i = f|_{\sigma_i}$，$P_j = f|_{\sigma_j}$，曲面 $z(P_i)$ 与 $z(P_j)$ 在 $z(P_i) \cap (\sigma_i \cap \sigma_j)$ 处 C^μ 光滑拼接，则称 $z(f)$ 为 D 上关于 Δ 的 C^μ 分片超曲面．

命题 6.36 设 X 为 D 上关于 Δ 的 C^μ 分片超曲面．则集合

$$I(X)=\{f \mid f(x)=0,\ x\in X,\ f\in \mathbf{P}(\Delta)\}$$

构成 $\mathbf{P}(\Delta)$ 的理想子环.

证明 显然 $I(X)\subseteq \mathbf{P}(\Delta)$. 对于任意 $f,g\in I(X)$, 有 $f(x)=0$, $g(x)=0$, $x\in X$. 因此 $f(x)+g(x)=0$, $f(x)\cdot g(x)=0$, $x\in X$. 于是有 $f+g, f\cdot g\in I(X)$. 于是 $I(X)$ 构成一个环. 另外,对任意 $\alpha\in \mathbf{P}(\Delta)$, $\alpha(x)f(x)=0$, $x\in X$. 即 $\alpha f\in I(X)$. □

定义 6.37 设Δ为区域 $D\subseteq \mathbf{A}^n$ 的剖分, $f_1,\cdots,f_r\in \mathbf{P}(\Delta)$, 则

$$z(f_1,\cdots,f_r)=\{(x_1,\cdots,x_n) \mid f_i(x_1,\cdots,x_n)=0,\\ i=1,2,\cdots,n,(x_1,\cdots,x_n)\in D\}$$

称为D上关于Δ的分片代数簇,对于每两个相邻胞腔 σ_i, σ_j, 代数簇 $z(P_i^{(1)},\cdots,P_i^{(r)})$ 与 $z(P_j^{(1)},\cdots,P_j^{(r)})$ 同 $\sigma_i\cap\sigma_j$ 的交点相同, 且在 $\sigma_i\cap\sigma_j\cap z(P_i^{(1)},\cdots,P_i^{(r)})$ 处 C^μ 光滑拼接,则称 $z(f_1,\cdots,f_r)$ 为关于Δ的 C^μ 分片代数簇.

命题 6.38 设Δ为 $\mathbf{A}^n$ 的剖分, X为 $\mathbf{A}^n$ 中的分片代数簇,则

$$I(X)=\{f \mid f(x)=0,\ x\in X,\ f\in \mathbf{P}(\Delta)\}$$

构成 $\mathbf{P}(\Delta)$ 的理想子环.

由代数簇的光滑性定义,有

命题 6.39 设 $X\subseteq \mathbf{A}^n$ 为关于 $\mathbf{A}^n$ 中剖分Δ的 C^μ 分片代数簇, 则存在关于Δ的分片代数曲面 $f_1=0,\cdots,f_r=0$, 使得

$$X=z(f_1,\cdots,f_r)=z(f_1)\cap\cdots\cap z(f_r),$$

且 $f_i=0$ 在X的每一点处为 C^μ 光滑的, $i=1,2,\cdots,r$.

定义 6.40 设X为关于Δ的分片代数簇,它的维数定义为

$$\dim X=\max_{\sigma_i}\dim(\overline{X\cap\sigma_i}).$$

命题 6.41 设 $X=z(f)\subseteq \mathbf{A}^n$, $f\in \mathbf{P}(\Delta)$ 为 C^μ 分片代数超曲面,则 $\dim X=n-1$.

命题 6.42 设 $X=z(f)$, $Y=z(g)$ 为 $\mathbf{A}^n$ 中关于剖分Δ的 C^μ 分片代数超曲面,且在每个胞腔上, X 和 Y 没有相同的分支,则 $X\cap Y=z(f,g)$ 为 $n-2$ 维的 C^μ 代数簇.

每个 C^μ 分片代数簇 X，$\mu \geqslant 1$，的切空间在每点处都是连续的，记X在 $x \in X$ 处的切空间为 $T_{x,X}$. 如果点 $x \in X \cap \sigma_i$ 为代数簇 $\overline{X \cap \sigma_i}$ 的奇点，此时 $\dim T_{x,X} > \dim_x(\overline{X \cap \sigma_i})$，$x$ 也称为X的奇点. X中的其它点则称为X的简单点.

下面讨论一种特殊的 C^μ 分片代数簇.

设 $f \in \mathbf{P}(\Delta)$ 为 $\mathbf{A}^n$ 上的 C^μ 连续函数. 显然有 $z(f)$ 为 C^μ 分片代数超曲面.

命题 6.43 设Δ为 $\mathbf{A}^n$ 的一个剖分，则

$$S^\mu(\Delta) = \{f \mid f \in C^\mu(\mathbf{A}^n) \cap \mathbf{P}(\Delta)\} \tag{6.28}$$

构成k上的一个环.

我们称环 $S^\mu(\Delta)$ 为关于剖分Δ的 C^μ 样条函数环. 显然 $k[x_1, \cdots, x_n] \subseteq S^\mu(\Delta)$. $f \in S^\mu(\Delta)$ 的次数为 f 限制在Δ的每个胞腔上相应多项式次数的最大值，记为

$$\deg f = \max_{\sigma_i \in \Delta} \deg(f|\sigma_i). \tag{6.29}$$

命题 6.44 $S^\mu(\Delta)$ 中所有次数不超过m的 C^μ 样条函数的集合

$$S_m^\mu(\Delta) = \{f \mid \deg f \leqslant m,\ f \in S^\mu(\Delta)\} \tag{6.30}$$

是k上的一个有限维线性向量空间，$m \geqslant 0$.

正如在第一章中交待的那样，通常称 $S_m^\mu(\Delta)$ 为μ阶光滑的m次样条函数空间. 从以上的叙述可以看出，环 $S^\mu(\Delta)$ 与空间 $S_m^\mu(\Delta)$ 是与剖分密切相关的. 关于二维情形下的样条空间的结构，可参见本书第一章.

我们知道，对任意 $\mu \geqslant 0$ 及剖分 Δ，$S^\mu(\Delta) \backslash k[x,y]$ 是不空的，即非退化的 C^μ 样条函数都是存在的. 但对于取定的 $m > 0$，$S_m^\mu(\Delta) \backslash k[x,y]$ 却不一定是非空的.

对于高维空间 $\mathbf{A}^n$，$n > 2$，当剖分Δ的每个网面为超平面时，样条空间 $S_m^\mu(\Delta)$ 相应于定理 1.3 及定理 1.5 的结论也成立. 以下恒假定Δ的网面均为超平面.

作为代数簇的推广，下面讨论样条函数零点集的性质.

定义 6.45 设Δ为 $\mathbf{A}^n$ 的一个剖分，$X \subseteq \mathbf{A}^n$. 如果存在 $f_1, \cdots,$

$f_r \in S^\mu(\Delta)$，使得

$$X = z(f_1,\cdots,f_r) = \bigcap_{i=1}^{r} z(f_i) \tag{6.31}$$

则称X为$\mathbf{A}^n$中关于剖分Δ的C^μ样条代数簇.如果存在$f \in S^\mu(\Delta)$，使得 $X = z(f)$，则称X为 C^μ 样条代数超曲面.

把一维样条代数簇称为C^μ样条代数曲线,二维的样条代数簇则称为样条代数曲面.

命题 6.46 对于点集 $X\subseteq\mathbf{A}^n$，集合

$$I(X) = \{f \mid f(x) = 0,\ x \in X,\ f(x) \in S^\mu(\Delta)\} \tag{6.32}$$

构成环 $S^\mu(\Delta)$ 的一个理想. 若 $Y\subseteq X$，则 $I(Y)\supseteq I(X)$.

命题 6.47 对于样条函数集合 $F\subseteq S^\mu(\Delta)$，$z(F)$为C^μ样条代数簇. 若 $Y\supseteq G$，则 $z(G)\supseteq z(F)$.

引理 6.48 设R为 Noether 环,M为有限生成的R模，则M为 Noether R模. 若M为一环,则M为 Noether 环.

设Δ的每个网面为超平面，则由多元样条所满足的协调方程及表现定理可得

定理 6.49 $S^\mu(\Delta)$为 Noether 环.

证明 显然$S^\mu(\Delta)$为 $k[x_1,\cdots,x_n]$ 上的模. 由多元样条的表现定理知,任一 $f \in S^\mu(\Delta)$，它可写成

$$f = P(x_1,\cdots,x_n) + \sum_{i=1}^{r} Q_i(x_1,\cdots,x_n)\cdot[l_i(x_1,\cdots,x_n)]_*^{\mu+1} \tag{6.33}$$

其中 $Q_i(x_1,\cdots,x_n)$ 为光滑余因子，它们满足多元样条的协调方程. 所以$S^\mu(\Delta)$为由

$$\{1,[l_1(x_1,\cdots,x_n)]_*^{\mu+1},\cdots,[l_r(x_1,\cdots,x_n)]_*^{\mu+1}\}$$

生成的 $k[x_1,\cdots,x_n]$ 模M的子模. 由于 $k[x_1,\cdots,x_n]$ 为 Noether 环,且模M为 $k_1[x_1,\cdots,x_n]$ 上的有限生成模,是故M为 Noether $k[x_1,\cdots,x_n]$ 模. 从而 $S^\mu(\Delta)$为 Noether $k[x_1,\cdots,x_n]$模,也就是Noether 环. □

定理 6.50[122] 设Δ为$\mathbf{A}^n$的剖分。Δ的任意两个C^μ样条代数簇的并仍是C^μ样条代数簇；任意多个C^μ样条代数簇的交仍是C^μ样条代数簇；并且空集ϕ及$\mathbf{A}^n$也都是C^μ样条代数簇.

证明 如果 $X_1=z(T_1)$，$X_2=z(T_2)$，$T_1, T_2\in S^\mu(\Delta)$，则 $X_1\cup X_2=z(T_1T_2)$，这里

$$T_1T_2=\{f\cdot g\mid f\in T_1, g\in T_2\}$$

事实上，对任一 $a\in X_1\cup X_2$，则有 $a\in X_1$ 或 $a\in X_2$，所以 $a\in z(T_1T_2)$，即 $z(T_1T_2)\supseteq X_1\cup X_2$.

反之，对任一$a\in z(T_1T_2)$．若 $a\notin X_1$，则存在T_1中的C^μ样条函数f，使得 $f(a)\neq 0$．但对所有$g\in T_2$，有 $fg(a)=0$．于是 $g(a)=0$，因此$a\in X_2$．从而 $z(T_1T_2)\subseteq X_1\cup X_2$.

如果 $X_i=z(T_i)$，$T_i\subseteq S^\mu(\Delta)$，$i=1,2,\cdots,r$ 为有限个任意给定的C^μ样条代数簇，则$\bigcap\limits_{i=1}^{r}X_i=z\left(\prod\limits_{i=1}^{r}T_i\right)$．所以$\bigcap\limits_{i=1}^{r}X_i$为$C^\mu$样条代数簇．而 $\phi=z(S^\mu(\Delta))$，$\mathbf{A}^n=z(0)$ 也都是关于Δ的C^μ样条代数簇. □

定义 6.51 对$\mathbf{A}^n$的任意剖分Δ，记$\mathscr{T}_\Delta^\mu=\{\mathbf{A}^n\setminus X\mid X\subseteq\mathbf{A}^n$为关于$\Delta$的$C^\mu$样条代数簇$\}$，则$\mathscr{T}_\Delta^\mu$为$\mathbf{A}^n$的一个拓扑，称之为关于剖分$\Delta$的$C^\mu$ Zariski 拓扑.

定义 6.52 Δ为$\mathbf{A}^n$的一个剖分，$Y\subseteq\mathbf{A}^n$为关于Δ的C^μ样条代数簇．若Y可以表示成非空真闭子集Y_1，Y_2的并，则称Y为可约的，否则称Y为不可约的.

命题 6.53 设X为$\mathbf{A}^n$中关于剖分Δ的C^μ样条代数簇，则X为不可约的当且仅当$I(X)$为$S^\mu(\Delta)$的素理想.

证明 如果X为不可约的，$fg\in I(X)$，则

$$X\subseteq z(fg)=z(f)\cup z(g),$$

所以

$$X=(X\cap z(f))\cup(X\cap z(g)),$$

故必有

$$X\subseteq X\cap z(f)\subseteq z(f),$$

或 $X\subseteq z(g)$，从而 f 或 $g\in I(X)$.

反之，如果 $\mathfrak{A}=I(X)$ 为素理想. 假设 $X=W\cup V$，那么 $\mathfrak{A}=I(W)\cap I(V)$，所以 $\mathfrak{A}=I(W)$ 或 $I(V)$，从而 $X=W$ 或 V，即X为不可约的. □

定理 6.54[122] $\mathscr{T}_{\Delta}^{\mu}$ 为 Noether 拓扑，即任意不可约的下降闭集列 $F_1\supset F_2\supset\cdots$ 都是有限列.

证明 由命题 6.53 知，$\mathscr{T}_{\Delta}^{\mu}$ 的每个不可约闭集，都一一对应一个 $S^{\mu}(\Delta)$ 的素理想.因此每一个闭集下降序列 $F_1\supset F_2\supset\cdots\supset\cdots$ 都对应一个 $S^{\mu}(\Delta)$ 中的素理想上升列 $I(F_1)\subset I(F_2)\subset\cdots$. 由于 $S^{\mu}(\Delta)$ 为 Noether 环，因而它的每个素理想上升序列必为有限列. □

定理 6.55[122] 关于 $\mathbf{A}^n$ 的剖分Δ的任一 C^{μ} 样条代数簇，均可表示为有限个不可约 C^{μ} 样条代数簇 $X_1,\cdots,X_r$ 的并，即

$$X=\bigcup_{i=1}^{r}X_i. \tag{6.34}$$

证明 对于任意给定的关于Δ的 C^{μ} 样条代数簇 X，如果X为不可约的，则定理成立. 假定X为可约的，则存在 C^{μ} 样条代数簇 $W,V\subset X$，使 $X=W\cup V$. 若定理对X不真，则至少对W或V之一定理也不真. 不妨假定定理对W不真，因而W必可约，从而可以继续将W分解为 $W_1\cup W_1'$. 如果继续下去，即可得到一个无穷下降序列 $X\supset W\supset W_1\cdots$，此与 $\mathscr{T}_{\Delta}^{\mu}$ 为 Noether 拓扑的假设相矛盾. □

与代数簇相比，C^{μ} 样条代数簇的结构更为复杂，但它具有很多与代数簇相似的性质. 这点将不作进一步讨论. 下面讨论样条代数曲线、曲面与多元样条插值之间的关系. 在此先考察多元多项式插值. 设 k 为实数域，$\mathbf{P}_m\subset k[x_1,\cdots,x_n]$ 为 n 元 m 次多项式空间，点 $a_1,\cdots,a_r\in\mathbf{A}^n$. 其中 $r=\dim\mathbf{P}_m$，$r=\binom{m+n}{n}$. 若对任意给定的一组实数 $f_1,\cdots,f_r$ 都有唯一的多项式 $p\in\mathbf{P}_m$ 存在，使得

$$p(\boldsymbol{a}_i)=f_i,\ i=1,2,\cdots,r, \tag{6.35}$$

则称 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_r$ 为 $\mathbf{P}_m$ 的一个插值适定结点组.

在多元多项式插值中，有一个关于多项式插值适定性的重要定理,那就是

定理 6.56 设 $\mathbf{P}_m$ 为多项式空间. 结点组 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_r\subseteq\mathbf{A}^n$, $r=\dim\mathbf{P}_m=\binom{m+n}{n}$, 为 $\mathbf{P}_m$ 的适定插值结点组的充要条件为它们不同时位于任一个代数超曲面上.

证明 设 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_r$ 为 $\mathbf{P}_m$ 的插值适定结点组，且它们同时位于一代数超曲面. 按线性代数理论,可知满足

$$p(\boldsymbol{a}_i)=0,\ i=1,2,\cdots,r,$$

的多项式 $p\in\mathbf{P}_m$ 必为零多项式.

反之,设 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_r$ 不是 $\mathbf{P}_m$ 的插值适定结点组. 于是存在一组实数 $f_1,\cdots,f_r$ 使得与(1.35)式相对应的线性方程组之系数行列式为 0. 因而有非零的多项式 $q\in\mathbf{P}_m$ 存在,使

$$q(\boldsymbol{a}_i)=0,\ i=1,2,\cdots,r.$$

即 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_r$ 若在同一个代数超曲面 $q=0$ 上. □

以下讨论 Hermite 插值问题：对于给定的点组 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_r$ 及非负整数 $N_1,\cdots,N_r$, 以及任给实数 f_{α_i}, $\boldsymbol{\alpha}_i=(\alpha_i^1,\cdots,\alpha_i^n)$, $|\boldsymbol{\alpha}_i|\leqslant N_i$, $i=1,2,\cdots,r$, 寻求 $p\in\mathbf{P}_m$, 使得

$$\begin{cases}D^{\alpha_i}p(\boldsymbol{a}_i)=f_{\alpha_i},\\ \boldsymbol{\alpha}_i=(\alpha_i^1,\cdots,\alpha_i^n),\ |\boldsymbol{\alpha}_i|=\sum\limits_{j=1}^{n}\alpha_i^j\leqslant N_i,\\ \alpha_i^j\geqslant 0,\ j=1,2,\cdots,n,\ i=1,2,\cdots,r.\end{cases} \tag{6.36}$$

如果(6.36)的方程个数 $\sum\limits_{i=1}^{r}\binom{N_i+n}{n}=\dim\mathbf{P}_m=\binom{m+n}{n}$,且对任给 $\{f_{\alpha_i}\}$, 存在唯一的 $p\in\mathbf{P}_m$, 使得(6.36)成立,则称点组 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_r$ 是 $(N_1,\cdots,N_r)$ Hermite 插值的适定结点组. 类似地有

定理 6.57 点组 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_r$ 是 $\mathbf{P}_m$ 中 $(N_1,\cdots,N_r)$ Hermite 插值适定结点组的充要条件为不存在代数超曲面,使得 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_r$

分别为该曲面的 $N_1,\cdots,N_r$ 重奇点。

在空间 $S_m^\mu(\Delta)$ 中，也有类似的 Lagrange 及 Hermite 插值问题。若点组 $a_1,\cdots,a_r$ 对任意给定的实数值 $f_1,\cdots,f_r$，$r=\dim S_m^\mu(\Delta)$，均存在唯一的 $S\in S_m^\mu(\Delta)$，使得

$$S(a_i)=f_i,\ i=1,2,\cdots,r,$$

则称点组 $a_1,\cdots,a_r$ 为 $S_m^\mu(\Delta)$ 的 Lagrange 适应插值结点组。我们也可以得到相似的插值适定性定理。

定理 6.58[122] $a_1,\cdots,a_r$ 为 $S_m^\mu(\Delta)$ 的 Lagrange 插值适定结点组的充要条件为 $a_1,\cdots,a_r$ 不落在 $S_m^\mu(\Delta)$ 的同一块样条代数曲面上，即 $I(\{a_1,\cdots,a_r\})=\{0\}$，这里 $r=\dim S_m^\mu(\Delta)$。

G. Nurnberger 和 T. Riessinger[133] 给出了在矩形剖分、1-型和 2-型三角剖分上取某些样条空间的 Lagrange 或 Hermite 插值适定结点组的算法。

§4. 代数曲线、曲面的逼近

在 CAGD 中，我们所涉及的曲线、曲面大都是代数曲线、曲面。在曲线、曲面设计中，有理的参数曲线、曲面有着广泛的应用。更为一般的隐式的代数曲线和曲面在诸如求高维曲面的等值线或等值面 (Contour)，曲面求交等一系列问题中均有重要的应用。在实际计算问题中，有时需要将某些曲线或曲面进行等价或近似转换。概而言之，曲线、曲面的转换问题主要有：同一空间中不同表示形式(如 Bézier 曲面或 B 样条曲面)，或不同次数的曲线、曲面间的相互转换；多项式曲线、曲面同有理曲线、曲面间的相互转换；多项式或有理参数曲线、曲面同隐式代数曲线、曲面间的转换(包括隐式的及有理参数化或参数化逼近)；隐式代数曲面间的相互转换等．在以上提到的曲线、曲面的转换中，很大一部分是通过逼近的方法来实现的。以下仅就在曲线、曲面设计中常见的曲线、曲面逼近问题给出相应的解决方法以及误差估计(参见[122]，[129])。

4.1. 关于 2 次曲线（Conic）的参数逼近

2 次曲线是 CAGD 中最常见的代数曲线，每一条 2 次曲线都是平面代数曲线。这里假设所讨论的 2 次曲线是在 xoy 平面上实代数方程

$$f(x,y)=ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f \tag{6.37}$$

的实解集。我们知道 2 次曲线是有理的，即存在着有理参数表示

$$\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t),\end{cases} \tag{6.38}$$

使得

$$f(x(t),y(t))\equiv 0 \tag{6.39}$$

在实际应用中，通常分段去求 2 次曲线的参数表达式 $(x(t),y(t))$，该过程叫做代数曲线的参数化。首先利用有理 Bézier 曲线来表示一段 2 次曲线(参见[130])。

设 C 为平面上以 $\boldsymbol{P}_0$，$\boldsymbol{P}_2$ 为端点的 2 次曲线，其在 $\boldsymbol{P}_0$，$\boldsymbol{P}_2$ 处切线 $\overline{\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{P}_1}$，$\overline{\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1}$ 相交于点 $\boldsymbol{P}_1$，则 2 次曲线 C 可以表示成

$$(1-\lambda)l_1l_2+\lambda l_3^2=0, \tag{6.40}$$

其中 $0<\lambda<1$，而 $l_1=0$，$l_2=0$，$l_3=0$ 分别为 $\overline{\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{P}_1}$，$\overline{\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2}$，$\overline{\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{P}_2}$ 所对应的直线方程。

如果 $\boldsymbol{P}_0$，$\boldsymbol{P}_1$，$\boldsymbol{P}_2$ 不共线，则由该三点所确定的平面上的任一点 $\boldsymbol{r}$ 都可以表示为

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1+\alpha(\boldsymbol{r}_0-\boldsymbol{r}_1)+\beta(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1), \tag{6.41}$$

其中 (α,β) 可当作是 $\boldsymbol{r}$ 是由 $\boldsymbol{P}_0$，$\boldsymbol{P}_1$，$\boldsymbol{P}_2$ 定义之新坐标系中的坐标。显然，$\boldsymbol{P}_0$，$\boldsymbol{P}_1$，$\boldsymbol{P}_2$ 在该坐标系中的坐标分别为 $\boldsymbol{r}_0=(1,0)$，$\boldsymbol{r}_1=(0,0)$，$\boldsymbol{r}_2=(0,1)$，因此 $\overline{\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{P}_1}$，$\overline{\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2}$，$\overline{\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{P}_2}$ 的方程分别为 $\beta=0$，$-\alpha=0$，$\alpha+\beta-1=0$。从而 2 次曲线的方程可以写成

$$S(\alpha,\beta)=(1-\lambda)\alpha\beta-\lambda(\alpha+\beta-1)^2=0. \tag{6.42}$$

过 2 次曲线 c 上的任一点 (α',β') 的切线为

$$S_\alpha(\alpha',\beta')(\alpha-\alpha')+S_\beta(\alpha',\beta')(\beta-\beta')=0 \tag{6.43}$$

该切线分别交 $\overline{\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{P}_1}$，$\overline{\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2}$ 于 $\boldsymbol{A}=(a,0)$，$\boldsymbol{B}=(0,\beta)$，其中

$$\alpha = \frac{-2\lambda(\alpha' + \beta' - 1)}{(1-\lambda)\beta' - 2\lambda(\alpha' + \beta' - 1)},$$

$$\beta = \frac{-2\lambda(\alpha' + \beta' - 1)}{(1-\lambda)\alpha' - 2\lambda(\alpha' + \beta' - 1)}.$$

如图 6.2 所示。

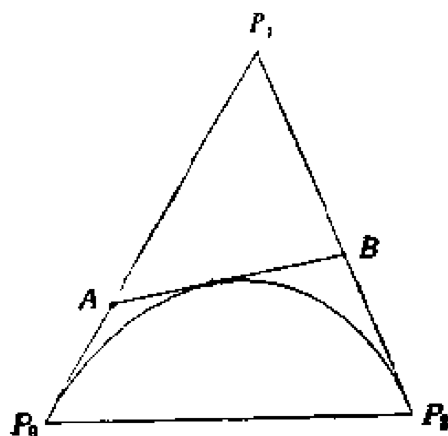


图 6.2

若设 $g_1 = \frac{|P_1A|}{|AP_0|}$, $g_2 = \frac{|P_1B|}{|BP_2|}$,则

$$g_1 = \frac{|P_1A|}{|AP_0|} = \frac{\alpha}{1-\alpha} = \frac{-2\lambda(\alpha' + \beta' - 1)}{(1-\lambda)\alpha'}, \quad (6.44)$$

$$g_2 = \frac{|P_1B|}{|BP_2|} = \frac{\beta}{1-\beta} = \frac{-2\lambda(\alpha' + \beta' - 1)}{(1-\lambda)\beta'}, \quad (6.45)$$

$$g_1g_2 = \frac{4\lambda^2(\alpha' + \beta' - 1)^2}{(1-\alpha)^2\alpha'\beta'} = \frac{4\lambda}{1-\lambda}. \quad (6.46)$$

因此当 λ 取定后，g_1g_2 为一常数．由于 $0 < \lambda < 1$，所以

$$g_1g_2 = \frac{4\lambda}{1-\lambda} > 0,$$

通常把该常数记作 k^2.

由(6.44)，(6.45)，(6.46) 可以得到 2 次曲线 c 的一种参数表示。由(6.44),(6.45)可知

$$\alpha' = \frac{g_1}{g_1 + g_2 + 2}, \quad \beta' = \frac{g_2}{g_1 + g_2 + 2}.$$

将它代入到(6.41)得

$$r = r_1 + \frac{g_1(r_0 - r_1)}{g_1 + g_2 + 2} + \frac{g_2(r_2 - r_1)}{g_1 + g_2 + 2}$$

$$= \frac{g_1 r_0 + g_2 r_2 + 2r_1}{g_1 + g_2 + 2}. \tag{6.47}$$

再令

$$g_1 = \frac{w_0(1-u)}{w_1 u}, \quad g_2 = \frac{w_2 u}{w_1(1-u)},$$

则

$$g_1 g_2 = k^2 = \frac{w_0 w_2}{w_1^2}.$$

将其代入到(6.47)即得到下述的有理 Bézier 参数表示形式

$$r(u) = \frac{w_0 r_0 (1-u)^2 + 2w_1 r_1 u(1-u) + w_2 r_2 u^2}{w_0(1-u)^2 + 2w_1 u(1-u) + w_2 u^2}, \quad 0 \leqslant u \leqslant 1, \tag{6.48}$$

若改取

$$g_1 = \frac{w_0 c(b-u')}{w_1(u'-a)}, \quad g_2 = \frac{w_2(u'-a)}{w_1 c(b-u')},$$

则由(6.47)所确定的是同一条 2 次曲线，但这时参数域是 $[a, b]$ 而不是$[0,1]$。参数 u 和 u' 之间仅差一个双线性变换

$$Auu' + Bu + Cu' + D = 0.$$

上面已具体地将一个 2 次曲线段表示成 2 次有理 Bézier 形式。当然，我们还可以将它表示成其它形式，例如 3 次有理 Bézier 形式

$$r(u) = \frac{\sum_{i=0}^{3} \tilde{w}_i \tilde{r}_i B_{i,3}(u)}{\sum_{i=0}^{3} \tilde{w}_i B_{i,3}(u)}, \tag{6.49}$$

其中

$$
\begin{cases}
\tilde{w}_0 = w_0,\ \tilde{w}_3 = w_2,\ \tilde{w}_1 = \dfrac{1}{3}(w_0 + 2w_1), \\
\qquad \tilde{w}_2 = \dfrac{1}{3}(2w_1 + w_2), \\
\tilde{\boldsymbol{r}}_0 = \boldsymbol{r}_0,\ \tilde{\boldsymbol{r}}_3 = \boldsymbol{r}_2,\ \tilde{\boldsymbol{r}}_1 = \dfrac{w_0\boldsymbol{r}_0 + 2w_1\boldsymbol{r}_1}{w_0 + 2w_1}, \\
\qquad \tilde{\boldsymbol{r}}_2 = \dfrac{2w_1\boldsymbol{r}_1 + w_2\boldsymbol{r}_2}{2w_1 + w_2};
\end{cases}
$$

3 次有理 Hermite 形式：

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{r}(u) = & \{\boldsymbol{r}(0)(f_0(u)w_0 + g_0(u)w_0') + \boldsymbol{r}(1)(f_1(u)w_2 \\
& + g_1(u)w_2') + w_0\dot{\boldsymbol{r}}(0)g_0(u) + w_2g_1(u)\dot{\boldsymbol{r}}(1)\}/ \\
& \{w_0f_0(u) + w_2f_1(u) + w_0'g_0(u) + w_2'g_1(u)\} \\
= & \{[w\cdot\boldsymbol{r}](0)f_0(u) + [w\cdot\boldsymbol{r}](1)f_1(u) \\
& + [w\cdot\boldsymbol{r}]'(0)g_0(u) + [w\cdot\boldsymbol{r}]'(1)g_1(u)\}/ \\
& \{w_0(0)f_0(u) + w(1)f_1(u) + \dot{w}(0)g_0(u) \\
& + \dot{w}(1)g_1(u)\},
\end{aligned}
\tag{6.50}
$$

其中

$$
\begin{cases}
w(0) = w_0,\ w(1) = w_2,\ \dot{w}(0) = 2(w_1 - w_0), \\
\qquad \dot{w}(1) = 2(w_1 - w_0), \\
\boldsymbol{r}(0) = \boldsymbol{r}_0,\ \boldsymbol{r}(1) = \boldsymbol{r}_2,\ \dot{\boldsymbol{r}}(0) = \dfrac{2w_1}{w_0}(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0), \\
\qquad \dot{\boldsymbol{r}}(1) = \dfrac{2w_1}{w_2}(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1);
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
f_0(u) = 2u^3 - 3u^2 + 1,\ f_1(u) = -2u^3 + 3u^2, \\
g_0(u) = u^3 - 2u^2 + u,\ \ g_1(u) = u^3 - u^2;
\end{cases}
$$

以及有理 B 样条的形式，它的第 j 段曲线为

$$
\boldsymbol{B}_j(u) = \frac{\sum\limits_{i=0}^{2} \alpha_{i+j-1}\boldsymbol{P}_{i+j-1}F_{i,2}(u)}{\sum\limits_{i=0}^{2} \alpha_{i+j-1}F_{i,2}(u)},
\tag{6.51}
$$

其中

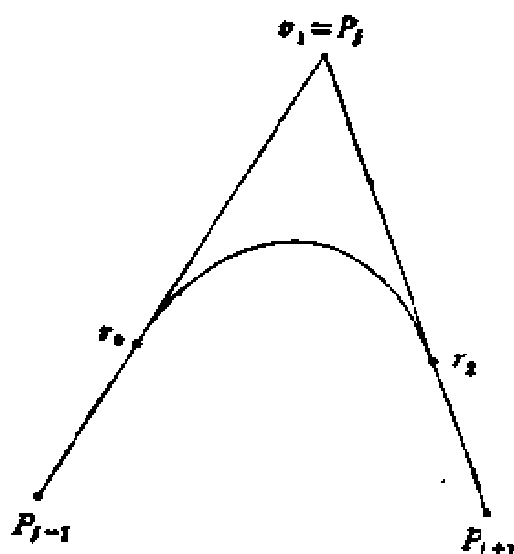


图 6.3

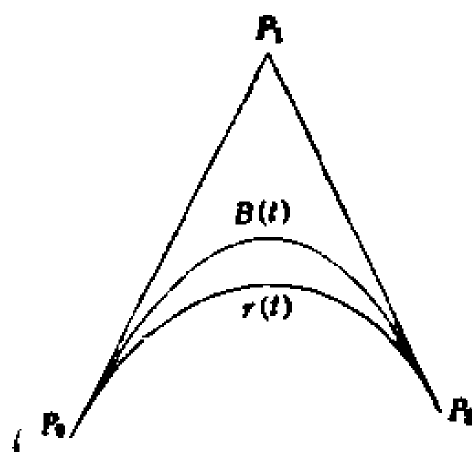


图 6.4

$$\begin{cases}\alpha_{j-1}\boldsymbol{P}_{j-1}=2w_0\boldsymbol{r}_0-w_1\boldsymbol{r}_1,\\ \alpha_j\boldsymbol{P}_j=w_1\boldsymbol{r}_1,\\ \alpha_{j+1}\boldsymbol{P}_{j+1}=2w_2\boldsymbol{r}_2-w_1\boldsymbol{r}_1,\\ \alpha_j=w_1,\ \alpha_{j-1}=2w_0-w_1,\ \alpha_{j+1}=2w_2-w_1,\\ \boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{P}_j\end{cases}$$

如图 6.3 所示。而

$$\begin{cases}F_{0,2}(u)=\dfrac{1}{2}(u-1)^2\\ F_{1,2}(u)=\dfrac{1}{2}(-2u^2+2u+1)\\ F_{2,2}(u)=\dfrac{1}{2}u^2\end{cases}$$

为 2 次 B 样条的基函数。

4.2. 关于 2 次曲线的多项式参数逼近

实际的几何系统模型并不只限于有理曲线、曲面。事实上，在曲面拟合时，有时也需要把所插值的曲线化成统一的多项式曲线。特别是要把一般的 2 次曲线段近似地表示成一些多项式曲线段，即多项式样条曲线。

不妨设 2 次曲线段为

$$\boldsymbol{r}(t)=\frac{\sum_{i=0}^{2} w_i \boldsymbol{P}_i B_{i,2}(t)}{\sum_{i=0}^{2} w_i B_{i,2}(t)}$$

$$=\frac{\boldsymbol{P}_0(1-t)^2+2w\boldsymbol{P}_1 t(1-t)+\boldsymbol{P}_2 t^2}{(1-t)^2+2wt(1-t)+t^2}, \qquad (6.52)$$

其中 $0 \leqslant t \leqslant 1$，$w_0=w_2=1$，$w_1=w>0$（见图 6.4）。自然地，首先想到利用 2 次 Bézier 曲线

$$\boldsymbol{B}(t)=\boldsymbol{P}_0(1-t)^2+2\boldsymbol{P}_1(1-t)t+\boldsymbol{P}_2 t^2 \qquad (6.53)$$

来近似代替 $\boldsymbol{r}(t)$。它们之间的误差依赖于 $\boldsymbol{P}_0$，$\boldsymbol{P}_1$，$\boldsymbol{P}_2$ 及 w。下面先给出用 $\boldsymbol{B}(t)$ 逼近 $\boldsymbol{r}(t)$ 时的误差估计。考虑差

$$\boldsymbol{r}(t)-\boldsymbol{B}(t)=\frac{\boldsymbol{P}_0(1-t)^2+2w\boldsymbol{P}_1 t(1-t)+\boldsymbol{P}_2 t^2}{(1-t)^2+2wt(1-t)+t^2}$$

$$-(\boldsymbol{P}_0(1-t)^2+2\boldsymbol{P}_1 t(1-t)+\boldsymbol{P}_2 t^2)$$

$$=\frac{2(1-w)t(1-t)}{(1-t)^2+2wt(1-t)+t^2}(\boldsymbol{P}_0(1-t)^2$$

$$+2\boldsymbol{P}_1 t(1-t)+\boldsymbol{P}_2 t^2-\boldsymbol{P}_1). \qquad (6.54)$$

由 Bézier 曲线的凸包性质有

$$(1-t)^2+2wt(1-t)+t^2 \geqslant \min\{1,w\},$$

又

$$\|\boldsymbol{P}_0(1-t)^2+2\boldsymbol{P}_1 t(1-t)+t^2\boldsymbol{P}_2-\boldsymbol{P}_1\|$$

$$\leqslant \max\{|\boldsymbol{P}_0-\boldsymbol{P}_1|,|\boldsymbol{P}_2-\boldsymbol{P}_1|\}[(1-t)^2+t^2],$$

$$t\in[0,1] \qquad (6.55)$$

从而有

定理 6.59

$$|\boldsymbol{r}(t)-\boldsymbol{B}(t)| \leqslant \frac{1}{4}|1-w|\frac{\max\{|\boldsymbol{P}_1-\boldsymbol{P}_0|,|\boldsymbol{P}_1-\boldsymbol{P}_2|\}}{\min\{w,1\}},$$

$$t\in[0,1]. \qquad (6.56)$$

证明 由(6.54)及(6.55)有

$$
\begin{aligned}
|\boldsymbol{r}(t)-\boldsymbol{B}(t)| &\leqslant 2|1-w|t(1-t)[(1-t)^2 \\
&\quad + t^2]\frac{\max\{|\boldsymbol{P}_1-\boldsymbol{P}_0|,|\boldsymbol{P}_1-\boldsymbol{P}_2|\}}{\min\{1,w\}} \\
&\leqslant \frac{1}{4}|1-w|\frac{\max\{|\boldsymbol{P}_1-\boldsymbol{P}_0|,|\boldsymbol{P}_1-\boldsymbol{P}_2|\}}{\min\{1,w\}}. \qquad \square
\end{aligned}
$$

通常逼近误差较大的地方是在 $t=\frac{1}{2}$ 处，即在肩点处。因此当用一段 Bézier 曲线作逼近所产生的误差不满足要求时，要先把 $\boldsymbol{r}(t)$ 分成两段

$$
\boldsymbol{r}_1(t)=\frac{w_0^{(1)}\boldsymbol{P}_0^{(1)}(1-u)^2+2w_1^{(1)}\boldsymbol{P}_1^{(1)}u(1-u)+w_2^{(1)}\boldsymbol{P}_2^{(1)}u^2}{w_0^{(1)}(1-u)^2+2w_1^{(1)}u(1-u)+w_2^{(1)}u^2},
$$

$$
u\in[0,1], \tag{6.57}
$$

$$
\boldsymbol{r}_2(u)=\frac{w_0^{(2)}\boldsymbol{P}_0^{(2)}(1-u)^2+2w_1^{(2)}\boldsymbol{P}_1^{(2)}u(1-u)+w_2^{(2)}\boldsymbol{P}_2^{(2)}u^2}{w_0^{(2)}(1-u)^2+2w_1^{(2)}u(1-u)+w_2^{(2)}u^2},
$$

$$
u\in[0,1], \tag{6.58}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
& w_2^{(2)}=w_0^{(1)}=w_0=1, \\
& w_1^{(2)}=w_1^{(1)}=\frac{1}{2}(w_0+w_1)=\frac{1}{2}(1+w), \\
& w_0^{(2)}=w_2^{(1)}=\frac{1}{2}(1+w), \\
& \boldsymbol{P}_0^{(1)}=\boldsymbol{P}_0,\ \boldsymbol{P}_1^{(1)}=\frac{\boldsymbol{P}_0+w\boldsymbol{P}_1}{1+w}, \\
& \boldsymbol{P}_2^{(1)}=\boldsymbol{P}_0^{(2)}=\frac{\frac{1}{2}(\boldsymbol{P}_0+\boldsymbol{P}_2)+w\boldsymbol{P}_1}{1+w}, \\
& \boldsymbol{P}_1^{(2)}=\frac{\boldsymbol{P}_2+w\boldsymbol{P}_1}{1+w},\ \boldsymbol{P}_2^{(2)}=\boldsymbol{P}_0.
\end{aligned}
$$

（见图 6.5）。在每段上 2 次曲线 $\frac{w_0^{(i)}w_2^{(i)}}{(w_1^{(i)})^2}=\frac{2}{1+w}$ 皆为常数，$i=$

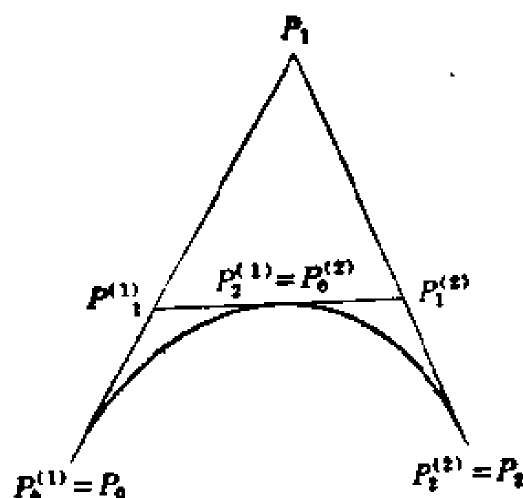


图 6.5

1,2. 为了计算方便,不妨在(6.57),(6.58)中取

$$w_0^{(1)}=w_2^{(1)}=1,\ w_0^{(2)}=w_2^{(2)}=1,\ w_1^{(1)}=w_1^{(2)}=\sqrt{\frac{1+w}{2}}=\bar{w},$$

则可得 $\boldsymbol{r}_1(u)$ 和 $\boldsymbol{r}_2(u)$ 的另一种有理表示式

$$\boldsymbol{r}_1(u)=\frac{\boldsymbol{P}_0^{(1)}(1-u)^2+2\bar{w}\boldsymbol{P}_1^{(1)}u(1-u)+\boldsymbol{P}_2^{(1)}u^2}{(1-u)^2+2\bar{w}u(1-u)+u^2},\quad u\in[0,1], \tag{6.59}$$

和

$$\boldsymbol{r}_2(u)=\frac{\boldsymbol{P}_0^{(2)}(1-u)^2+2\bar{w}\boldsymbol{P}_1^{(2)}u(1-u)+\boldsymbol{P}_2^{(2)}u^2}{(1-u)^2+2\bar{w}u(1-u)+u^2},\quad u\in[0,1]. \tag{6.60}$$

相应于每段 Bézier 曲线

$$\boldsymbol{B}_1(u)=\sum_{i=0}^{2}\boldsymbol{P}_i^{(1)}B_{i,2}(u)\ \text{及}\ \boldsymbol{B}_2(u)=\sum_{i=0}^{2}\boldsymbol{P}_i^{(2)}B_{i,2}(u)$$

的逼近误差为

$$|\boldsymbol{r}_i(u)-\boldsymbol{B}_i(u)|\leqslant\frac{1}{4}|1-\bar{w}|\frac{\max\{|\boldsymbol{P}_1^{(i)}-\boldsymbol{P}_0^{(i)}|,|\boldsymbol{P}_2^{(i)}-\boldsymbol{P}_1^{(i)}|\}}{\min\{1,w\}}$$

$$=\frac{1}{4}\left|1-\sqrt{\frac{1+w}{2}}\right|\frac{\max\{|\boldsymbol{P}_1^{(i)}-\boldsymbol{P}_0^{(i)}|,|\boldsymbol{P}_1^{(i)}-\boldsymbol{P}_2^{(i)}|\}}{\min\{1,w\}},$$

$$i=1,2. \tag{6.61}$$

比较(6.56)与(6.61)的右端项可知,二分法逼近的误差递减速度大约为$\dfrac{1-\sqrt{\dfrac{1+w}{2}}}{1-w}\cdot\dfrac{w}{1+w}$。借助于上面的二分法，可以得到原2次曲线$r(t)$的一条分段多项式逼近曲线。记进行$k$次二分法之后所得到的分段 Bézier 曲线为$B^{(k)}(t)$，$t\in[0,1]$。

定理 6.60 当$k\to\infty$时,曲线$B^{(k)}(t)$在整个区间上一致收敛到$r(t)$。

证明 若记(6.56)及(6.51)的右端项分别为ε及$\varepsilon^{(1)}$,则有

$$\begin{cases}\varepsilon^{(1)}\leqslant\dfrac{w\left(1-\sqrt{\dfrac{1+w}{2}}\right)}{1-w^2}\varepsilon,\\ \bar{w}=\sqrt{\dfrac{1+w}{2}}.\end{cases}\tag{6.62}$$

设$\varepsilon^{(0)}=\varepsilon$, $w^{(0)}=w$, $\varepsilon^{(k)}=\dfrac{w^{(k-1)}\left(1-\sqrt{\dfrac{1+w^{(k-1)}}{2}}\right)}{(1-w^{(k-1)})(1+w^{(k-1)})}\varepsilon^{(k-1)}$, $w^{(k)}=\bar{w}^{(k-1)}$, $k=1,2,\cdots$,则当$k\to\infty$时,$\lim\limits_{k\to\infty}w^{(k)}=1$,$\lim\limits_{k\to\infty}\varepsilon^{(k)}=0$。 □

我们知道,有理 Bézier 曲线段及多项式 Bézier 曲线都是对与之相应的特征多边形的一种逼近。不仅如此,通过升阶,可以使相应的控制多边形随着升阶次数的增多，收敛到所定义的有理 Bézier 曲线。因此先将2次曲线升阶成高次有理 Bézier 曲线,再利用其控制顶点定义 Bézier 曲线,即可得到原2次曲线的一种逼近。下面讨论这种逼近的误差。

由有理 Bézier 曲线的升阶公式,可以将2次曲线段(6.52)等价地表示成m次的有理 Bézier 曲线

$$r^{(m-2)}=\frac{\sum_{i=0}^{m}w_i^{(m-2)}P_i^{(m-2)}B_{i,m}(t)}{\sum_{i=0}^{m}w_i^{(m-2)}B_{i,m}(t)},\quad t\in[0,1],\tag{6.63}$$

其中$m\geqslant 2$且

$$w_i^{(m-2)}=\sum_{j=0}^{2}\frac{\binom{i}{j}\binom{m-i}{2-j}}{\binom{m}{2}}w_j, \tag{6.64}$$

$$P_i^{(m-2)}=\frac{\sum_{j=0}^{2}\frac{\binom{i}{j}\binom{m-i}{2-j}}{\binom{m}{2}}w_jP_j}{w_i^{(m-2)}}, \tag{6.65}$$

$i=0,1,\cdots,m$。由 $P_i^{(m-2)}$，$i=0,1,\cdots,m$ 所定义的 Bézier 曲线为

$$B^{(m-2)}(t)=\sum_{i=0}^{m}P_i^{(m-2)}B_{i,m}(t),\quad t\in[0,1]. \tag{6.66}$$

对于任意m次有理 Bézier 曲线 $r(t)$ 及具有与之相同控制顶点的 Bézier 曲线 $B(t)$，考虑差

$$\begin{aligned}
r(t)-B(t)&=\frac{1}{D}\left[\sum_{i=0}^{m}w_iP_iB_{i,m}(t)-\left(\sum_{i=0}^{m}P_iB_{i,m}(t)\right)D\right]\\
&=\frac{1}{D}\left[\sum_{i=0}^{m}(w_i-1)(P_i-B(t))B_{i,m}(t)\right]\\
&=\frac{1}{D}\left[\sum_{i=0}^{m}(w_i-1)(P_i-B(t))B_{i,m}(t)\right]\\
&=\frac{1}{D}\left[\sum_{i=0}^{m}(w_i-1)\left(\sum_{j=0}^{m}(P_i-P_j)B_{j,m}(t)\right)B_{i,m}(t)\right]\\
&=\sum_{k=0}^{2m}\left[\sum_{\substack{i+j=k\\0\leqslant i,j\leqslant m}}(w_i-w_j)(P_i-P_j)B_{i,m}(t)B_{j,m}(t)\right]\Big/D\\
&=\sum_{k=0}^{2m}\left(\sum_{\substack{i+j=k\\0\leqslant i,j\leqslant m}}\frac{\binom{m}{i}\binom{m}{j}}{\binom{2m}{k}}(w_i-w_j)(P_i-P_j)B_{k,2m}(t)\right)\Big/D
\end{aligned}$$

$$= \left[\sum_{k=0}^{2m} Q_k B_{k,2m}(t)\right] / D, \tag{6.67}$$

其中

$$D = \sum_{i=0}^{m} w_i B_{i,m}(t),$$

$$Q_k = \sum_{\substack{i+j=k \\ 0 \leqslant i,j \leqslant m}} \frac{\binom{m}{i}\binom{m}{j}}{\binom{2m}{k}} (w_i - w_j)(P_i - P_j), \ k = 0,1,\cdots,2m.$$

则可知下述定理成立：

定理 6.61 $$|r(t) - B(t)| \leqslant \frac{\max\limits_{0 \leqslant k \leqslant 2m} |Q_k|}{\min\limits_{0 \leqslant i \leqslant m} |w_i|}. \tag{6.68}$$

由上述定理，可以得到 $r^{(m-2)}(t)$ 与 $B^{(m-2)}(t)$ 之间的误差估计．特别地，当 $m=3$ 时有

$$\begin{aligned} |r^{(1)}(t) - B^{(1)}(t)| &= \frac{1}{D}[3(w_1^{(1)} - 1) + (1-t)\{[P_1^{(1)}(1-t) \\ &\quad + P_2^{(1)}t] - B^{(1)}(t)\}] \\ &\leqslant \frac{1}{4}|1-w| \frac{\max\{|P_1^{(1)} - P_0^{(1)}|, |P_2^{(1)} - P_1^{(1)}|, |P_3^{(1)} - P_2^{(1)}|\}}{\min\{w^{(1)}, 1\}}, \end{aligned} \tag{6.69}$$

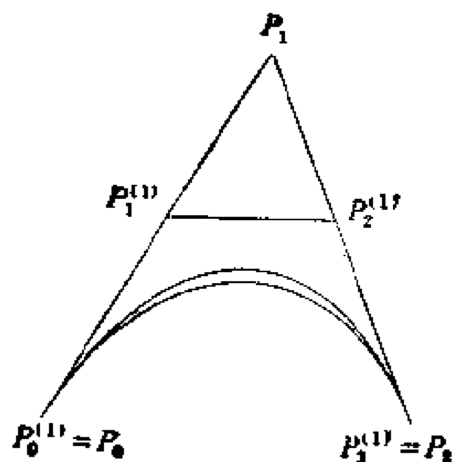


图 6.6

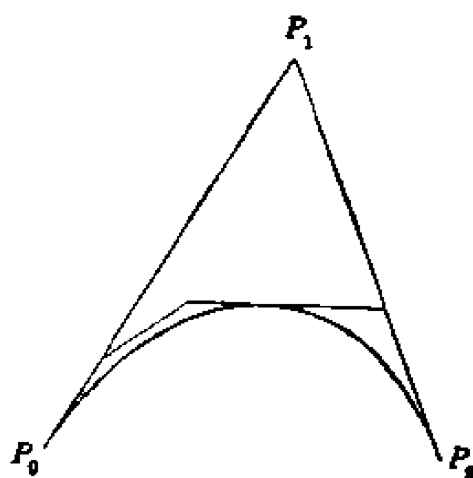


图 6.7

(参见图 6.6)。

二分法同升阶法相结合是比较有效的逼近方法。图 6.7 表示的是利用 3 次 Bézier 曲线逼近 2 次曲线的情况。

除前面指出的逼近方法外，另一常见的方法是基于几何光滑的 Hermite 逼近方法。设 2 次曲线在端点处的型值，切矢及曲率分别为：

$$\begin{cases} r(0) = P_0, \\ r(1) = P_2, \\ \dot{r}(0) = 2w(P_1 - P_0), \\ \dot{r}(1) = 2w(P_2 - P_1), \\ k(0) = \dfrac{1}{2w^2}\dfrac{|(P_1 - P_0)\times(P_2 - P_1)|}{|P_1 - P_0|^3}, \\ k(1) = \dfrac{1}{2w^2}\dfrac{|(P_1 - P_0)\times(P_2 - P_1)|}{|P_2 - P_1|^3}. \end{cases} \tag{6.70}$$

由此可以得到 5 次 Hermite 参数曲线 $H(t)$，使其满足

$$\begin{cases} H(0) = r(0),\ H(1) = r(1),\ \dot{H}(0) = \alpha_0\dot{r}(0), \\ \dot{H}(1) = \alpha_1\dot{r}(1), \\ \dfrac{|\dot{H}(0)\times\ddot{H}(0)|}{|\dot{H}(0)|^3} = k(0),\ \dfrac{|\dot{H}(1)\times\ddot{H}(1)|}{|\dot{H}(1)|^3} = k(1). \end{cases} \tag{6.71}$$

由 Hermite 切触插值的逼近性质可知，在曲线端点处满足 k 阶切触条件的 Hermite 逼近的误差阶为 $0(h^{2k+2})$，其中 h 为曲线两端点间的距离。由于对应于 Hermite 逼近的二分法的逼近速度为 2^{2k+2}。图 6.8 所示的为 5 次 Hermite 曲线逼近 2 次曲线的情形。

4.3. 一般代数曲线、曲面的逼近

首先讨论参数曲线、曲面的逼近问题。这里的曲线、曲面均假定为正则的。

1. 多项式曲线间的逼近

如果 $P(t)$，$Q(t)$ 分别是 m，n 次多项式参数曲线段，则它们可以分别表示成 m，n 次的 Bézier 形式：

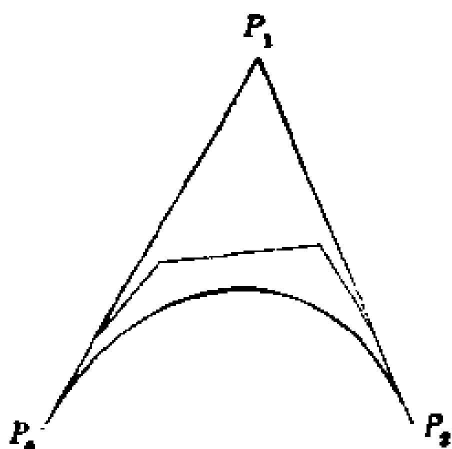


图 6.8

$$P(t)=\sum_{i=0}^{m} p_i B_{i,m}(t),\quad t\in[0,1],$$

$$Q(t)=\sum_{i=0}^{n} q_i B_{i,n}(t),\quad t\in[0,1].$$

不妨设 $m\geqslant n$，通过升阶公式，可以将 $Q(t)$ 表示为 m 次的 Bézier 曲线

$$Q(t)=\sum_{i=0}^{m} q_i^{(m-n)} B_{i,m}(t),\quad t\in[0,1],\tag{6.72}$$

其中

$$q_i^{(m-n)}=\sum_{j=0}^{n}\frac{\binom{i}{j}\binom{m-i}{n-j}}{\binom{m}{n}}q_j,\quad i=0,1,\cdots,m.\tag{6.73}$$

关于两曲线 $Q(t)$ 与 $P(t)$ 间的误差有下面的定理：

定理 6.62 曲线 $P(t)$ 与 $Q(t)$ 间的距离为

$$|P(t)-Q(t)|\leqslant\max_{0\leqslant i\leqslant m}|p_i-q_i^{(m-n)}|.\tag{6.74}$$

如果 $P(t)$ 与 $Q(t)$ 在两端点处满足

$$\begin{cases}\dfrac{d^j}{dt^j}P(0)=\dfrac{d^j}{dt^j}Q(0),\\[2mm] \dfrac{d^j}{dt^j}P(1)=\dfrac{d^j}{dt^j}Q(1)\end{cases}\quad j=0,1,\cdots,r,\quad r\geqslant 0\tag{6.75}$$

则当 $2r+1<m$ 时,有

$$\begin{cases} q_j^{(m-n)}=p_j, \\ q_{m-j}^{(m-n)}=p_{m-j}, \\ j=0,1,\cdots,r; \end{cases} \tag{6.76}$$

而当 $2r+1\geqslant m$ 时, $P(t)\equiv Q(t)$, $t\in[0,1]$。

定理 6.63 当条件(6.75)成立时,有

$$|P(t)-Q(t)|\leqslant \max_{r+1\leqslant i\leqslant m-r-1}|p_i-q_i^{(m-n)}|\sum_{i=r+1}^{m-r-1}B_{i,m}\left(\frac{1}{2}\right). \tag{6.77}$$

证明

$$\begin{aligned} |P(t)-Q(t)| &= \left|\sum_{i=r+1}^{m-r-1}(p_i-q_i^{(m-n)})B_{i,m}(t)\right| \\ &\leqslant \max_{r+1\leqslant i\leqslant m-r-1}|p_i-q_i^{(m-n)}|\sum_{i=r+1}^{m-r-1}B_{i,m}(t) \\ &\leqslant \max_{r+1\leqslant i\leqslant m-r-1}|p_i-q_i^{(m-n)}|\sum_{i=r+1}^{m-r-1}B_{i,m}\left(\frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$ □

式(6.77)正是多项式曲线的 Hermite 逼近的误差估计。 值得指出的是,满足条件(6.75)的正则 Hermite 插值曲线不一定存在。仅就常见的 3 次和 5 次多项式曲线间的逼近问题来说明。如图 6.9, p_0, p_1, $\cdots$, p_5 是平面 5 次 Bézier 曲线 $P(t)$ 的凸控制顶点,且 $\overline{p_0p_1}$ 和 $\overline{p_5p_4}$ 的延长线交于点 M。 $Q(t)=\sum_{i=0}^{3}q_iB_{i,3}(t)$ 为 3 次的 Bézier 曲线,且满足 $Q(0)=P(0)$, $Q(1)=P(1)$, $\frac{d}{dt}Q(0)=\frac{d}{dt}P(0)$, $\frac{d}{dt}Q(1)=\frac{d}{dt}P(1)$, 从而 $p_0=q_0$, $p_5=q_3$, $3(q_1-q_0)=5(p_1-p_0)$, $3(q_3-q_2)=5(p_5-p_4)$。如果 M 在线段 $\overline{q_0q_1}$ 或者 $\overline{q_2q_3}$ 上,则 $Q(t)$ 在任意 $t\in[0,1]$ 处均存在拐点或奇点。另外,如果 p_0, p_1, p_4, p_5 共线, $Q(t)$ 只能是一段直线,而且存在奇点,如图 6.10。为解决这一问题,将插值条件减弱为几何光滑条件,并对 $P(t)$ 进行分段逼近,以使所求的分段

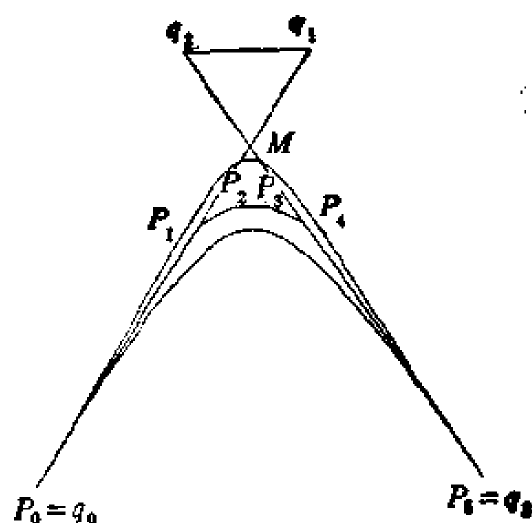


图 6.9

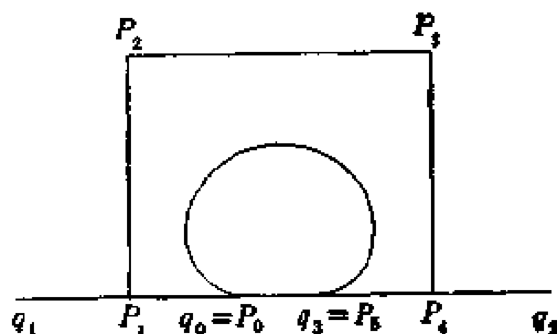


图 6.10

较低次曲线满足正则条件及精度要求. 通常把二分法及误差估计(6.77)结合起来,构造分段几何光滑 Hermite 插值曲线，以逐步求得逼近曲线. 以几何光滑条件构造分段 Hermite 插值曲线时，在满足正则及保形的前提下，插值条件应尽可能地反映原曲线的固有值. 只有这样，才能使得误差估计(6.74)或(6.77)更为精确.(当然对于 $\boldsymbol{Q}(t)$ 与 $\boldsymbol{P}(t)$ 在端点处满足 GC^r 的情形，误差估计(6.77)不再成立.）我们知道，同一曲线存在着不同的参数表示. 例如，$\boldsymbol{P}(t)=(1-t^2)^2\boldsymbol{p}_0+2(1-t^2)t^2\boldsymbol{p}_1+t^4\boldsymbol{p}_2$ 与 $\boldsymbol{Q}(t)=(1-u)^3\boldsymbol{q}_0+3(1-u)^2u\boldsymbol{q}_1+3(1-u)u^2\boldsymbol{q}_2+u^3\boldsymbol{q}_3, u,t\in[0,1]$,表示的是同一条曲线(见图 6.11)，其中

$$\boldsymbol{q}_0=\boldsymbol{p}_0,\ \boldsymbol{q}_3=\boldsymbol{p}_2,\ \boldsymbol{q}_1=\frac{\boldsymbol{p}_0+2\boldsymbol{p}_1}{3}, \boldsymbol{q}_2=\frac{2\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2}{3}.$$

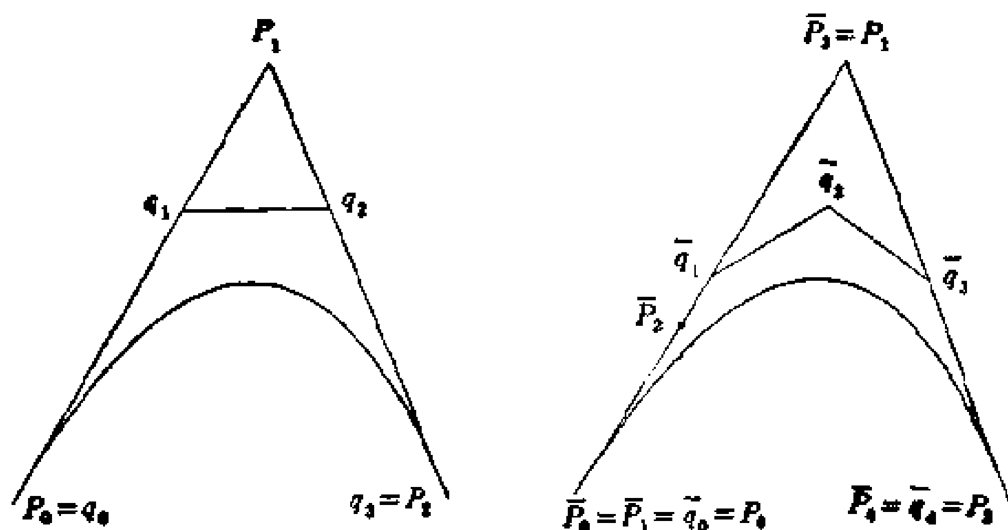


图 6.11

如将 $\boldsymbol{P}(t)$ 与 $\boldsymbol{Q}(t)$ 均表示成 4 次 Bézier 形式:

$$\boldsymbol{P}(t)=\sum_{i=0}^{4}\overline{\boldsymbol{p}}_iB_{i,4}(t),\quad t\in[0,1],$$

$$\boldsymbol{Q}(t)=\sum_{i=0}^{4}\overline{\boldsymbol{q}}_iB_{i,4}(t),\quad t\in[0,1],$$

其中 $\overline{\boldsymbol{p}}_0=\boldsymbol{p}_0$, $\overline{\boldsymbol{p}}_1=\boldsymbol{p}_0$, $\overline{\boldsymbol{p}}_2=\dfrac{2\boldsymbol{p}_0+\boldsymbol{p}_1}{3}$, $\overline{\boldsymbol{p}}_3=\boldsymbol{p}_1$, $\overline{\boldsymbol{p}}_4=\boldsymbol{p}_2$, $\overline{\boldsymbol{q}}_0=\boldsymbol{p}_0$, $\overline{\boldsymbol{q}}_1=\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{p}_0+\boldsymbol{p}_1)$, $\overline{\boldsymbol{q}}_2=\dfrac{1}{6}(\boldsymbol{p}_0+4\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2)$, $\overline{\boldsymbol{q}}_3=\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2)$, $\overline{\boldsymbol{q}}_4=\boldsymbol{p}_2$. 显然 $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant 4}|\overline{\boldsymbol{p}}_i-\overline{\boldsymbol{q}}_i|\geqslant\dfrac{1}{2}|\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_2|$. 不难验证, $\dfrac{d}{dt}\boldsymbol{P}(0)=0$, $\dfrac{d}{dt}\boldsymbol{P}(t)\neq 0$, $t\in(0,1]$. 造成估计不准确的根本原因,不是 $\boldsymbol{P}(t)$ 在 $t=0$ 处的奇性, 而是由于 $\boldsymbol{P}(t)$ 与 $\boldsymbol{Q}(t)$ 的参数选取。

对于非参数曲线, 即多项式间的逼近, 误差估计(6.74)与(6.77)都是很有效的,前面提到的各种问题已不复存在。

2. 多项式曲线间的逼近

任何多项式参数曲面都可以表示成乘积型 Bézier 曲面或三角 Bézier 曲面。所以任意指定的两个多项式参数曲面$\boldsymbol{P}(u,v)$和$\boldsymbol{Q}(u,v)$均可通过升阶公式表示成相同次数的曲面。

设

$$\boldsymbol{P}(u,v)=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\boldsymbol{p}_{ij}B_{i,m}(u)B_{j,n}(v),$$

$$\boldsymbol{Q}(u,v)=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\boldsymbol{q}_{ij}B_{i,m}(u)B_{j,n}(v).$$

借助三角不等式，容易证明。

定理 6.64

$$|\boldsymbol{P}(u,v)-\boldsymbol{Q}(u,v)|\leqslant\max_{\substack{0\leqslant i\leqslant m\\0\leqslant j\leqslant n}}|\boldsymbol{p}_{ij}-\boldsymbol{q}_{ij}|,\qquad(6.78)$$

$$(u,v)\in[0,1]\times[0,1].$$

定理 6.65 若 $\boldsymbol{p}_{ij}=\boldsymbol{q}_{ij}$，其中$0\leqslant i\leqslant r$ 或 $m-r\leqslant i\leqslant m$，$0\leqslant j\leqslant l$，或 $n-l\leqslant j\leqslant n$，$0<2r+1<m$，$0<2l+1<n$，则有

$$|\boldsymbol{P}(u,v)-\boldsymbol{Q}(u,v)|\leqslant\max_{\substack{r+1\leqslant i\leqslant m-r-1\\l+1\leqslant j\leqslant n-l-1}}|\boldsymbol{p}_{ij}-\boldsymbol{q}_{ij}|\sum_{i=r+1}^{m-r-1}\sum_{j=l+1}^{n-l-1}\cdot B_{i,m}\left(\frac{1}{2}\right)B_{j,n}\left(\frac{1}{2}\right),\qquad(6.79)$$

$(u,v)\in[0,1]\times[0,1]$.

若 $2r+1\geqslant m$，$2l+1\geqslant n$，则有 $\boldsymbol{P}(u,v)=\boldsymbol{Q}(u,v)$。

如果$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{\tau})=\sum\limits_{|\lambda|=n}\boldsymbol{p}_{\lambda}B_{\lambda}^{n}(\boldsymbol{\tau})$ 及 $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{\tau})=\sum\limits_{|\lambda|=n}\boldsymbol{q}_{\lambda}B_{\lambda}^{n}(\boldsymbol{\tau})$ 为三角 Bézier 曲面片，其中 $\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$，$|\boldsymbol{\lambda}|=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$，$\lambda_i\geqslant 0$，$\lambda=1,2,3$，而 $\boldsymbol{\tau}=(\tau_1,\tau_2,\tau_3)$ 为重心坐标，则有

定理 6.66 $|\boldsymbol{P}(\boldsymbol{\tau})-\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{\tau})|\leqslant\max\limits_{|\lambda|=n}|\boldsymbol{p}_{\lambda}-\boldsymbol{q}_{\lambda}|$ (6.80)

定理 6.67 当 $0\leqslant\lambda_1\leqslant r$ 或$0\leqslant\lambda_2\leqslant r$ 或 $0\leqslant\lambda_3\leqslant r$ 时，有 $\boldsymbol{p}_{\lambda}=\boldsymbol{q}_{\lambda}$，则

$$|\boldsymbol{P}(\boldsymbol{\tau})-\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{\tau})|\leqslant\max_{\substack{|\lambda|=n\\r+1\leqslant\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3}}|\boldsymbol{p}_{\lambda}-\boldsymbol{q}_{\lambda}|$$

$$\cdot \sum_{\substack{r+1\leq\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3 \\ |\lambda|=n}} B_\lambda^n\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right), \tag{6.81}$$

另外，当 $\lambda_1 \geqslant n-r$ 或 $\lambda_2 \geqslant n-r$ 或 $\lambda_3 \geqslant n-r$ 时，$\boldsymbol{p}_\lambda = \boldsymbol{q}_\lambda$，则

$$|\boldsymbol{P}(\boldsymbol{\tau}) - \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{\tau})| \leqslant \max_{\substack{|\lambda|=n \\ n-r>\lambda_i \\ i=1,2,3}} |\boldsymbol{p}_\lambda - \boldsymbol{q}_\lambda| \sum_{\substack{|\lambda|=n \\ \lambda_i<n-r \\ i=1,2,3}} B_\lambda^n\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) \tag{6.82}$$

式(6.81)，(6.82)分别是 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{\tau})$ 与 $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{\tau})$ 在边界，顶点处满足 C^r 切触条件时的逼近误差。

用低次光滑插值曲面逼近高次曲面同样会出现非正则的情况。在实际问题中，为满足一定的误差限制和正则性要求，将被逼近曲面进行细分，并在几何光滑条件下构造分片光滑插值曲面的方法是有效的。乘积型曲面的细分方法比较简单(如图 6.12(a) 或 (b))。

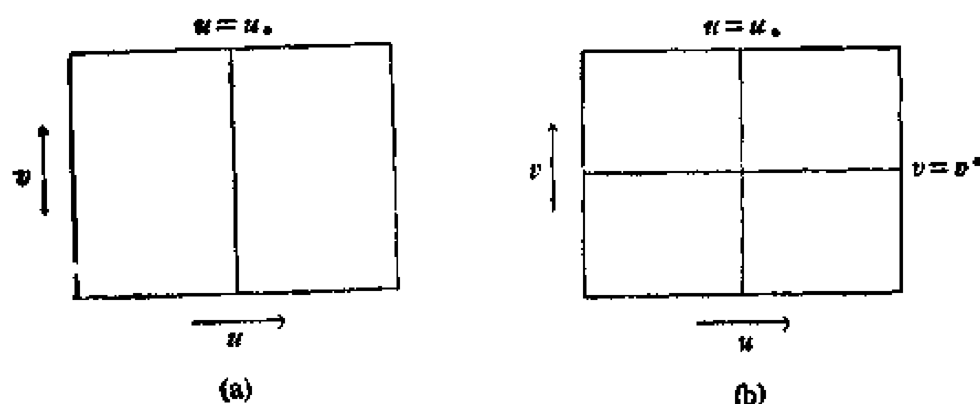


图 6.12

细分算法可由 Bézier 曲线的算法推广而得到。设

$$\boldsymbol{P}(u,v) = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} \boldsymbol{p}_{ij}B_{i,m}(u)B_{j,n}(v),\ 0 \leqslant u,\ v \leqslant 1,$$

在 $u=u_*$ 上将其分成两片 Bézier 曲面

$$\boldsymbol{p}_1(s,t) = \sum_{i=0}^{m} \boldsymbol{p}_{ij}^{(1)}B_{i,m}(s)B_{j,n}(t)$$

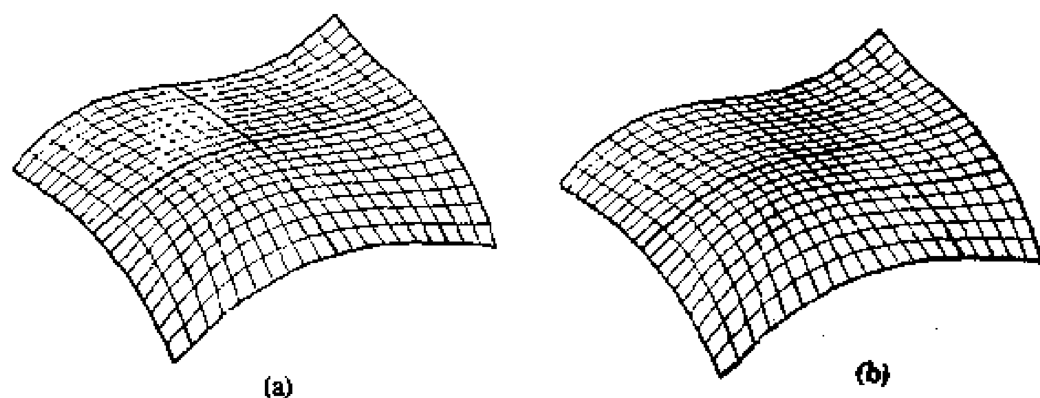
及

$$p_2(s,t)=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}p_{ij}^{(2)}B_{i,m}(s)B_{j,n}(t),\quad 0\leqslant(s,t)\leqslant 1,\text{ 则}$$

$$p_{ij}^{(1)}=\sum_{l=0}^{i}p_{lj}B_{l,i}(u_*),\quad i=0,1,\cdots,m,\quad j=0,1,\cdots,n,\tag{6.83}$$

$$p_{ij}^{(2)}=\sum_{l=i}^{m}p_{lj}B_{l-i,m-i}(u_*),\quad i=0,1,\cdots,m,\quad j=0,1,\cdots,n.\tag{6.84}$$

类似地，也可得到在 $v=v_*$ 上细分曲面的算法。图 6.13 所示的是双 3 次与双 5 次曲面的情况。



(a) (b)

图 6.13

对于三角 Bézier 片 $P(\tau)$ 上的细分方法将与光滑性的要求密切相关。例如为构造 C^0 的分片 3 次曲面片，采用任何细方法都是可行的。但从误差尽可能小的要求考虑，须避免产生狭长三角形。因此采用如图 6.14 所示的细分方法是适宜的。

利用三角形顶点处的型值及两个线性无关方向上的切矢，可构造 C^0 的 3 次插值曲面 $B(\tau)=\sum_{|\lambda|=3}b_\lambda B_\lambda^3(\tau)$，其中每个边界上九个控制点可由已知的九个插值条件来确定，而剩下的 b_{111} 可借助于多种方法来确定。例如，一种使 $B(\tau)$ 具有 2 次代数精度的取法是令

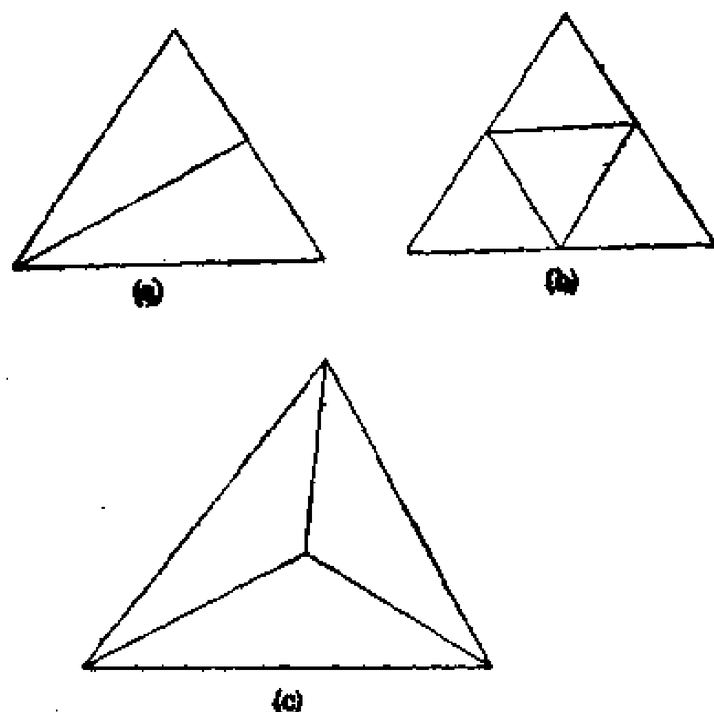


图 6.14

$$b_{111}=\frac{1}{4}(b_{201}+b_{102}+b_{021}+b_{012}+b_{210}+b_{120})$$
$$-\frac{1}{6}(b_{300}+b_{030}+b_{003}).$$

构造 GC^1 分片 3 次曲面片，一般要在 (a) 的基础上进行 HCT 细分，如图 6.14(c)。误差估计 (6.78)—(6.82) 对于非参数型的多项式函数亦成立。在构造几何光滑的分片逼近曲面时，需要在满足正则性条件的前提下，尽可能地插值原曲面片上的固有信息。

3. 用多项式曲线、曲面逼近有理曲线、曲面

设

$$P(t)=\frac{\sum_{i=0}^{n} w_i p_i B_{i,n}(t)}{\sum_{i=0}^{n} w_i B_{i,n}(t)},\quad t\in[0,1]$$

为 n 次有理 Bézier 曲线，

$$Q(t)=\sum_{i=0}^{n} q_i B_{i,n}(t),\quad t\in[0,1]$$

为 n 次 Bézier 曲线，则

$$P(t)-Q(t)=\left\{\sum_{i=0}^{n} w_i p_i B_{i,n}(t)-\left(\sum_{i=0}^{n} q_i B_{i,n}(t)\right)\cdot\left(\sum_{i=0}^{n} w_i B_{i,n}(t)\right)\right\}\Big/\left\{\sum_{i=0}^{n} w_i B_{i,n}(t)\right\}$$

$$=\frac{\sum_{i=0}^{n} w_i\left(p_i-\sum_{j=0}^{n} q_j B_{j,n}(t)\right)B_{i,n}(t)}{\sum_{i=0}^{n} w_i B_{i,n}(t)}$$

$$=\frac{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}(w_i p_i-w_i q_j)B_{j,n}(t)B_{i,n}(t)}{\sum_{i=0}^{n} w_i B_{i,n}(t)}$$

$$=\frac{\sum_{k=0}^{2n} R_k B_{k,2n}(t)}{\sum_{i=0}^{n} w_i B_{i,n}(t)}, \tag{6.85}$$

其中

$$R_k=\sum_{\substack{i+j=k\\ 0\leqslant i,j\leqslant n}}(w_i-w_j)(p_i-q_j)\frac{\binom{n}{i}\binom{n}{j}}{\binom{2n}{k}},\quad k=0,1,\cdots,2n. \tag{6.86}$$

如果 $w_i>0$，$i=1,2,\cdots,n$，

$$w_k^{(n)}=\sum_{i=0}^{n}\frac{\binom{k}{i}\binom{2n-k}{n-i}}{\binom{2n}{n}}w_i>0,\quad k=0,1,\cdots,2n,$$

则由有理 Bézier 曲线的凸包性质可得

定理 6.68 $|P(t)-Q(t)|\leqslant\max\limits_{0\leqslant k\leqslant 2n}\left|\frac{R_k}{w_k^{(n)}}\right|$， (6.87)

$$t \in [0,1].$$

这是多项式曲线与有理曲线间的逼近误差的一种估计式。对于低次的情形，有更精确的估计式，例如(6.56)，(6.69)等。

类似地，我们可以得到三角有理片 $P(\tau) = \dfrac{\sum\limits_{|\lambda|=n} w_\lambda p_\lambda B_\lambda^n(\tau)}{\sum\limits_{|\lambda|=n} w_\lambda B_{\lambda,n}(\tau)}$

与三角多项式片 $Q(\tau) = \sum\limits_{|\lambda|=n} q_\lambda B_\lambda^n(\tau)$ 之间的误差估计。

定理 6.69 $$|P(\tau) - Q(\tau)| \leqslant \max_{|\lambda|=2n} \left| \frac{R_\lambda}{w_\lambda^{(n)}} \right|, \tag{6.88}$$

$$|\tau| = 1,\ \tau_i \geqslant 0,\ i = 1,2,3.$$

其中 $w_\sigma > 0$，$|\sigma| = n$ 且

$$R_\lambda = \sum_{\substack{|\lambda| = n \\ |\delta| = n}} (w_\sigma - w_\delta)(p_\sigma - p_\delta) \frac{\binom{n}{\sigma}\binom{n}{\delta}}{\binom{2n}{\sigma+\delta}}, \tag{6.89}$$

$$w_\lambda^{(n)} = \sum_{|\lambda|=n} \frac{\binom{\lambda_1}{\sigma_1}\binom{\lambda_2}{\sigma_2}\binom{\lambda_3}{\sigma_3}}{\binom{2n}{n}} w_\sigma, \tag{6.90}$$

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3),\quad |\lambda| = 2n.$$

4. 隐式平面代数曲线的逼近

设 $f(x,y) = 0$ 为一 n 次平面代数曲线，往求一分段有理或多项式参数曲线，使之其与给定代数曲线 $f(x,y) = 0$ 间的误差满足给定的要求。对于有理的代数曲线，已有一些算法可用以解决它们的有理参数化问题(参见[112—115])。例如，设

$$f(x,y) = f_1(x)y + f_2(x), \tag{6.91}$$

则显然有如下的参数化表示式

$$\begin{cases} x = t, \\ y = \dfrac{-f_2(t)}{f_1(t)}. \end{cases} \tag{6.92}$$

2 次代数曲线的有理参数化方法较多．除本节前面给出的方法外，此处再介绍一种方法[112]．

$$f(x,y)=ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$$

的齐次式为

$$f^*(x,y,w)=ax^2+bxy+cy^2+dxw+eyw+fw^2=0,$$

利用齐次坐标变换

$$\begin{cases} x=a_1\tilde{x}+b_1\tilde{y}+c_1\tilde{w}, \\ y=a_2\tilde{x}+b_2\tilde{y}+c_2\tilde{w}, \\ w=a_3\tilde{x}+b_3\tilde{y}+c_3\tilde{w}, \end{cases} \tag{6.93}$$

并令齐次式 $f^*(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{w})$ 中 $\tilde{y}^2$ 项的系数 $f^*(b_1,b_2,b_3)$ 为零，可得

$$f^*(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{w})=f_1^*(\tilde{x},\tilde{w})\tilde{y}+f_2^*(\tilde{x},\tilde{w}), \tag{6.94}$$

或者

$$f\left(\frac{\tilde{x}}{\tilde{w}},\frac{\tilde{y}}{\tilde{w}}\right)=f_1^*\left(\frac{\tilde{x}}{\tilde{w}},1\right)\frac{\tilde{y}}{\tilde{w}}+f_2^*\left(\frac{\tilde{x}}{\tilde{w}},1\right). \tag{6.95}$$

由此得到如下参数表达式

$$\begin{cases} x=\dfrac{a_1\dfrac{\tilde{x}}{\tilde{w}}+b_1\dfrac{\tilde{y}}{\tilde{w}}+c_1}{a_3\dfrac{\tilde{x}}{\tilde{w}}+b_3\dfrac{\tilde{y}}{\tilde{w}}+c_3}=\dfrac{a_1t+b_1\dfrac{f_2^*(t,1)}{f_1^*(t,1)}+c_1}{a_3t+b_3\dfrac{f_2^*(t,1)}{f_1^*(t,1)}+c_3}, \\ y=\dfrac{a_2\dfrac{\tilde{x}}{\tilde{w}}+b_2\dfrac{\tilde{y}}{\tilde{w}}+c_2}{a_3\dfrac{\tilde{x}}{\tilde{w}}+b_3\dfrac{\tilde{y}}{\tilde{w}}+c_3}=\dfrac{a_2t+b_2\dfrac{f_2^*(t,1)}{f_1^*(t,1)}+c_2}{a_2t+b_3\dfrac{f_2^*(t,1)}{f_1^*(t,1)}+c_3}. \end{cases} \tag{6.96}$$

关于齐次变换的系数矩阵

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

应为非奇异的．可将 (b_1, b_2, b_3) 取为 2 次曲线上的某点的齐次坐标，a_1 和 c_2 取为 1，a_2, a_3, c_1, c_3 取为零．对于具有奇点的 3 次曲线，(b_1, b_2, b_3) 应取为奇点坐标．

对于非有理的代数曲线，一种自然的参数逼近方法是利用分

段有理的代数曲线逼近，然后再进行有理参数化．通常用分段2次曲线来逼近已知曲线．下面讨论任意两条非奇代数曲线段的逼近误差估计．

设 $g(x,y)=0$ 为 $f(x,y)=0$ 的低次逼近曲线，我们只须考察它们在一三角形 T 上的逼近性质． 假定 $f(x,y)$ 在 T 上沿着与曲线相交边的方向是单调的，且 $f(x,y)$ 与 $g(x,y)$ 的 Bézier 片分别为 $f(\tau)=\sum_{|\lambda|=n} p_\lambda B_\lambda^n(\tau)$ 与 $g(\tau)=\sum_{|\lambda|=n} q_\lambda B_\lambda^n(\tau)$，则

$$\max_{(x,y)\in T}|f(x,y)-g(x,y)|\leqslant \max_{|\lambda|=n}|p_\lambda-q_\lambda|. \qquad (6.97)$$

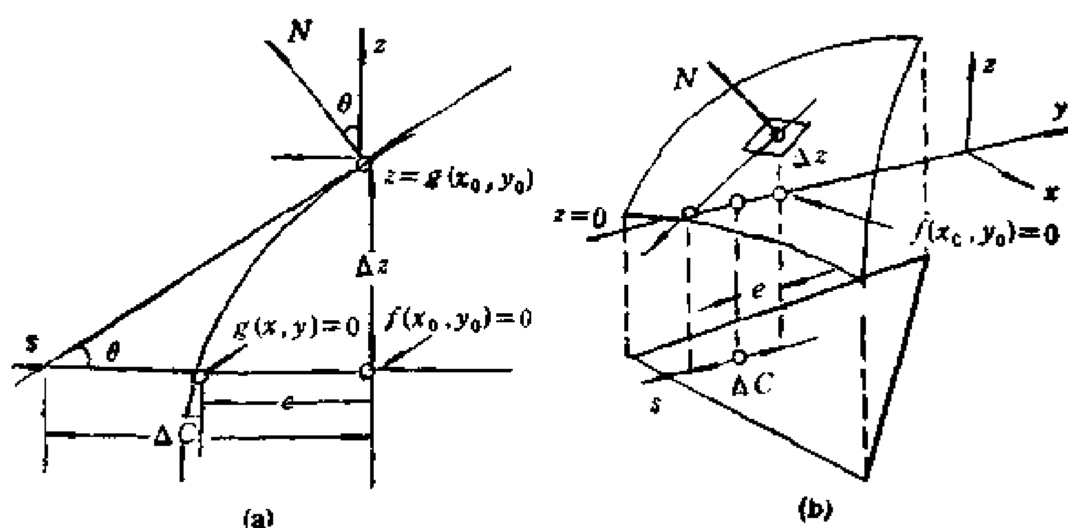


图 6.15

记曲线 $f(x,y)=0$ 上任一点 $(x_0,y_0)\in T$ 到 $g(x,y)=0$ 的距离为 $\varepsilon(x_0,y_0)$，曲面 $z=g(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处的法矢为 $\boldsymbol{N}=(-g_x,-g_y,1)$．这里我们只考虑代数曲线附近的情形，因此可假定 $\boldsymbol{N}\doteq(0,0,1)$．(参见图6.15)．因而有

$$\varepsilon(x_0,y_0)\leqslant\left|\frac{f(x_0,y_0)-g(x_0,y_0)}{\sqrt{(-g_x)^2+(-g_y)^2}}\right|=\left|\frac{\Delta z}{\Delta c}\right|. \qquad (6.98)$$

于是我们有

定理 6.70[108] 两代数曲线 $f(x,y)=0$，$g(x,y)=0$ 间的最大距离 $\varepsilon_{\max}$ 满足

$$e_{max} \leqslant \max_{(x_0,y_0)\in T}\left|\frac{f(x_0,y_0)-g(x_0,y_0)}{\sqrt{(-g_x)^2+(-g_y)^2}}\right|$$

$$\leqslant \frac{\max_{|\lambda|=n}|p_\lambda - q_\lambda|}{\min_{|\alpha|=n-1}\left|\left(\frac{dg}{ds}\right)_\alpha\right|}, \tag{6.99}$$

这里$\left|\frac{dg}{ds}\right| = \left|\sum_{|\alpha|=n-1}\left(\frac{dg}{ds}\right)_\alpha B_\alpha^{n-1}(\tau)\right|$为$g(x,y)$沿$s$方向的方向导数. 通常应于$s$的方向为坐标轴方向或三角形的三边(不考虑与曲线段不交的边)方向.

显然,在代数曲线$f(x,y)=0$的奇点附近,上述估计是不成立的. 在对区域进行加细三角剖分的过程中，当某个三角形的直径已小于给定的误差要求时，则可以断定奇点就在此三角形中或在其附近，在此奇点附近只须采用线性插值即可. 细分过程只在代数曲线通过的小区域上进行. 如果在某个三角形区域上得到了满足要求的逼近曲线,或者能判断其中有奇点，则细分过程停止. 如果三角形内存在多于一段的曲线或$f(x,y)$在其上不满足误差要求(6.99)所要求的单调性条件，则需继续进行细分. 为方便起见,常利用 Bézier 控制点来判断曲线与某边是否相交或曲面沿某一方向是否单调等.

除了利用隐式定义的有理代数曲线进行逼近外，有时也在几何光滑条件下，用 Hermite 参数曲线段构造光滑插值样条曲线，以作为原代数曲线的近似参数表示. 设$H(t)=(X(t), Y(t))$, $t\in[0,1]$为一段m次 Hermite 参数曲线段,将其代入$f(x,y)$,可得一以t为参数的mn次多项式$f(X(t),Y(t))$, 其中$f(x,y)$是n次多项式, 将它化为 Bézier 形式

$$f(X(t), Y(t)) = \sum_{i=0}^{mn} b_i B_{i,mn}(t), \tag{6.100}$$

因而有如下的误差估计式:

$$|f(X(t),Y(t))| \leqslant \max_{0\leqslant i\leqslant mn}|b_i|, \quad t\in[0,1]. \tag{6.101}$$

5. 隐式代数曲面的逼近

这里我们给出多项式参数曲面片 $\boldsymbol{P}(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$；$(u,v)\in D$ 对曲面 $f(x,y,z)=0$ 的逼近误差估计．不妨设D为三角形区域，则 $f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$ 可以表示为三角 Bézier 形式：

$$f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))=\sum_{|\lambda|=m}\boldsymbol{b}_\lambda B_{\lambda,m}(\boldsymbol{\tau}),\qquad(6.102)$$

其中 $\boldsymbol{\tau}$ 为 (u,v) 在D上的面积坐标．由 Bézier 曲面的凸包性质有

$$|f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))|\leqslant\max_{|\lambda|=m}|\boldsymbol{b}_\lambda|.\qquad(6.103)$$

$$(u,v)\in D$$

6. 空间代数曲线的逼近

一段空间代数曲线

$$\begin{cases}f_1(x,y,z)=0\\f_2(x,y,z)=0\end{cases}$$

可以用参数曲线来逼近．以多项式参数样条曲线 $\boldsymbol{P}(t)=(x(t),y(t),z(t))$ 为例，我们给出分段逼近误差估计．不妨设 $\boldsymbol{P}(t)$，$t\in[a,b]$ 为多项式参数曲线，将其代入到 $f_1(x,y,z)$ 及 $f_2(x,y,z)$ 中，即可得到 t 为变量的多项式 $f_1(x(t),y(t),z(t))$ 及 $f_2(x(t),y(t),z(t))$．它们的 Bézier 形式分别为

$$f_1(x(t),y(t),z(t))=\sum_{i=0}^{m_1}\boldsymbol{b}_iB_{i,m_1}(u),$$

及

$$f_2(x(t),y(t),z(t))=\sum_{i=0}^{m_2}\boldsymbol{c}_iB_{i,m_2}(u),$$

$$t=a(1-u)+bu\in[a,b].$$

因而有如下估计式

$$\max(|f_1(t)|,|f_2(t)|)\leqslant\max\{\max_{0\leqslant i\leqslant m_1}\{\boldsymbol{b}_i\},\max_{0\leqslant i\leqslant m_2}\{\boldsymbol{c}_i\}\}\quad(6.104)$$

第七章　多元样条在有限元及 CAGD 中的应用

随着计算机的迅速发展，多元样条在有限元和计算机辅助几何设计（CAGD）中的应用越来越广泛。在有限元中，多元样条是用来构造各种类型的模型函数；而在 CAGD 中多元样条是用来构造各种光滑曲面。

首先，数学物理中的许多问题可以转化为求函数 $u \in V$，使

$$J(u) = \min_{v \in V} J(v),$$

其中 V 是 Hilbert 空间，$J: V \to R$ 定义为

$$J(v) = \frac{1}{2} a(u,v) - (f,v),$$

此处 $a(\cdot,\cdot)$ 是 $V \times V \to R$ 上的对称的连续双线性泛函，f 为 $V \longmapsto R$ 上的连续线性泛函。通常取 V 为 Собелев 空间 H_0^m, H^m $(m \geqslant 0)$ 等。由于 V 是无穷维的。除少数特殊情况外，一般不能求得上面变分问题的精确解、因此需要通过数值方法来近似求解。有限元方法是最适合于求解此类问题的一种方法。它是 R. Courant 于 1943 年提出的，随即越来越广泛地应用于各类工程问题中。1965 年冯康在他的著名论文《基于变分原理的差分格式》[135] 中奠定了有限元方法的数学理论基础，使得有限元能从应用的局限性中解脱出来，并赋之于统一的数学基础。本章不拟介绍这些理论的细节，只想从有限元和多元样条的联系，特别是如何应用多元样条理论与方法去构造含局部支集的样条空间，进而得到有限元模型函数等方面作一些介绍。对于三角剖分和四边形剖分来说迄今已有多种有限元模型函数。诸如 Adini 元，Morley 元，Zienkiewicz 元，Argyris 元，Hermite 型三角形元和四边形元，

Lagrange 三角形元和四边形元，HCT 元和 Powell-Sabin 元还有 FVS 元等等.

从本章将要介绍的 A. Ženišek 定理可知，要在任意三角剖分下构造具有一定光滑度的插值样条函数，需要在顶点处给定两倍于整体光滑度的插值信息和与之相匹配的分片多项式的次数，这在应用上是不方便的. 避免这一缺陷的途径通常有两种：一是对原有剖分进行加细，改变原有剖分的拓扑结构，达到降低分片多项式次数的目的，如上面提到的 HCT 元，Powell-Sabin 元和 FVS 元均属于这一类型；二是利用有理样条函数，这已在第五章作了介绍.

其次，同考虑构造协调有限元模型函数的出发点一致，样条函数在 CAGD，散乱数据插值以及拟合等方面的应用中，人们总是希望构造具有较少自由度且具有一定局部性质的逼近函数. 多元样条所产生的曲面通常是分片代数曲面：隐式曲面和显式曲面. 前者已在第六章中作了详细的讨论. 显式曲面有两种定义方式. 一种是非参数形式的曲面，它是某二元函数 $f:\Omega \longmapsto R$ 在 R^3 中的图形，其表示形式为 $z = f(x,y)$，$(x,y) \in \Omega$，其中 Ω 为 R^2 中的区域；另一种是参数曲面，它是 Ω 在映射 $P:\Omega \longmapsto R^3$ 下的象，其表示形式为 $P(u,v)$，$(u,v) \in \Omega$. 显然非参数曲面是参数曲面的特殊形式. 前者一般只适用于小挠度情形的曲面设计，诸如对分布在平面区域上的散乱数据进行插值或曲面拟合等. 参数曲面在具有大挠度的或较为复杂的曲面设计中起着重要作用. 因而参数曲面作为曲面的一般表示形式，在几何设计中比非参数曲面有着更广泛的应用. 目前在有关 CAGD 应用软件中，所使用的曲面大都是参数形式的.

用样条函数进行光滑曲面设计时，首先遇到的问题是如何光滑拼接曲面，在以往的 CAGD 软件系统中，曲面通常是用张量积的方法来构造的，如双 3 次 Coons 曲面，B 样条曲面等. 张量积样条曲面实现起来比较简便，但它只适用于规则的四边形网格剖分上的规则数据的曲面拟合. 复杂曲面的设计以及散乱数据的曲

面拟合往往要在任意三角剖分、甚至任意的剖分上进行。因此如何构造具有局部支集的样条空间或给出相应的局部插值格式是样条函数应用于实践中的重要课题。对于参数曲面，参数选取的好坏直接影响到曲面的逼近性和光顺性。

本章将介绍的内容有适于各种曲面和散乱数据拟合中的非参数形式的局部光滑插值格式；参数曲面的光滑拼接条件，常见的张量积型曲面以及散乱数据拟合方法。此外，还将介绍有限元空间的谱基及其构造。

§1. 多元样条光滑插值格式

1.1 插值有限元的 Ženišek 定理[136]

设Ω是平面上的单连通或多连通区域。记Δ为Ω的一三角剖分，$V=\{v_i: i=1,2,\cdots,N_v\}$ 为剖分Δ的顶点集合，$E=\{e_j: j=1,2,\cdots,N_E\}$ 为剖分Δ的网线集合，$\{T_i: i=1,2,\cdots,N_T\}$ 为剖分Δ的三角形单元集合。考虑如下的插值问题：

IP) 对给定的函数 $f(x,y)\in C^k(\Omega)$，构造函数 $s(x,y)\in U$，$U\subset C^k(\Omega)$，使得

$$s^{(j)}(v_i)=f^{(j)}(v_i),\quad i=1,2,\cdots,N_v,\quad j=1,2,\cdots,k \tag{7.1}$$

这是一种在应用中经常出现的插值问题。这里我们所考虑的插值空间U为分片多项式空间。

为介绍这一节的主要结果，引进如下记号：设$r\geqslant 0$与$\mu\geqslant 0$是给定的整数，在每个网线的内部，选择 $(\mu+1)(2r+\mu)/2$ 个点，记在网线e_r上的点为 $v_1^{(r,\alpha)},\cdots,v_{r+\alpha}^{(r,\alpha)}$ $(\alpha=0,1,\cdots,\mu)$。下面的结论说明在样条函数空间中插值问题(IP)的解是存在的。

定理 7.1[136] 假定 $\mu\geqslant 0$，$r\geqslant 0$ 和$\lambda\geqslant 0$是给定的非负整数，$f(x,y)\in C^{\mu+\lambda}(\bar{\Omega})$，$k=2(\mu+\lambda)+r+1$，则在每一个三角形单元 $T_t\in\Delta$ 上存在k次多项式 $p_t(x,y)$，使得

$$D^i p_t(v_j)=D^i f(v_j),\quad i=(i_1,i_2),\quad |i|=i_1+i_2,$$
$$|i|\leqslant\mu+\lambda, \tag{7.2}$$

$$\frac{\partial^{\alpha} p_{t}(v_{l}^{(t,\alpha)})}{\partial n_{s}^{\alpha}}=\frac{\partial^{\alpha} f(v_{l}^{(s,\alpha)})}{\partial n_{s}^{\alpha}},\ (l=1,2,\cdots,r+\alpha;\alpha=0,\cdots,\mu)$$

(7.3)

其中 $v_j(j=j_1,j_2,j_3)$ 是三角形单元 T_t 的顶点， e_s $(s=s_1,s_2,s_3)$ 是其三条边，n_s 是三条边上的外法方向。则分片多项式

$$s(x,y)|_{T_t}=p_t(x,y),\ (x,y)\in T_t$$

具有 μ 阶光滑度，即 $s(x,y)\in S_k^{\mu}(\Omega,\Delta)$。

证明 容易验证，由条件(7.2)和(7.3)给定的插值条件的个数为

$$N_1=(\mu+\lambda+2)(\mu+\lambda+1)/2+(\mu+1)(2r+\mu)/2, \tag{7.4}$$

而 k 次二元多项式的维数

$$\dim P_k=(k+2)(k+1)/2. \tag{7.5}$$

因此，满足条件(7.2)，(7.3)的 k 次多项式 $p(x,y)$ 是一定存在的。设 $T_{t_1},T_{t_2}\in\Delta$ 是两个相邻的三角形单元，e_s 是它们的公共边。设 $v_{j_1}=(x_{j_1},y_{j_1})$，$v_{j_2}=(x_{j_2},y_{j_2})$ 为 e_s 的两个端点。记

$$p(x,y)=p_{t_1}(x,y)-p_{t_2}(x,y).$$

只需证明 $D^i p(x,y)=0$，$|i|\leqslant\mu$，$(x,y)\in e_s$。因为 $\partial^{\beta}p(x,y)/\partial x^{\beta_1}\partial y^{\beta_2}$ $(\beta=\beta_1+\beta_2)$ 可以由下面 $\beta+1$ 个导数线性表出

$$\frac{\partial^{\beta}p(x,y)}{\partial n^{\beta}},\ \frac{\partial^{\beta}p(x,y)}{\partial n^{\beta-1}\partial\tau},\cdots,\ \frac{\partial^{\beta}p(x,y)}{\partial n\partial\tau^{\beta-1}},\ \frac{\partial^{\beta}p(x,y)}{\partial\tau^{\beta}},$$

$\partial/\partial n$ 和 $\partial/\partial\tau$ 分别表示 $e_s=v_{j_1}v_{j_2}$ 的法向导数和方向导数。这样，只需证明

$$\frac{\partial^{i_1+i_2}p(x,y)}{\partial n^{i_1}\partial\tau^{i_2}}\equiv 0,\ (x,y)\in e_s\quad (i_1,i_2=0,1,\cdots,\mu;$$

$$0\leqslant i_1+i_2\leqslant\mu). \tag{7.6}$$

设

$$g_{\alpha}(\tau)=\left.\frac{\partial^{\alpha}p(x,y)}{\partial n^{\alpha}}\right|_{e_s}=\frac{\partial^{\alpha}}{\partial n^{\alpha}}p(x_{j_1}+(x_{j_2}-x_{j_1})\tau,y_{j_1}+(y_{j_2}-y_{j_1})\tau),$$

$\tau\in[0,1]$，$\alpha=0,1,\cdots,\mu$。由定理的假设易知 $g_{\alpha}(\tau)$ 是 $k-\alpha$

次多项式且满足

$$\frac{d^\alpha g_\alpha(0)}{d\tau^\beta}=\frac{d^\beta g_\alpha(1)}{d\tau^\beta}=g_\alpha(\tau_1)=\cdots=g_\alpha(\tau_{r+\alpha})=0, \quad (7.7)$$

其中 $\beta=0,1,\cdots,\mu+\lambda-\alpha$, $0<\tau_1<\tau_2<\cdots<\tau_{r+\alpha}<1$. 利用罗尔 (Rolle) 定理,有

$$g_\alpha(\tau)\equiv 0, \quad \alpha=0,1,\cdots,\mu. \quad (7.8)$$

由此得到

$$\frac{d^j}{d\tau^j}g_\alpha(\tau)\equiv 0, \quad j=1,2,\cdots. \quad (7.9)$$

此即证明了关系式 (7.6). □

不难知道(7.2),(7.3)中的插值条件彼此均为线性独立的。由(7.4),(7.5) 知

$$\dim \mathbf{P}_k-3N_1\geqslant 0 \quad (7.10)$$

整数 $\lambda=\mu$, $r=0$ 满足不等式(7.10),且

$$\dim\mathbf{P}_k-3N_1=\mu(\mu-1)/2. \quad (7.11)$$

容易验证,当 $\mu=0$ 和 $\mu=1$ 时, 插值条件(7.2),(7.3),以及 $\lambda=\mu$, $r=0$ 可唯一确定 1 次和 5 次插值多项式。当 $\mu\geqslant 2$ 时, (7.11)指出的数与条件

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta}p_t(v_{i_1}^{(t)})}{\partial\sigma^\alpha\partial\tau^\beta}=\frac{\partial^{\alpha+\beta}f(v_{i_1}^{(t)})}{\partial\sigma^\alpha\partial\tau^\beta}, \quad (\alpha,\beta\geqslant\mu+1;$$

$$\alpha+\beta=2\mu+2,\cdots,3\mu) \quad (7.12)$$

或条件

$$D^i p_t(v_0^{(t)})=D^i f(v_0^{(t)}), \quad |i|\leqslant\mu-2 \quad (7.13)$$

的个数相同, 这里 $v_0^{(t)}$ 是三角形 T_t 的重心, $v_{i_1}^{(t)}$ 是在 $T_t=\Delta v_{i_1}^{(t)}v_{i_2}^{(t)}v_{i_3}^{(t)}$ 中具有最小角的顶点, $\partial/\partial\sigma$ 和 $\partial/\partial\tau$ 分别指沿方向 $\overrightarrow{v_{i_1}^{(t)}v_{i_2}^{(t)}}$ 的法向和 $\overrightarrow{v_{i_1}^{(t)}v_{i_3}^{(t)}}$ 的导数.

下面我们以满足插值条件(7.2), (7.3)和(7.13)的多项式构造为例,讨论具有 μ 阶光滑度的插值样条函数的构造[139].设 $p_t(x,y)$ 为插值条件(7.2),(7.3)和(7.13)所唯一确定的 $4\mu+1$ 次插值多项式,并设

$$p_i(x,y) = p_{4\mu+1}(x,y) + R_{4\mu+1}(x,y),$$

其中 $p_{4\mu+1}(x,y)$ 为在三角形T的三个顶点 v_1, v_2, v_3 处直至 2μ 阶的 Taylor 插值多项式[139]:

$$p_{4\mu+1}(x,y) = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i^{2\mu+1} \sum_{j=0}^{2\mu} \frac{(2\mu+j)!}{(2\mu)!j!} (1-\lambda_i)^j T_{v_i}^{2\mu-j} f(x,y), \tag{7.14}$$

而 $R_{4\mu+1}(x,y)$ 具有下面的形式:

$$R_{4\mu+1}(x,y) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \sum_{p+q+r=2\mu-1} \alpha_{pq}(\lambda_1\lambda_2)^p(\lambda_2\lambda_3)^q(\lambda_3\lambda_1)^r, \tag{7.15}$$

其中α_{pq}为实常数，(λ_1, λ_2, λ_3) 为三角形T, 上的面积坐标，$T_{v_i}^{2\mu-j}f(x,y)$ 是函数 $f(x,y)$ 在点v_i处的 $2\mu-j$ 阶 Taylor 展式:

$$T_{v_i}^{2\mu-j}f(x,y) = \sum_{|\alpha|\leqslant 2\mu-j} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(v_i) \cdot v_i M^\alpha, \tag{7.16}$$

其中 $\alpha = (\alpha_1,\alpha_2)$, $v_i M^\alpha = (x-x_i)^{\alpha_1}(y-y_i)^{\alpha_2}$, $v_i = (x_i, y_i)$. 容易验证 v_1, v_2, v_3 是 $R_{4\mu+1}(x,y)$ 的 2μ 平坦点(2μ-flat point). 通过直接计算,有

$$\begin{aligned}\frac{\partial^k}{\partial v^k}(p_{4\mu+1}(x,y)) &= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=0}^{2\mu}\frac{(2\mu+j)!}{(2\mu)!j!} \\ &\times \sum_{p\leqslant k}\sum_{q\leqslant p}\binom{k}{p}\binom{p}{q}\frac{(2\mu+1)!}{(2\mu+1-p)!}\,\frac{j!(-1)^j}{(j-q)!} \\ &\times \lambda_i^{2\mu+1-p}(\lambda_i-1)^{j-q}\left(\frac{\partial\lambda_i}{\partial v}\right)^{p+q} \\ &\times T_{v_i}^{2\mu-j-(k-p-q)}\frac{\partial k-p-q}{\partial v^{k-p-q}}f(x,y),\end{aligned} \tag{7.17}$$

$$\frac{\partial^k}{\partial v^k}(R_{4\mu+1}(x,y)) = \sum_{p+q+r=2\mu-1} \alpha_{pq} B_{p,q}^{k;v}(x,y), \tag{7.18}$$

其中

$$B_{p,q}^{k;v}(x,y) = \sum_{i\leqslant k}\sum_{j\leqslant i}\binom{k}{i}\binom{i}{j}$$

$$\times \frac{(p+r+1)!(q+p+1)!(r+p+1)!}{(p+q+1-k+i)!(q+p+1-i+j)!(q+r+1-j)!}$$

$$\times \left(\frac{\partial\lambda_1}{\partial v}\right)^{k-i}\left(\frac{\partial\lambda_2}{\partial v}\right)^{i-j}\left(\frac{\partial\lambda_3}{\partial v}\right)^{j}$$

$$\times \lambda_1^{p+r+1-k+i}\lambda_2^{q+p+1+j-i}\lambda_3^{q+r+1-j}, \tag{7.19}$$

在式(7.17) 和 (7.18) 中 $\partial/\partial v$ 均指沿某一方向 v 求导. 不难验证(7.15)式中的待定系数 α_{pq} 是下面方程组的解

$$\begin{cases} \sum\limits_{p+q=0}^{2\mu-1} \alpha_{pq}B_{p,q}^{\alpha,}(v_0^{(\lambda)}) = D^\alpha f(v_0^{(\lambda)}) - D^\alpha\beta_{4\mu+1}(v_0^{(\lambda)}), \ |\alpha| \leqslant \mu-2, \\ \sum\limits_{p+q=0}^{2\mu-1} \alpha_{pq}B_{p,q}^{\alpha;n;i}(v_i^{(i,\alpha)}) = \dfrac{\partial^\alpha}{\partial n_i^\alpha} f(v_i^{(i,\alpha)}) - \dfrac{\partial^\alpha}{\partial n_i^\alpha}(p_{4\mu+1}(v_l^{(i,\alpha)})), \end{cases}$$

$$\alpha=1,2,\cdots,\mu;\ l=1,2,\cdots,\alpha;\ i=1,2,3, \tag{7.20}$$

其中 $\sum\limits_{p+q=0}^{2\mu-1} \alpha_{pq}B_{pq}^{\alpha}(v_0^{(\lambda)}) = D^\alpha R_{4\mu+1}(v_0^{(\lambda)})$.

这样,求解满足条件(7.2),(7.3),(7.13)的插值多项式问题转化为求解方程组(7.20)的问题了.

为介绍更一般的插值定理,我们给出了如下引理.

引理 7.2[136] 设 $g(s)\in c^n[0,l]$ 且 $|g^{(n+1)}(s)|\leqslant K_{n+1}, s\in(0,l)$. 假设 $s_0=0<s_1<s_2<\cdots<s_r=l$. 如果

$$|g(s_i)|\leqslant \eta_i^{(0)},\ |g^1(s_i)|\leqslant \eta_i^{(1)},\cdots,|g^{(\alpha_i-1)}(s_i)|\leqslant \eta_i^{(\alpha_i-1)}$$
$$(i=0,1,\cdots,r),$$

其中 $\eta_i^{(k)}$ 是整数,而 α_i 是满足条件

$$\sum_{i=0}^{r}\alpha_i = n+1,\ \alpha_i\geqslant 1$$

的整数. 若记 $\eta=\max\limits_{i=0,\cdots,r}\left[\max\limits_{k=0,\cdots,\alpha_i-1} l^k\eta_i^{(k)}\right]$, 则

$$|g^{(p)}(s)|\leqslant c_{2p+1}l^{-p}\eta + c_{2p+2}K_{n+1}l^{n+1-p},\ s\in[0,l],$$

其中 $p=0,1,\cdots,n-1$, 而 $c_1,c_2,\cdots,c_{2n}$ 是与函数 $g(s)$ 和区间 $[0,l]$ 无关的常数.

引理 7.3[134] 设在平面上的点 P 处有

$$|D^i f(P)| \leqslant K, \quad |i| = n,$$

则

$$\left|\frac{\partial^n f(P)}{\partial s_1 \partial s_2 \cdots \partial s_n}\right| \leqslant 2^{n/2} K.$$

其中 $s_1, \cdots s_n$ 是平面上 n 个任意的方向。

引理 7.4[136] 设 s_1, s_2 是平面上两个互相垂直的方向，且在平面上一点 P 处有

$$\left|\frac{\partial^{i_1+i_2} f(P)}{\partial s_1^{i_1} \partial s_2^{i_2}}\right| \leqslant K \quad (i_1 i_2 = 0, 1, \cdots, n;\ i_1 + i_2 = n),$$

则

$$|D^i f(P)| \leqslant 2^{n/2} K, \quad |i| = n.$$

下面是经常用到的 Sobolev 引理[137]。

引理 7.5 设 V 是相应于圆盘的星形域，$0 \leqslant m < k - 1$，$u(x,y) \in \widetilde{W}_2^{(k)}(V)$。则 $u(x,y) \in c^m(\bar{V})$，并且有下列估计

$$\max_{(x,y) \in \bar{V}, |i| \leqslant m} |D^i u(x,y)| \leqslant c \|u\|_{\widetilde{W}_2^{(k)}(V)},$$

其中 c 是与函数 $u(x,y)$ 无关的常数。

利用这些引理可证明下面的主要结果。它的证明并不很难，但相当冗长，故此处从略。

定理 7.6 设函数 $w(x,y)$ 在闭的三角形区域 $\bar{T}$ 上连续，且

$$|D^i w(x,y)| \leqslant M_{4m+2}, \quad |i| = 4m + 2, \quad (x,y) \in T.$$

如果

$$D^i w(v_j) = 0, \quad |i| \leqslant 2\mu, \quad j = 1, 2, 3,$$

$$\frac{\partial^r w(v_{rk}^{(j)})}{\partial n_j^r} = 0, \quad k = 1, 2, \cdots, r, \quad r = 1, 2, \cdots, \mu, \quad j = 1, 2, 3,$$

其中 $v_j (j = 1, 2, 3)$ 是 $\bar{T}$ 的顶点，$v_{rk}^{(j)}$ 是 $\bar{T}$ 之 $v_{j-1} v_{j+1}$ 边上的 r 个等分点，

$$\frac{\partial^{i_1+i_2} w(v_1)}{\partial \sigma^{i_1} \partial \tau^{i_2}} = 0, \quad i_1, i_2 \geqslant \mu + 1; \quad 2\mu + 2 \leqslant i_1 + i_2 \leqslant 3\mu,$$

此处 v_1 是三角形 $\bar{T}$ 的最小内角 α 的对应顶点，$\partial/\partial\sigma$ 和 $\partial/\partial\tau$ 分别指沿方向 v_1v_2 和 v_1v_3 的方向导数，则有下面的估计式成立:

$$|D^i w(x,y)| \leqslant \frac{k}{[\sin\alpha]^{|i|}} M_{4\mu+2} h^{4\mu+2-|i|},$$

$$|i| \leqslant 4\mu,\ (x,y)\in\bar{T}, \qquad (7.21)$$

这里 h 是三角形 $\bar{T}$ 的最长边的长度，K 是与单元 $\bar{T}$ 和函数 $w(x,y)$ 均无关的常数。

推论 7.7. 设 $f(x,y)\in c^{3\mu}(\bar{T})$，则存在唯一的 $4\mu+1$ 次多项式 $p(x,y)\in P_{4\mu+1}$，使得

$$D^i p(v_j) = D^i f(v_j),\ |i| \leqslant 2\mu, \qquad (7.22)$$

$$\frac{\partial^r p(v_{rk}^{(j)})}{\partial n_j^r} = \frac{\partial^r f(v_{rk}^{(j)})}{\partial n_j^r},\ k=1,2,\cdots,r,\ r=1,2,\cdots,\mu, \qquad (7.23)$$

$$\frac{\partial^{i_1+i_2} p(v_1)}{\partial\sigma^{i_1}\partial\tau^{i_2}} = \frac{\partial^{i_1+i_2} f(v_1)}{\partial\sigma^{i_1}\partial\tau^{i_2}},\ i_1,i_2 \geqslant \mu+1;\ 2\mu+2 \leqslant i_1+i_2 \leqslant 3\mu,\ j=1,2,3, \qquad (7.24)$$

其中 $v_j, v_{rk}^{(j)}$ 和 $\partial/\partial\sigma, \partial/\partial\tau$ 的涵义如定理 7.6. 进一步，如果

$$|D^i f(x,y)| \leqslant M_{4\mu+2},\ |i| = 4\mu+2,\ (x,y)\in T,$$

则估计式(7.21)对函数 $w(x,y) = f(x,y) - p(x,y)$ 成立。

证明 容易算出条件(7.22)—(7.24)的个数为

$$c_N = (4\mu+3)(2\mu+1),$$

而这恰好是 $4\mu+1$ 次二元多项式

$$p(x,y) = a_1 + a_2 x + a_3 y + \cdots + a_{c_N} y^{4\mu+1}. \qquad (7.25)$$

的系数的个数. 因此只需证明由下面条件

$$D^i p(v_j) = \frac{\partial^r p(v_{rk}^{(j)})}{\partial n_j^r} = \frac{\partial^{i_1+i_2} p(v_1)}{\partial\sigma^{i_1}\partial\tau^{i_2}} = 0 \qquad (7.26)$$

所决定的 $c_N \times c_N$ 阶齐次线性方程组只有零解即可. 由(7.25)，$D^i p(x,y) \equiv 0$，$|i| = 4\mu+2$，所以结合定理 7.6 易知 $p(x,y)\equiv 0$。 □

以下我们列出在任意三角剖分 Δ 下 $s_{4\mu+\lambda}^{\mu}(\Omega,\Delta)$ $(1 \leqslant \lambda \leqslant 4)$

中的插值格式（这里我们置 $w(x,y)=f(x,y)-p(x,y)$，p 为 $4\mu+\lambda$ 次多项式。对于次数为 $4\mu+1$，$4\mu+2$ 和 $4\mu+3$，$4\mu+4$ 情形分别要求 $f(x,y)\in c^{2\mu}(\bar{\Omega})$ 和 $f(x,y)\in c^{2\mu+1}(\bar{\Omega})$）：对每个三角形单元 $T\in\Delta$，

$$D^i w(v_j)=D^t w(v_0)=\frac{\partial^r w(v_{r,k}^{(j)})}{\partial n_j}=0, \qquad (7.27)$$

其中 $v_j(j=1,2,3)$，v_0，及 $v_{r,k}^{(j)}$ 的涵义同定理 7.6，而指标 i,t,r,k 由下列条件所限定($(7.28)_\lambda$)：

$$|i|\leqslant 2\mu,\ |t|\leqslant \mu-2,\ r=1,2,\cdots,\mu, \qquad (7.28)_1$$
$$k=1,2,\cdots,r;$$

$$|i|\leqslant 2\mu,\ |t|\leqslant \mu-1,\ r=0,1,\cdots,\mu, \qquad (7.28)_2$$
$$k=1,2,\cdots,r+1;$$

$$|i|\leqslant 2\mu+1,\ |t|\leqslant \mu,\ r=1,2,\cdots,\mu, \qquad (7.28)_3$$
$$k=1,2,\cdots,r;$$

$$|i|\leqslant 2\mu+1,\ |t|\leqslant \mu+1,\ r=0,1,\cdots,\mu, \qquad (7.28)$$
$$k=1,2,\cdots,r+1.$$

条件(7.27)和 $(4.28)_\lambda$ $(1\leqslant\lambda\leqslant 4)$ 中的某些条件对以下的情形不起作用：$n=4\mu+\lambda$，当 $n=1$ 时，在 v_0 点以及在边上的插值条件；$n=2$ 或 $n=5$ 时，在 v_0 点处的插值条件；$n=3$ 时，在单元边界内部上的插值条件。

注意到插值条件(7.27)和 $(7.28)_\lambda$ 不仅具有一定的对称性，而且在顶点处具有最高的插值条件数，这在某些应用中是便利的。

在上面的插值格式中，取 $\mu=1$，$\lambda=1$。则得到最简形式的 C^1 三角形单元。这便是熟知的含 21自由度的 Argyris 元。J. M. Carnicer, M. Gasca[144] 利用面积坐标给出了 Argyris 元的基函数表达式。

1.2 HCT 格式及 HCT 型格式

由前一段的结果，我们已经看出，在任意三角剖分下构造具有一定光滑度的含局部支集的样条函数空间需要较高的次数，且样条空间的维数较大。这必然会导致在具体计算中计算量增大，在

曲面造型及设计等领域难以保证曲面的保形性等缺点．因此，在保证一定光滑度的要求下寻求较低次数的样条函数空间是非常有意义的．一种方法是加细剖分法(亦称细分法)．HCT 细分方法的思想最早是 T. K. Hsieh 和 R. W. Clough[143] 在构造有限元协调模型函数时提出、并由 R. W. Clough 和 J. L. Tocher[143] 具体实现的．这个 C^1 有限元函数具有次数低、自由度少等特点．

1. Hsieh-Clough-Tocher 格式．

设 Δ 是平面上多边形区域 $\Omega\subset R^2$ 的一个三角剖分，三角形 $T\in\Delta$，且 $v_i(i=1,2,3)$ 是 T 的三个顶点． 在 T 的内部选取一点 $v^{(\lambda)}$，并与 T 的三个顶点 $v_i(i=1,2,3)$ 连接，于是三角形 T 被分成 3 个小三角形（如图 7.1)．对 Δ 的每个三角形都作如此的细分，便得到一个新的三角剖分，记之为 Δ_3．

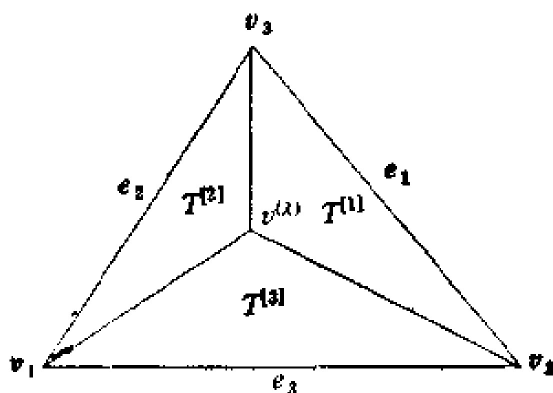


图 7.1

一个三角形在经过以上细分后所得的三角形元称为 Hsieh-Clough-Tocher 三角形，记为 T_3．考虑如下的插值问题：对任意给定的 $f(x,y)\in C^1(\Omega)$，寻求 $s\in S_3^1(T,T_3)$，使之满足

$$
\begin{aligned}
&s(v_i)=f(v_i),\\
&\frac{\partial}{\partial x}s(v_i)=\frac{\partial}{\partial x}f(v_i),\ \frac{\partial}{\partial y}s(v_i)=\frac{\partial}{\partial y}f(v_i), \quad (7.28)\\
&\frac{\partial}{\partial n_i}s(v_{[i]}^{(i)})=\frac{\partial}{\partial n_i}f(v_{[i]}^{(i)}),\ i=1,2,3,
\end{aligned}
$$

其中 $v_0^{(i)}$ 是 $e_i=v_{i-1}v_{i+1}$ 边上的中点，$\dfrac{\partial}{\partial n_i}$ 是指沿 e_i 边的法向求导数。

定理 7.8 对任意的 $f(x,y)\in C^1(\Omega)$，存在唯一的 $s(x,y)\in S_3^1(T,T_3)$，使得插值条件(7.28)被满足。

证明 由样条函数空间的维数公式，可知

$$\dim S_3^1(T,T_3)=\binom{3+2}{2}+d_3^1(3)=12. \qquad (7.29)$$

因为(7.28)中的插值条件数与 $S_3^1(T,T_3)$ 的维数相同，故只需证明满足相应于(7.28)的齐次插值条件的 $s(x,y)$ 推出只有 $s(x,y)\equiv 0$。假设插值条件(7.28)的右端项均为零，则 $s(x,y)$ 和 $\nabla s(x,y)$ 在 T 的三条边上为零。若记此三条边的方程为 $e_i: l_i(x,y)=0$，并假定 $l_i(v^{(i)})=1$ $(i=1,2,3)$；T 中的三个小三角形为 $T^{(j)}$，$j=1,2,3$。若记 $l(x,y)$ 为如此的分片线性多项式，$l(x,y)|_{T^{(j)}}=l_j(x,y)$，则易知 $l(x,y)\in S_1^0(T,T_3)$。于是不难证明 $s(x,y)|_{T^{(j)}}=s_j(x,y)=\lambda_j(x,y)\cdot l_j^2(x,y)$，其中 $\lambda_j(x,y)\in \mathbf{P}_1$。由 $s(x,y)$ 的连续性，可知 $\lambda(x,y)\in S_1^0(T,T_3)$，此处 $\lambda(x,y)$ 是分片多项式：$\lambda(x,y)|_{T^{(j)}}=\lambda_j(x,y)$，$j=1,2,3$。因为

$$\nabla s(x,y)=2\lambda_j\cdot l_j\cdot\nabla l_j+l_j^2\cdot\nabla\lambda_j,\quad (x,y)\in T^{(j)},$$
$$\nabla s(x,y)=2\lambda_{j+1}\cdot l_{j+1}\cdot\nabla l_{j+1}+l_{j+1}^2\cdot\nabla\lambda_{j+1},\quad (x,y)\in T^{(j+1)},$$
$$j=1,2,3.$$

由 $s(x,y)$ 的光滑性，在 $T^{(j)}\cap T^{(j+1)}$ 上有

$$\partial\lambda_j(\nabla l_{j+1}-\nabla l_j)+l_j(\nabla\lambda_{j+1}-\nabla\lambda_j)=0.$$

由 $l_j(v_{j+2})=0$，$\nabla l_{j+1}-\nabla l_j\neq 0$，可知 $\lambda_j(v_{j+2})=0$。同理可知 $\lambda_j(v_{j+1})=0$。因此必有 $\lambda_j(x,y)=c_jl_j(x,y)$，从而 $s_j(x,y)=c_jl_j^3(x,y)$。再次利用 $s(x,y)$ 的光滑性，就可得到 $c_j=0$，$j=1,2,3$。 □

由这个定理可知，确实能够通过改变原有剖分的拓扑结构，得到低自由度、低次数的样条函数空间。还可以构造 HCT 三角形上 9 个自由度的 $S_3^1(T,T_3)$ 的子空间，在这里就不具体介绍了。

在第三章已介绍过研究多元样条函数的 B 网方法。我们现在讨论如何利用 B 网方法给出加细剖分下分片多项式的表达式。限于篇幅，此处仅给出它的构造方法。

HCT 三角形和其上的 Bézier 网点上的坐标如图 7.2 所示，绪网点上的 Bézier 坐标用不同形状的点来表示。

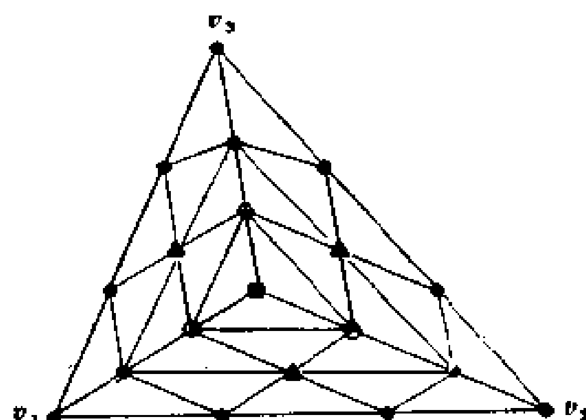


图 7.2

计算各网点上的 Bézier 坐标的步骤如下：

(1) 网点(●)上的 Bézier 坐标由原三角形顶点处的插值信息 $\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial y^l} f(v_i)$ $(0 \leqslant k + l \leqslant 1,\ i = 1,2,3)$ 所确定；

(2) 网点(▲)上的 Bézier 坐标由原三角形边中点处的法向导数 $\frac{\partial}{\partial n_i} f(v_{i,1}^{(2)})$ $(i = 1,2,3)$ 所确定；

(3) 网点(∘)上的 Bézier 坐标由相邻阴影部分上的 Bézier 控制多边形共面的条件所确定；

(4) 网点(■)上的 Bézier 坐标由该控制点落在控制点（〇）所确定的平面上的条件所确定。

定理 7.9 设 $p(x,y) \in S_3^1(T, T_3)$ 是由插值条件 (7.28) 确定的分片 3 次多项式。则 $p(x,y)$ 在 $v^{(0)}$ 处具有 2 阶光滑度。

引理 7.10 若 $p(x,y) \in S_2^1(T, T_3)$，则 $p(x,y) \in \mathbf{P}_2$。

定理 7.9 的证明. 假定 $p(x,y)$ 在 HCT 三角形上的 B 网坐标已算出. 自然地, 在三角形 $v_1v_2v_3$ 上诱导出一个属于 C^1 的分片 2 次多项式, 其在 $v^{(0)}$ 处的所有 1 阶偏导数值已定. 由引理 7.10 知,在 $v^{(0)}$ 处 $p(x,y)$ 的 2 阶偏导数均连续. □

2. HCT 型插值格式

前面已经构造了任意三角剖分的 HCT 加细剖分上的 C^r 分片多项式空间. 在任意三角剖分的 HCT 加细剖分上是否能够构造具有更高阶光滑度的样条函数空间或子空间?

仍记 $T\in\Delta$ 为平面上多边形区域 Ω 的三角剖分 Δ 中的三角形元, 其顶点为 $v_i(i=1,2,3)$, 边 $e_i=v_{i-1}v_{i+1}$ 上的等分点记为 $v_{2,1}^{(i)}, v_{1,1}^{(i)}, v_{2,2}^{(i)}$, $i=1,2,3$. T_3 记 T 的 HCT 加细剖分 (见图 7.2). 因为 $d_3^2(3)=0$, $d_4^2(3)=1$, $d_5^2(3)=4$, $d_6^2(3)=9$, $d_7^2(3)=16$, 所以

$$\dim S_k^3(T,T_3)=\begin{cases}10, & k=3,\\ 16, & k=4,\\ 25, & k=5,\\ 37, & k=6,\\ 52, & k=7.\end{cases} \tag{7.30}$$

定理 7.11[145] 对于任意给定的 $f(x,y)\in C^3(T)$, 存在唯一的 $s(x,y)\in S_7^3(T,T_3)$ 满足如下插值条件:

(1) $\dfrac{\partial^{k+l}}{\partial x^k\partial y^l}s(v_i)=\dfrac{\partial^{k+l}}{\partial x^k\partial y^l}f(v_i)$,

$$0\leqslant k+l\leqslant 3,\ i=1,2,3;$$

(2) $\dfrac{\partial}{\partial n_i}s(v_{1,1}^{(i)})=\dfrac{\partial}{\partial n_i}f(v_{1,1}^{(i)})$,

$$\frac{\partial^2}{\partial n_i^2}s(v_{2,i}^{(i)})=\frac{\partial^2}{\partial n_i^2}f(v_{2,i}^{(i)}),\ i=1,2, \tag{7.31}$$

$$\frac{\partial^3}{\partial n_i^3}s(v_{1,1}^{(i)})=\frac{\partial^3}{\partial n_i^3}f(v_{1,1}^{(i)}),\ i=1,2,3,$$

其中 $\frac{\partial}{\partial n_i}$ 表示沿 $e_i = v_{i-1}v_{i+1}$ 边的法向求导数；

(3) $\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial y^l} s(v^{(0)}) = \frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial y^l} f(v^{(0)})$，$0 \leqslant k + l \leqslant 3$.

证明 由(1),(2),(3)决定的插值条件个数恰好是52 $(=\dim S_7^3(T, T_3))$. 因此只需证明对于齐次插值条件,相应的插值问题仅有零解即可. 假定(7.31)中所涉及的有关 f 的函数值与导数值均为0. 记

$$s_i(x,y) = s(x,y)|_{T^{(i)}},\ i = 1,2,3.$$

由边界上的齐次插值条件，$s_i(x,y)$ 具有形式

$$s_i(x,y) = p_4^{(i)}(x,y) \cdot l_i^3(x,y),\ p_4^{(i)}(x,y) \in \mathrm{P}_4 \qquad (7.32)$$

其中 $l_i(x,y) = 0$ 是 T 的满足 $l_i(v^{(0)}) = 1$ 的边界方程，于是 $l_i(x,y)$ $(i = 1, 2, 3)$ 在 $v^{(0)}v_i$ 上是连续的. 因为 $s_i(x,y)$ 在 $v^{(0)}$ 处直至3阶偏导数均为零,所以 $s_i(x,y)$ 必含有因子 $r_{i+1}(x,y)$ 和 $r_{i+2}(x,y)$，这里 $r_i(x,y) = 0$ 表示 $v^{(0)}v_i$ 的直线方程. 结合(7.32),必有

$$s_i(x,y) = p_2^{(i)}(x,y) r_{i+1}(x,y) r_{i+2}(x,y) l_i^3(x,y). \qquad (7.33)$$

注意到 $s(x,y) \in c^2$，因此两函数 $g_1(x,y) = p_2^{(i)}(x,y) r_{i+1}(x,y) \cdot l_i^3(x,y)$ 和 $g_2(x,y) = p_2^{(i+1)}(x,y) r_i(x,y) l_{i+1}^3(x,y)$ 在 $v^{(0)}v_{i+2}$ 上是 C^1 连接的. 由 $l_i(x,y)$ 和 $l_{i+1}(x,y)$ 在 $v^{(0)}v_{i+2}$ 上的连续性可知，$\tilde{g}_1(x,y) = p_2^{(i)}(x,y) r_{i+1}(x,y)$ 和 $\tilde{g}_2(x,y) = p_2^{(i+1)}(x,y) r_i(x,y)$ 在 $v^{(0)}v_{i+2}$ 上连续. 因为

$$\begin{aligned}\nabla g_1(x,y) = &(\nabla p_2^{(i)}) \cdot r_{i+1} \cdot l_i^3 + p_2^{(i)} \cdot (l_i^3 \cdot \nabla r_{i+1} \\ &+ 3l_i^2 \cdot r_{i+1} \cdot \nabla l_i),\\ \nabla g_2(x,y) = &(\nabla p_2^{(i+1)}) \cdot r_i \cdot l_{i+1}^3 + p_2^{(i+1)} \cdot (l_{i+1}^3 \nabla r_i \\ &+ 3l_{i+1}^2 \cdot r_i \cdot \nabla l_{i+1}).\end{aligned}$$

所以,在 $v^{(0)}v_{i+2}$ 上有

$$\begin{aligned}l_i((\nabla p_2^{(i)}) \cdot r_{i+1} - (\nabla p_2^{(i+1)}) \cdot r_i + p_2^{(i)} \cdot \nabla r_{i+1} - p_2^{(i+1)} \nabla r_i) \\ = 3p_2^{(i)} \cdot r_i (\nabla l_i - \nabla l_{i+1}).\end{aligned} \qquad (7.34)$$

显然 $\nabla l_i - \nabla l_{i+1} \neq 0$，由(7.34)式必有 $p_2^{(i)}(v_{i+2}) r_i(v_{i+2}) = 0$，

但 $r_i(v_{i+2}) \neq 0$. 从而 $p_2^{(i)}(v_{i+2}) = 0$. 同理可证 $p_2^{(i)}(v_{i+1}) = 0$. 根据插值条件 $\frac{\partial^3}{\partial n_i^3}(v_{1,1}^{(i)}) = 0$, 不难证明 $p_2^{(i)}(v_{1,1}^{(i)}) = 0$. 注意到 $v_{i+1}, v_{i+2}, v_{1,1}^{(i)}$ 在同一条直线上，且 $p_2^{(i)}(x,y)$ 为 2 次多项式，从而

$$p_2^{(i)}(x,y) = p_1^{(i)}(x,y) \cdot l_i(x,y).$$

代入(7.33)式得

$$s_i(x,y) = p_1^{(i)}(x,y) r_{i+1}(x,y) r_i(x,y) \cdot l_i^4(x,y). \quad (7.35)$$

再由齐次插值条件(3),容易证明

$$\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial y^l} p_1^{(i)}(v^{(0)}) = 0, \; 0 \leqslant k+l \leqslant 1,$$

于是 $p_1^{(i)}(x,y) \equiv 0$. 所以 $s(x,y) \equiv 0$. □

基于这个定理，很容易构造 Ω 上的整体 C^2 的分片多项式函数. 此分片多项式的整体 C^2 光滑性由插值条件(1)(2)保证.

下面将对上面的结果进行更一般的推广，即在任意三角剖分的 HCT 细分下构造具有任意光滑度的分片多项式格式[146].

记 $v_{r,k}^{(i)}$ 为边 $e_i = v_{i+1}v_{i+2}$ 上的 r 个等分点，$k = 1,2,\cdots,r$, $r = 1,2,\cdots,\mu$, 其中有些等分点可以相重合.设 $f \in c^{2\mu}(T)$, 构造 $s \in S_{4\mu-1}^{\mu}(T, T_3)$, 使其满足如下插值条件:

$$D^\alpha s(v_i) = D^\alpha f(v_i), \; |\alpha| \leqslant 2\mu - 1; \quad (7.36)$$

$$\frac{\partial^r}{\partial n_i^r} s(v_{r,k}^{(i)}) = \frac{\partial^r}{\partial n_i^r} f(v_{r,k}^{(i)}), \; k = 1,2,\cdots,r, \; r = 1,2,\cdots,\mu, \quad (7.37)$$

这里 $i = 1,2,3$.

按公式(2.3),可算出样条函数空间 $S_{4\mu-1}^{\mu}(T, T_3)$ 的自由度个数为

$$\dim S_{4\mu-1}^{\mu}(T,T_3) = \binom{4\mu+1}{2} + \left(3\mu - \left[\frac{\mu+1}{2}\right] - 1\right)\left(2\mu + \left[\frac{\mu+1}{2}\right] - 1\right). \quad (7.38)$$

因此由插值条件(7.36)和(7.37)不能唯一确定 $S^{\mu}_{4\mu-1}(T,T_3)$ 中的元素. 这里给出一种确定 $S^{\mu}_{4\mu-1}(T,T_3)$ 中元素的格式[146]. 从下面的构造方式不难看出该插值问题的存在唯一性.

设 $T\in\Delta$ 是任意的三角形元，其上的 Bézier 网点分布如图 7.3 和图 7.4.

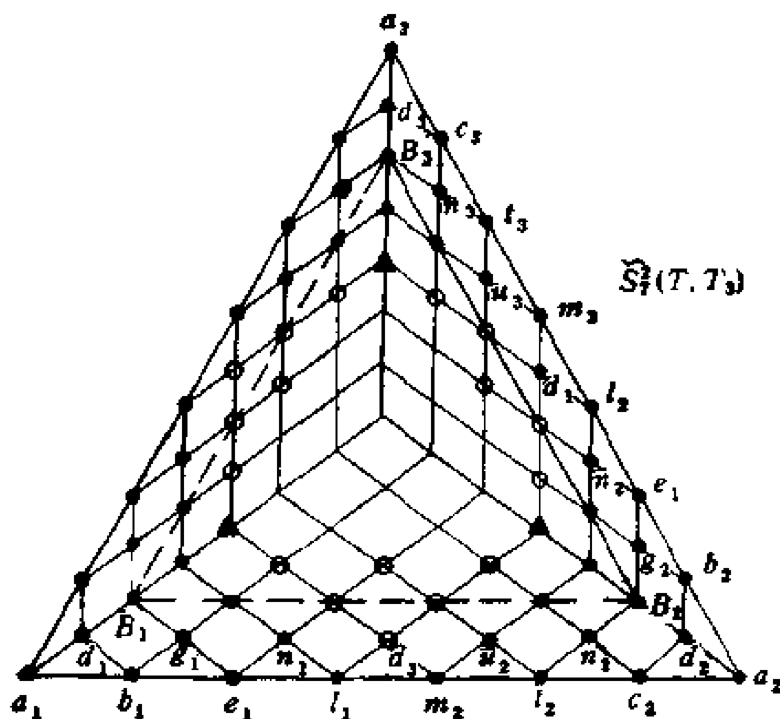


图 7.5

(a) 点(•)处的 B 一网坐标由顶点处的插值条件: $D^{\alpha}f(v_i)$, $|\alpha|\leqslant 2\mu-1$ 所确定;

(b) 点(∘)处的 B 一网坐标由 T 的边界上的法向插值条件: $\frac{\partial^r}{\partial n_i^r}f(v_{i,k}^{(r)})$, $k=1,2,\cdots,r$, $r=1,2,\cdots,\mu-1$ 所确定;

(c) 在三角形 $T'=B_1B_2B_3$ 中的各 B 网点的坐标如此确定: 首先我们要求在 T' 中的三个小三角形上的分片多项式具有 μ 阶光滑度，以此来确定 B_i 点上的插值节点值，再根据插值格式 $(7.28)_\lambda$ $(1\leqslant\lambda\leqslant 4)$ 来构造 T' 上的 $3\mu-1$ 次多项式 $w(x,y)$. 并以此计算所需确定的 B 网坐标.

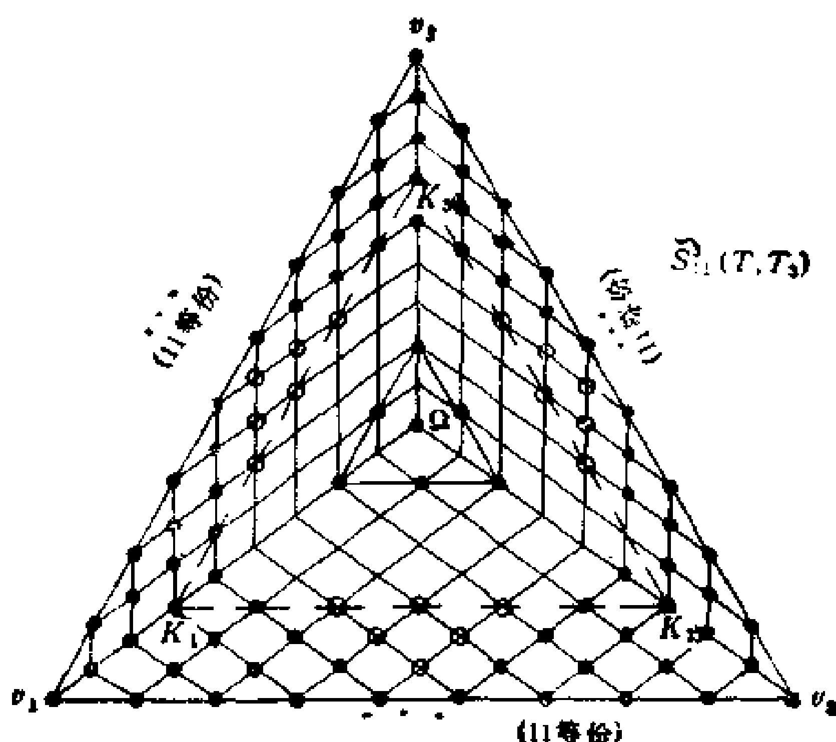


图 7.4

显然，用这种方法得到的分片多项式空间是 $S^{\mu}_{4\mu-1}(T,T_3)$ 的子空间. 若将它记为 $\tilde{S}^{\mu}_{4\mu-1}(T,T_3)$，则不难算出

$$\dim \tilde{S}^{\mu}_{4\mu-1}(T,T_3) = 3\binom{2\mu+1}{3} + 3\binom{\mu}{2} + \binom{3\mu-1}{2} - 3\binom{\mu+1}{2} = \frac{3}{2}\mu(7\mu+1). \tag{7.39}$$

1.3 Powell-Sabin 格式[147]

本节介绍在三角剖分上构造分片 2 次且具有 1 阶光滑度的插值样条函数的 Powell-Sabin 方法及其进展.

1. Powell-Sabin 格式

考虑如图 7.5 至图 7.8 的四种三角形加细剖分，其中 A,B,C 为三角形 T 的顶点，P,Q,R 为 T 的三边上的 3 个任意点，在图

7.6 中D点为T内部的任意一点。

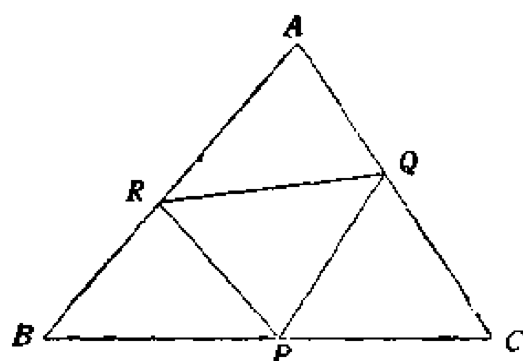


图 7.5(a)

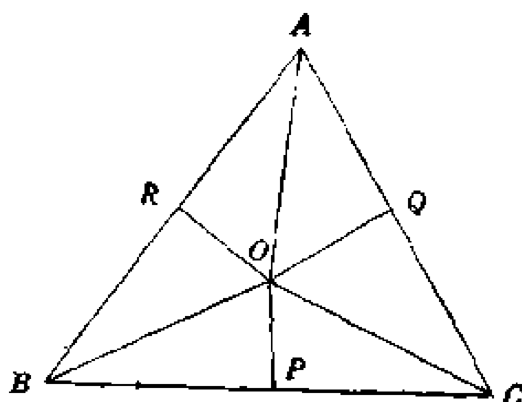


图 7.6(b)

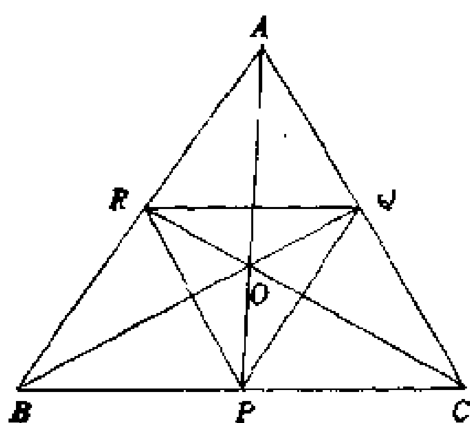


图 7.7(c)

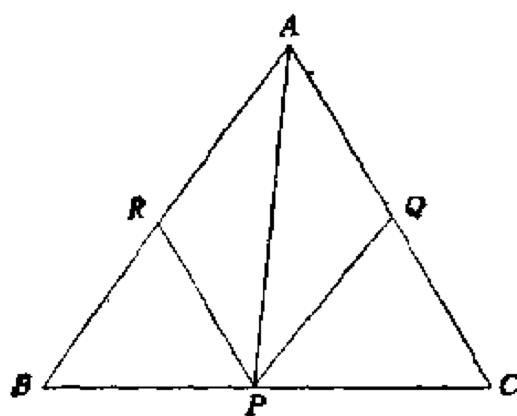


图 7.8(d)

显然，要在三角剖分Δ上构造分片 2 次且具有 1 阶光滑度的样条函数，在剖分的顶点处需要型值及两个 1 阶偏导数信息是自然的。此时每个三角形单元上的插值条件个数为 9，而二元 2 次多项式的自由度却是 6 个。因此人们自然想到对三角形单元进行加细剖分以便分片多项式的自由度能与上述插值条件数相匹配。

不难计算，在单元 (a)，(b)，(c) 和 (d)（见图 7.5—图 7.8）上的 S_2^1 样条空间的维数分别为

$$\dim S_2^1(T_a)=9,\ \dim S_2^1(T_b)=9,\ \dim S_2^1(T_c)=12,$$
$$\dim S_2^1(T_d)=9. \tag{7.40}$$

对于任意给定的 $f(x,y)\in C^1(T)$，考虑如下插值问题：记 $v_1:=A$，$v_2:=B$，$v_3:=c$，$v_{1,1}^{(1)}:=P$，$v_{1,1}^{(2)}=Q$，$v_{1,1}^{(3)}=R$，

(1) 对于加细剖分 (a),(b),(d) 情形，求 $s(x,y)\in S_2^1(T)$，使得

$$s(v_i)=f(v_i),\ \frac{\partial}{\partial x}s(v_i)=\frac{\partial}{\partial x}s(v_i),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}s(v_i)=\frac{\partial}{\partial y}s(v_i),\ i=1,2,3; \tag{7.41}$$

(2) 对于加细剖分 (c)，求 $s(x,y)\in S_2^1(T)$，使得

$$s(v_i)=f(v_i),\ \frac{\partial}{\partial x}s(v_i)=\frac{\partial}{\partial x}f(u),\ \frac{\partial}{\partial y}s(v_i)=\frac{\partial}{\partial y}f(v_i),$$

$$\frac{\partial}{\partial n_i}s(v_{1,1}^{(i)})=\frac{\partial}{\partial n_i}f(v_{1,1}^{(i)}),\ i=1,2,3. \tag{7.42}$$

如果对任意给定的被插函数 f，上述插值问题的解存在且唯一，则称该插值问题为适定的，否则称为不适定的.

定理 7.12[147] 插值问题(7.41)对于如图 7.5(a) 所示的加细剖分适定的充分必要条件是三条线段 $v_iv_{1,1}^{(i)}$，$i=1,2,3$ 不共点.

以下讨论加细剖分 (b)(c) 情形、对于加细剖分 (b)，有

定理 7.13[147] 插值问题(7.41)对于加细剖分 (b) 是适定的.

证明 只需证明插值问题 (7.41)相应的齐次问题只有零解即可。设 $v_2ov_{1,1}^{(1)}$ 和 $v_3ov_{1,1}^{(1)}$ 上的 2 次多项式分别为 $\varphi_1(x,y)$ 和 $\varphi_2(x,y)$，而 $ov_{1,1}^{(1)}$ 的方程为

$$ov_{1,1}^{(1)}:\ lx+my+n=0.$$

由第一章的理论，可知

$$\varphi_1(x,y)-\varphi_2(x,y)=\lambda(lx+my+n)^2,$$

其中 λ 为常数。易知 $\varphi_1(x,y)$ 和 $\varphi_2(x,y)$ 在 v_2v_3 上为一元 2 次分片多项式，它的 4 个自由度完全被 v_2,v_3 点处的插值条件所唯一确定。是故 $\varphi_1(v_{1,1}^{(1)})=\varphi_2(v_{1,1}^{(1)})=0$，且 $\varphi_1(x,y)$ 和 $\varphi_2(x,y)$ 沿 v_2v_3 的方向导数在 $v_{1,1}^{(1)}$ 处的值也为零。又由于函数 $\varphi_1(x,y)$ 和 $\varphi_2(x,y)$ 沿 $ov_{1,1}^{(1)}$ 的方向导数取相同的值。于是 $s(x,y)$ 沿 $ov_{1,1}^{(1)}$

的方向导数在 v_2v_3 上为一元 1 次多项式，因而它可由 v_2, v_3 上的插值条件所唯一确定. 这样一来，$\varphi_1(x,y)$ 和 $\varphi_2(x,y)$ 沿 $ov_{1,1}^{(1)}$ 的方向导数在 $v_{1,1}^{(1)}$ 点也取零值. 这表明 $\varphi_1(x,y)$ 和 $\varphi_2(x,y)$ 为 $\varphi_1(x,y)=c_1l_1^2(x,y)$，$\varphi_2(x,y)=c_2l_1^2(x,y)$，其中 c_1, c_2 为常数，而 $l_1(x,y)=0$ 为 v_2v_3 的方程，利用 $\varphi_1(x,y)$ 和 $\varphi_2(x,y)$ 在 $ov_{1,1}^{(1)}$ 上的 1 阶光滑性条件可知 $c_1=c_2$. 所以样条函数 $s(x,y)$ 在 v_2ov_3 上可表为 $k_1l_1^2(x,y)$. 同理可证明，$s(x,y)$ 在 v_2ov_1 和 v_1ov_3 上可分别表为 $k_3l_3^2(x,y)$ 和 $k_2l_2^2(x,y)$. 再根据样条函数在 ov_i 上的 C^1 连续条件，可推出 $k_1=k_2=k_3=0$. 所以相应于插值问题(7.41)的齐次问题只有零解. □

定理 7.14[147] 插值问题(7.42)对于加细剖分 (c) 是适定的.

证明 在加细剖分 (c) 上 S_2^1 空间的自由度为 12. 因此只需证明相应于插值问题(7.42)的齐次问题只有零解. 从定理 7.13 的证明可知，$s(x,y)$ 在 v_1v_2, v_2v_3, v_3v_1 上恒为零. 由于 $\nabla s(x,y)$ 在线段 $v_1v_{1,1}^{(3)}$, $v_{1,1}^{(3)}v_2$, $v_2v_{1,1}^{(1)}$, $v_3v_{1,1}^{(1)}$, $v_3v_{1,1}^{(2)}$, $v_{1,1}^{(2)}v_1$ 上均为一元 1 次多项式，且分别由 v_i $(i=1,2,3)$ 及 $v_{1,1}^{(i)}$ $(i=1,2,3)$ 处的插值条件所唯一确定，亦即为零多项式. 特别地，$s(x,y)$ 在顶点 $v_{1,1}^{(1)}$, $v_{1,1}^{(2)}$, $v_{1,1}^{(3)}$ 处的函数值与两个 1 阶编导数值均为零. 由定理 7.13，在三角形 $v_{1,1}^{(1)}v_{1,1}^{(2)}v_{1,1}^{(3)}$ 上恒有 $s(x,y)=0$. 再根据 $s(x,y)$ 的光滑性即可直接证明 $s(x,y)$ 在三角形 $T: v_1v_2v_3$ 上恒为零.

以下仅讨论加细剖分 (b)（见图 7.6）上的样条空间，对于加细剖分 (c) 上的 S_2^1 空间的讨论是类似的.

2. 样条空间 $S_2^1(\Delta^*)$[148].

设 $\Omega\subset R^2$ 是平面上的多边形区域，Δ 为 Ω 的任意三角剖分，记 $v_1, v_2, \cdots, v_{N_v}$ 为剖分 Δ 的顶点. $T\in\Delta$ 为一三角形胞腔. 对剖分 Δ 的每一三角形如图 7.9 的加细，将它分成 6 个小三角形（如图 7.10）. 将加细后的剖分记作 Δ^*.

对任意给定的实数 α_i, β_i, γ_i $(i=1,2,\cdots,N_v)$，考虑插值问题：求 $s(x,y)\in S_2^1(\Delta^*)$，使得

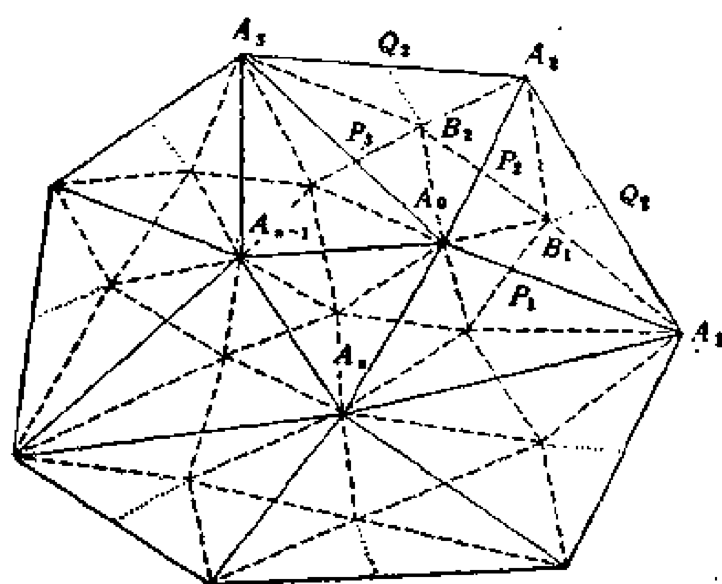


图 7.9

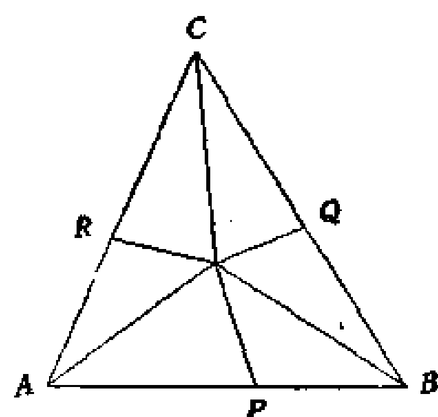


图 7.10

$$
\begin{cases}
s(v_i) = \alpha_i, \\
\dfrac{\partial}{\partial x} s(v_i) = \beta_i, \\
\dfrac{\partial}{\partial y} s(v_i) = \gamma_i, \quad i = 1, 2, \cdots, N_v.
\end{cases}
\tag{7.43}
$$

由定理 7.13 知道，插值问题(7.43)对于剖分 Δ^* 中的每一原剖分中的胞腔均是适定的。为使插值问题(7.43)对于整个三角剖分Δ的加细剖分 Δ^* 也适定，Δ^* 应满足一定的限制条件。

命题 7.15 插值问题(7.43) 适定的充分必要条件为加细剖分

Δ^* 满足下面的条件：Δ 的内网线上的那些加细网点均由 Δ 中相邻三角形内点的连线所产生。

于是产生 Δ 的加细剖分 Δ^* 的步骤如下：在剖分 Δ 的每一三角形胞腔的内部选取一点；用直线段连接两两相邻的三角形胞腔的内点；于 Δ 的任一边界网线上随意取其内的一点，并用直线段连接至与其所在三角形胞腔中已确定的那个内点。为保证 Δ 中两相邻胞腔中内点的连线与它们的公共边交于该公共边的内部，可选取三角形胞腔的内心作为其中的内点。显然

$$\dim S_2^1(\Delta^*) = 3N_v.$$

下面讨论 $S_2^1(\Delta^*)$ 空间的基函数的构造方法及其有关的性质[148]。为此，考虑如下的插值问题：对每一顶点 $v_i(i = 1,2,\cdots,N_v)$，寻求 $s(x,y) \in S_2^1(\Delta^*)$，使得

$$\begin{cases} s(v_j) = \delta_{ij}, \\ \dfrac{\partial}{\partial x} s(v_j) = \delta_{ij}\varepsilon, \\ \dfrac{\partial}{\partial y} s(v_j) = \delta_{ij}\eta, \quad j = 1,2,\cdots,N_v, \end{cases} \tag{7.44}$$

其中 ε, η 是常数，δ_{ij} 为 Kronecker 符号。

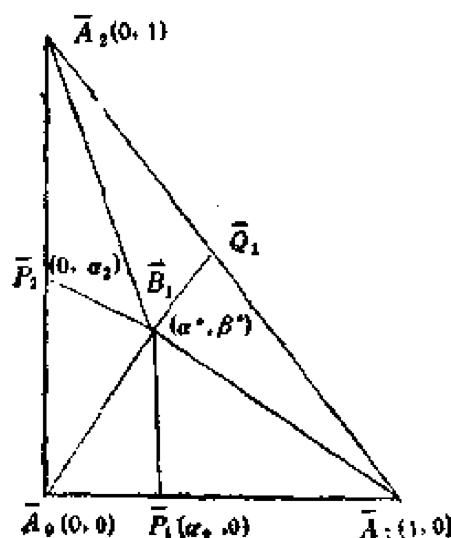


图 7.11

以下给出插值问题(7.44)的解在任意指定胞腔 T 内的表达式.设T的三个顶点为 $A_0(x_0,y_0)$, $A_1(x_1,y_1)$ 和 $A_2(x_2,y_2)$, 如图7.11 所示。

引进一线性变换 $\mathscr{T}$, 使其逆变换 $\mathscr{T}^{-1}$ 为

$$\mathscr{T}^{-1}:\begin{cases}x=(x_1-x_0)\alpha+(x_2-x_0)\beta+x_0,\\ y=(y_1-y_0)\alpha+(y_2-y_0)\beta+y_0.\end{cases}\tag{7.45}$$

易知线性变换 $\mathscr{T}$ 将单元T变为 $0-\alpha\beta$ 平面上的标准三角形 $\bar{T}$: $\Delta\bar{A}_0\bar{A}_1\bar{A}_2$, 且

$$B_1\to\bar{B}_1(\alpha^*,\beta^*),\quad P_1\to\bar{P}_1(\alpha_1,0),\quad P_2\to\bar{P}_2(0,\alpha_2),$$
$$A_1\to\bar{A}_1(1,0),\quad A_2\to\bar{A}_2(0,1),A_0\to\bar{A}_0(0,0)$$

和 $s(x,y)\to\bar{s}(\alpha,\beta)$.

利用光滑余因子协调法,可得到 $\bar{T}$ 上 $\bar{s}(\alpha,\beta)$ 的表达式:

$$\bar{s}_{\bar{A}_1\bar{B}_1\bar{A}_2}(\alpha,\beta)=\frac{2+a\alpha^*+b\beta^*}{2(1-\alpha^*-\beta^*)}\cdot l^2_{\bar{A}_1\bar{A}_2}(\alpha,\beta),$$

$$\bar{s}_{\bar{A}_1\bar{P}_1\bar{B}_1}(\alpha,\beta)=\bar{s}_{\bar{A}_1\bar{B}_1\bar{A}_2}(\alpha,\beta)+\left[\frac{2+a\alpha_1}{2(1-\alpha_1)}\right.$$
$$\left.-\frac{2+a\alpha^*+b\beta^*}{2(1-\alpha^*-\beta^*)}\right]\cdot l^2_{\bar{B}_1\bar{A}_1}(\alpha,\beta)/\beta^{*2},$$

$$\bar{s}_{\bar{P}_1\bar{A}_0\bar{B}_1}(\alpha,\beta)=\bar{s}_{\bar{A}_1\bar{P}_1\bar{B}_1}(\alpha,\beta)+\left[\frac{1}{\alpha_1^2}-\frac{2+a\alpha_1}{2\alpha_1^2(1-\alpha_1)}\right]$$
$$\cdot l^2_{\bar{B}_1\bar{P}_1}(\alpha,\beta)/\beta^{*2},$$

$$\bar{s}_{\bar{A}_2\bar{P}_2\bar{B}_1}(\alpha,\beta)=\bar{s}_{\bar{A}_1\bar{B}_1\bar{A}_2}(\alpha,\beta)+\left[\frac{2+b\alpha_2}{2(1-\alpha_2)}\right.$$
$$\left.-\frac{2+a\alpha^*+b\beta^*}{2(1-\alpha^*-\beta^*)}\right]\cdot l^2_{\bar{A}_2\bar{B}_1}(\alpha,\beta)/\alpha^{*2},$$

$$\bar{s}_{\bar{P}_2\bar{B}_1\bar{A}_0}(\alpha,\beta)=\bar{s}_{\bar{A}_2\bar{P}_2\bar{B}_1}(\alpha,\beta)+\left[\frac{1}{\alpha_2^2}-\frac{2+b\alpha_2}{2\alpha_2^2(1-\alpha_2)}\right]$$
$$\cdot l^2_{\bar{B}_1\bar{P}_2}(\alpha,\beta)/\alpha^{*2},$$

其中 $a=\varepsilon(x_1-x_0)+\eta(y_1-y_0)$, $b=\varepsilon(x_2-x_0)+\eta(y_2-y_0)$, $A=(\alpha_A,\beta_A)$, $B=(\alpha_B,\beta_B)$, $l_{AB}(\alpha,\beta)=(\alpha_A-\alpha_B)(\beta-\beta_B)-(\beta_A-\beta_B)\cdot(\alpha-\alpha_B)$.

类似地，可构造其它结点处的基函数。显然，$S_2^1(\Delta^*)$ 是具有局部支集的样条函数空间，其基函数的支集为围绕Δ中内网点的相邻网点所构成的多边形。

因如此构造的基函数与 (ξ,η) 有关，记之为 $s^{(\xi,\eta)}(x,y)$.

定理 7.16 (i) $\{s^{(\xi_i,\eta_i)}(x,y)\}_{i=1}^3$ 线性无关，当且仅当 $\{(1,\xi_i,\eta_i)\}_{i=1}^3$ 线性无关；

(ii) 对如图 7.11 中所示内点 B_i 的一切可能的选择，相应的样条函数 $s^{(\varepsilon,\eta)}(x,y)$ 是 B一样条，当且仅当

$$\varepsilon(x_i-x_0)+\eta(y_i-y_0)\geqslant -2,\ i=1,2,\cdots,n \tag{7.46}$$

其中 $A_i=(x_i,y_i)$, $i=1,2,\cdots,n$.

证明 (i) 插值条件(7.43)诱导出从 $S_2^1(\Delta^*)$ 到空间 R^{3N_v} 的一个映射:

$$\pi: s(x,y)\in S_2^1(\Delta^*)\longmapsto(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1,\alpha_2,\beta_2,\gamma_2,\cdots,\alpha_{N_v},\beta_{N_v},\gamma_{N_v})\in R^{3N_v}.$$

根据命题 7.15，映射 π 是 1-1 对应且保持相同的线性关系。因为 $\{s^{(\varepsilon_i,\eta_i)}(x,y)\}_{i=1}^3$ 是相应于同一顶点 A_0 的样条函数，由插值条件(7.44) $(i=j)$ 知

$$\pi: s^{(\xi_i,\eta_i)}(x,y)\longmapsto(1,\varepsilon_i,\eta_i,0,0,\cdots,0),\ i=1,2,3.$$

由 π 的性质，可知 $\{s^{(\xi_i,\eta_i)}(x,y)\}_{i=1}^3$ 线性无关的充分必要条件为 $\{(1,\xi_i,\eta_i)\}_{i=1}^3$ 线性无关.

(ii) 根据 $s(x,y)$ 和 $\bar{s}(\alpha,\beta)$ 的关系，只需证明：对于任意的 (α^*,β^*), $\alpha^*>0$, $\beta^*>0$, $\alpha^*+\beta^*<1$, 相应的样条函数 $\bar{s}(\alpha,\beta)\geqslant 0$, 当且仅当 $a,b\geqslant -2$. 事实上，由 $\bar{s}(\alpha,\beta)$ 的表达式可知，$\bar{s}_{\Delta\bar{A}_1\bar{B}_1\bar{A}_2}(\alpha,\beta)\geqslant 0$, $(\alpha,\beta)\in\Delta\bar{P}_1\bar{B}_1\bar{A}_2$ 是使 $\bar{s}(\alpha,\beta)\geqslant 0$, $(\alpha,\beta)\in\Delta\bar{A}_1\bar{A}_0\bar{A}_2$ 成立的必要条件。即为使 $\bar{s}(\alpha,\beta)\geqslant 0$, $(\alpha,\beta)\in\Delta\bar{A}_1\bar{A}_0\bar{A}_2$, a,b 应满足

$$a\alpha^*+b\beta^*\geqslant -2,\ \forall(\alpha^*,\beta^*)\in\{(\alpha,\beta)\,|\,\alpha>0,\beta>0,\alpha+\beta<1\};$$

也就是 a,b 应满足 $a\geqslant -2$, $b\geqslant -2$,

反之当 $a\geqslant -2$, $b\geqslant -2$ 时，有

$$\bar{s}(\alpha,\beta)\geqslant 0,\ (\alpha,\beta)\in\Delta\bar{A}_1\bar{B}_1\bar{A}_2.$$

注意到

$$L^2_{\bar{A}_1\bar{A}_1}(\alpha,\beta) \geqslant \frac{1}{\beta^{*2}} L^2_{\bar{B}_1\bar{A}_1}(\alpha,\beta),\ (\alpha,\beta)\in\Delta\bar{A}_0\bar{B}_1\bar{A}_1,$$

$$L^2_{\bar{A}_1\bar{B}_1}(\alpha,\beta) \geqslant \frac{1}{\alpha_1^2} L^2_{\bar{P}_1\bar{B}_1}(\alpha,\beta),\ (\alpha,\beta)\in\Delta\bar{A}_0\bar{B}_1\bar{P}_1.$$

所以

$$\begin{aligned}\bar{s}_{\bar{A}_1\bar{P}_1\bar{B}_1}(\alpha,\beta) \geqslant{}& \frac{2+a\alpha^*+b\beta^*}{2(1-\alpha^*-\beta^*)}\cdot\frac{L^2_{\bar{B}_1\bar{A}_1}(\alpha,\beta)}{\beta^{*2}} \\ &+\left[\frac{2+a\alpha_1}{2(1-\alpha_1)}-\frac{2+a\alpha^*+b\beta^*}{2(1-\alpha^*-\beta^*)}\right]\cdot\frac{L^2_{\bar{B}_1\bar{A}_1}(\alpha,\beta)}{\beta^{*2}} \\ &-\frac{2+a\alpha_1}{2(1-\alpha_1)}\cdot\frac{L^2_{\bar{B}_1\bar{A}_1}(\alpha,\beta)}{\beta^{*2}}\geqslant 0.\end{aligned}$$

当 $(\alpha,\beta)\in\Delta\bar{P}_1\bar{A}_0\bar{B}_1$ 时,有

$$\begin{aligned}\bar{s}_{\bar{P}_1\bar{A}_0\bar{B}_1}(\alpha,\beta) \geqslant{}& \frac{2+a\alpha_1}{2(1-\alpha_1)}\cdot\frac{L^2_{\bar{B}_1\bar{A}_1}(\alpha,\beta)}{\beta^{*2}} \\ &+\left[\frac{1}{\alpha_1^2}-\frac{2+a\alpha_1}{2\alpha_1^2(1-\alpha_1)}\right]\cdot\frac{L^2_{\bar{B}_1\bar{P}_1}(\alpha,\beta)}{\beta^{*2}} \\ \geqslant{}& \frac{2+a\alpha_1}{2(1-\alpha_1)}\cdot\frac{L^2_{\bar{B}_1\bar{P}_1}(\alpha,\beta)}{\alpha_1^2\beta^{*2}} \\ &+\left[\frac{1}{\alpha_1^2}-\frac{2+a\alpha_1}{2\alpha_1^2(1-\alpha_1)}\right]\cdot\frac{L^2_{\bar{B}_1\bar{P}_1}(\alpha,\beta)}{\beta^{*2}} \\ \geqslant{}& \frac{L^2_{\bar{B}_1\bar{P}_1}(\alpha,\beta)}{\alpha_1^2\beta^{*2}}\geqslant 0.\end{aligned}$$

根据对称性,可类似地证明

$$\bar{s}(\alpha,\beta)\geqslant 0,\ (\alpha,\beta)\in\Delta\bar{A}_2\bar{B}_1\bar{P}_2\ \text{或}\ (\alpha,\beta)\in\Delta\bar{A}_0\bar{P}_2\bar{B}_1. \quad \square$$

推论 7.17 对于所有的顶点 $v_i\in\Delta$, $i=1,2,\cdots,N_v$, 相应于插值问题(7.44)的解是 B 一样条函数, 当且仅当对 Δ 中的任意

网线 AB, ε, η 满足

$$|\varepsilon(x_A - x_B) + \eta(y_A - y_B)| \leqslant 2$$

其中 $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$.

由定理 7.16 和它的推论,只要我们适当选择 $\{(\varepsilon_i, \eta_i)\}_{i=1}^3$, 便可以得到每一顶点 $v_i(i = 1, 2, \cdots, N_v)$ 处的三个线性无关的 B 样条函数,进而可以得到全空间 $S_2^1(\Delta^*)$ 的 B 样条基函数.

选择 ε, 使得

$$h^{-1} \leqslant (4\varepsilon)^{-1} \leqslant 2h^{-1},$$

其中 h 为剖分的直径,即网线的最大长度. 定义

$$B_i^1 = s_i^{(0,4\varepsilon)}(x,y)/4;\quad B_i^2 = s_i^{(4\varepsilon,0)}(x,y)/4$$

$$B_i^3 = S_i^{(-2\varepsilon,-2\varepsilon)}(x,y)/2,\quad i = 1,2,\cdots,N_v.$$

由定理 7.16 及推论 7.17 易知, $\{B_i^1, B_i^2, B_i^3\}$ 是线性无关的且 $\{B_i^1, B_i^2, B_i^3\}_{i=1}^{N_v}$ 为空间 $S_2^1(\Delta^*)$ 的一个 B 样条基. 定义如下两个线性算子

$$L_1 f(x,y) = \sum_{i=1}^{N_v} f(v_i) \sum_{r=1}^{3} B_i^r(x,y), \tag{7.47}$$

$$L_2 f(x,y) = \sum_{i=1}^{N_v}\Big(f(v_i)\bar{B}_i^1(x,y) + \frac{\partial}{\partial x} f(v_i) \cdot \frac{\bar{B}_i^2(x,y)}{4\varepsilon} + \frac{\partial}{\partial y} f(v_i)\frac{\bar{B}_i^3(x,y)}{4\varepsilon}\Big), \tag{7.48}$$

其中 $\bar{B}_i^1 = B_i^1 + B_i^2 + B_i^3$, $\bar{B}_i^2 = 3B_i^2 - B_i^1 - B_i^3$, $\bar{B}_i^3 = 3B_i^3 - B_i^2 - B_i^1$. 根据 B 样条基的定义和插值性质,有

$$L_1 f(v_i) = f(v_i),\ \frac{\partial}{\partial x} L_1 f(v_i) = \frac{\partial}{\partial y} L_1 f(v_i) = 0, \tag{7.49}$$

$$L_2 f(v_i) = f(v_i),\ \frac{\partial}{\partial x} L_2 f(v_i) = \frac{\partial}{\partial x} f(v_i),$$

$$\frac{\partial}{\partial y} L_2 f(v_i) = \frac{\partial}{\partial y} f(v_i),\quad i = 1,2,\cdots,N_v. \tag{7.50}$$

命题 7.18 (i) $\sum_{i=1}^{N_v} \sum_{r=1}^{3} B_i^r(x,y) \equiv 1$, $(x,y) \in D$;

(ii) $L_2f(x,y)\equiv f(x,y),\forall f(x,y)\in P_2$, $(x,y)\in D$.

证明 (i) 设 $f(x,y)\equiv 1$, $(x,y)\in D$. 由插值性质 (7.49) 知，$L_1f(x,y)$ 与 $f(x,y)$ 满足同样的插值条件(7.43)(其中 $\alpha_i=1$, $\beta_i=\gamma_i=0$, $i=1,2,\cdots,N_v$). 结合命题 7.15 知 (i) 恒成立.

(ii) 设 $f(x,y)=P_2(x,y)$ 是一二元 2 次多项式，则有 $L_2f(x,y)$, $f(x,y)\in S_2^1(\Delta^*)$, 且满足相同的插值条件，故 (ii) 自然成立. □

定理 7.19 (i) 对任意的 $f(x,y)\in C^0(\Omega)$, 有

$$\|L_1f(x,y)-f(x,y)\|_{\infty,\Omega}\leqslant\omega(f,h),$$

其中 $\omega(f,h)$ 是 f 的连续模，$\|\cdot\|_{\infty,\Omega}$ 是Ω上的一致范数.

(ii) 对于任意的 $f(x,y)\in C^3(\Omega)$, 有

$$\|D^s(L_2f-f)\|_{\infty,\Omega}\leqslant 2\left(1+\eta_2\left((2+\mu)\frac{1}{\sin\theta}\right)^s\right)\cdot M_3\cdot h^{3-s},$$

$$s=0,1,$$

其中 θ 是剖分Δ的所有三角形中的最小内角；

$$M_3=\max_{\substack{i+j\leqslant 3\\ i\geqslant 0,j\geqslant 0}}\left|\frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i\partial y^j}f(x,y)\right|_{\infty,\Omega};\quad \mu=\max_{\Delta_k}\mu_k,$$

Δ_k 取遍剖分Δ中的所有三角形，$\mu_k=\max\limits_{i,j=1,2,3}\dfrac{r_i^*}{r_j^*}$, 而 (r_1^*,r_2^*,r_3^*) 是 Δ_k 中内点的面积坐标.

证明 (i) 设T是Δ中任意给定的三角形胞腔，其顶点为 v_1, v_2, v_3. 对任意 $(x,y)\in T$, 根据 $\{B_i^r\}_{i=1}^{N_v}$ 的性质，有

$$|L_1f(x,y)-f(x,y)|=\left|\sum_{i=1}^{N_v}(f(v_i)-f(x,y))\sum_{r=1}^{3}B_i^r(x,y)\right|$$

$$=\left|\sum_{i=1}^{3}(f(v_i)-f(x,y))\sum_{r=1}^{3}B_i^r(x,y)\right|$$

$$\leqslant\max_{\substack{i=1,2,3\\(x,y)\in T}}|f(v_i)-f(x,y)|\cdot\sum_{i=1}^{N_v}\sum_{r=1}^{3}B_i^r(x,y)$$

$$\leqslant\omega(f,h).$$

(ii) 对任意 $(a_1,a_2)\in T$，设

$$p_2(x,y)=\sum_{r=0}^{2}\frac{1}{r!}\left(\frac{\partial}{\partial x}(x-a_1)+\frac{\partial}{\partial y}(y-a_2)\right)^r f(a_1,a_2),$$

则

$$\|D^s(f(x,y)-p_2(x,y))\|_{\infty,T}\leqslant 2M_3\cdot h_T^{3-s},\quad s=0,1,\tag{7.51}$$

其中 h_T 为T的直径。记 (r_1,r_2,r_3) 和 (r_1^*,r_2^*,r_3^*) 分别为 (x,y) 和内点B关于T的面积坐标，$\mu_T=\max\limits_{\substack{i,j=1,2,3\\ i\neq j}} r_i^*/r_j^*$。由 $\bar{B}_i^r$ 的定义，有

$$\|D_{r_j}^1\bar{B}_i^r\|_{\infty,T},\|D_{r_k}^1\bar{B}_i^r\|_{\infty,T}\leqslant 2(2+\mu),\tag{7.52}$$

其中 $r=1,2,3$，(i,j,k) 是$(1,2,3)$的所有排列。

$$\|D_{r_i}\cdot h_T\|\leqslant 2/\sin\theta_*,\quad i=1,2,3,\tag{7.53}$$

即 θ_* 是T的最小内角、综合(7.51)(7.52)和(7.53)可得

$$\begin{aligned}
\|D^s(L_2f(x,y)-f(x,y))\|_{\infty,T}&\leqslant\|D^s(f(x,y)-p_2(x,y))\|_{\infty,T}\\
&+\|D^sL_2(f-p_2(x,y))\|_{\infty,T}\leqslant 2M_3\cdot h_T^{3-s}\\
&+\left\|\sum_{i=1}^{3}(f(v_i)-p_2(v_i))D^s\bar{B}_i^1(x,y)\right\|_{\infty,T}\\
&+\left\|\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\frac{\partial}{\partial x}(f(v_i)-p_2(v_i))}{4\varepsilon}\right)\cdot D^s\bar{B}_i^2(x,y)\right\|_{\infty,T}\\
&+\left\|\sum_{i=1}^{3}\frac{\frac{\partial}{\partial y}(f(v_i)-p_2(v_i))}{4\varepsilon}\cdot B^s\bar{B}_i^3(x,y)\right\|_{\infty,T}\\
\leqslant 2\left(1+\eta_2\left[(2+\mu)\frac{1}{\sin\theta_*}\right]^s\right)\cdot M_3\cdot h_T^{3-s}.
\end{aligned}$$

□

定义

$$S_2^{1,0}(\Delta^*)=\{s\in S_2^1(\Delta^*)\,|\,s(x,y)|_{\partial\Delta}=0\},$$

$$S_2^{1,1}(\Delta^*)=\left\{s\in S_2^1(\Delta^*)\,\middle|\,s(x,y)|_{\partial\Delta}=\frac{\partial s}{\partial n}(x,y)\Big|_{\partial\Delta}=0\right\},$$

其中 $\partial\Delta$ 表示剖分Δ的边界。类似于上面的讨论，不难得到带有

边界条件的样条空间 $S_2^{1,0}(\Delta^*)$ 和 $S_2^{1,1}(\Delta^*)$ 的一些性质，如维数，基函数以及误差估计等[148]。

P. Dierckx, S. Van Leemput 和 T. Vermeire[149] 利用 Powell-Sabin 格式具体地构造了拟合散乱数据的算法，并给出了具体算例。

本节中的思想，也可以用于构造具有较高光滑度的样条空间 $S^{\mu}_{3\mu-1}(\Delta^*)$. 有关细节请读者参阅文献 [146]。

1.4 $S^{\mu}_{\mu+1}(\Delta^*)$ 空间格式

本节讨论基于任意三角剖分 Δ 的一类加细剖分 Δ^* 上的样条函数空间 $S^{\mu}_{\mu+1}(\Delta^*)$，它是一类 Powell-Sabin 格式的推广。

定义 7.20[150] 设 Δ 为 Ω 的一三角剖分，$T\in\Delta$. 将 T 的每条边 $\mu+1$ 等份，于是得到新的 T 的 3μ 个边界点。用直线段连接 T 上 $3\mu+3$ 个边界点中的任意两点，则得到对 T 的一个剖分，记之为 $T^{\mu}_{l,a}$，并称它为 T 的 μ 局部自适应剖分。称

$$\Delta^{\mu}_{l,a} := \bigcup_{T\in\Delta} T^{\mu}_{l,a}$$

为 Δ 的 μ 自适应剖分。

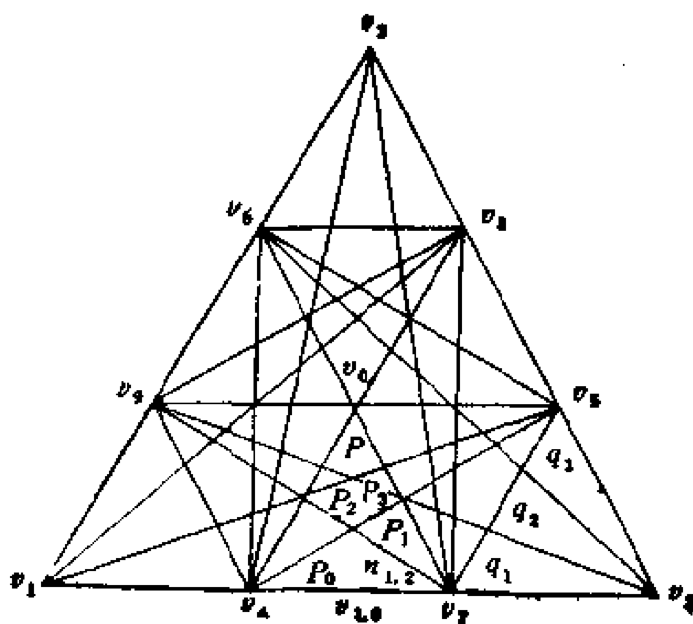


图 7.12

显然，Powell-Sabin 考虑过的"12片细分"的剖分是1自適应剖分。

鉴于 c^2 光滑曲面在隐身技术中的广泛应用，首先考虑2自适应剖分上的 c^2 光滑插值问题(参见图7.12)。

定理 7.21[150] 对给定的一组数 $f_{i,j,s}$, $0\leqslant i+j\leqslant 2$, $s=1,2,\cdots,N_v$; $f_{n_k}, f_{n^2_{k1}}, f_{n^2_{k2}}$, $k=1,2,\cdots,N_E$ 和 f_{cr}, $r=1,2,\cdots,N_T$，存在唯一的 $s(x,y)\in S_3^2(\Delta^2_{ie})$，使得

$$
\text{(IC1)}\quad \frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i\partial y^j}s(v_s)=f_{i,j,s},\ 0\leqslant i+j\leqslant 2
$$

$$
\frac{\partial}{\partial n_k}s(v^{(k)}_{1,1})=f_{n_k},
$$

$$
\frac{\partial^2}{\partial n_k^2}s(v^{(k)}_{2,l})=f_{n^2_{kl}},\ l=1,2,
$$

$$
s(v_{cr})=f_{cr},
$$

$s=1,2,\cdots,N_v$, $k=1,2,\cdots,N_E$, $r=1,2,\cdots,N_T$，其中 $v^{(k)}_{2,1}, v^{(k)}_{1,1}, v^{(k)}_{2,2}$ 是Δ中第 k 个网线内部的3个等分点，v_{cr} 是Δ中第 r 个三角形的重心，n_k 是Δ中第 k 个网线的法向量。

为证明定理7.21，需要下面的几个引理。

引理 7.22 定义在一网线 v_1v_2 上的3次多项式 $p(v)$ 可唯一地表示为

$$
\begin{aligned}
p(v)=f(v_1)u_1^3&+[3f(v_1)+D_{1,2}f(v_1)]u_1^2u_2\\
&+\left[3f(v_1)+\partial D_{1,2}f(v_1)+\frac{1}{2}D^2_{1,2}f(v_1)\right]u_1u_2^2\\
&+f(v_2)u_2^3,
\end{aligned}\tag{7.54}
$$

其中 $D^k_{i,j}=\partial^k/\partial(v_j-v_i)^k$，$(u_1,u_2)$ 为点 v 相应于 v_1v_2 的面积坐标。

实际上，3次多项式(7.54)是满足插值条件

$$
D^k_{1,2}p(v_1)=D^k_{1,2}f(v_1),\ k=0,1,2,
$$

$$
p(v_2)=f(v_2)
$$

的二元 3 次多项式在 v_1v_2 上的表现形式。

引理 7.23 设 v_2, v_3 是 v_1v_4 的两个 3 等分点，$s(v)\in S_3^1$ 定义在 v_1v_4 上，且满足插值条件

$$D_{i,j}^k s(v_i) = D_{i,j}^k f(v_i),\ k = 0,1,2,\ i,j = 1,4, \tag{7.55}$$

则 $s(v)$ 的表达式可利用

$$\begin{aligned}
D_{3,4}s(v_3) &= -D_{3,2}s(v_3) = \frac{1}{45}[D_{1,4}f(v_1) + 4D_{4,1}f(v_4)],\\
s(v_2) &= f(v_1) + \frac{2}{9}D_{1,4}f(v_1) + \frac{1}{54}D_{1,4}^2 f(v_1)\\
&\quad - \frac{1}{135}[4D_{1,4}f(v_1) + D_{4,1}f(v_4)],\\
s(v_3) &= f(v_4) + \frac{2}{9}D_{4,1}f(v_4) + \frac{1}{54}D_{4,1}^2 f(v_4)\\
&\quad - \frac{1}{135}[D_{1,4}f(v_1) + 4D_{4,1}f(v_4)]
\end{aligned} \tag{7.56}$$

和引理 7.22 而求得。

引理 7.24 假定 $v_i\ (i = 1,2,3,4)$ 的涵义同引理 7.23，定义在 v_1v_4 上的样条函数 $s(v)\in S_3^1$ 满足插值条件：

$$\begin{aligned}
&D_{i,j}^k s(v_i) = D_{i,j}^k f(v_i),\ k = 0,1,\ i,j = 1,4,\\
&s(v_5) = f(v_5),\ v_5 = (v_1 + v_2)/2,
\end{aligned} \tag{7.57}$$

则 $s(v)$ 的表达式可由 $s(v)$ 的定义及关系式

$$\begin{aligned}
s(v_2) &= \frac{2}{3}f(v_5) + \frac{1}{24}\Big[10f(v_1) + \frac{5}{3}D_{1,4}f(v_1) - 2f(v_4)\\
&\quad - \frac{1}{3}D_{4,1}f(v_4)\Big],\\
s(v_3) &= \frac{2}{3}f(v_5) + \frac{1}{24}\Big[10f(v_4) + \frac{5}{3}D_{4,1}f(v_4) - 2f(v_1)\\
&\quad - \frac{1}{3}D_{1,4}f(v_1)\Big]
\end{aligned} \tag{7.58}$$

直接求得。

引理 7.25. $s(x,y)\in S_3^2(T)$ 在共线的内网线上以相同的常数为它们的光滑余因子。若记

$$q_5(v)=q_1(v)+\bar{c}_{2,1}L_{2,1}^3+\bar{c}_{2,3}\cdot L_{2,3}^3,$$

见图 7.12，则 $\bar{c}_{2,1},\bar{c}_{2,3}$ 的值分别为

$$\bar{c}_{2,1}=\frac{1}{18}\Big[9s(v_7)+5D_{7,5}s(v_7)+D_{7,5}^2s(v_7)-9s(v_5)$$
$$-4D_{5,7}s(v_5)-\frac{1}{2}D_{5,7}^2s(v_5)\Big],$$

$$\bar{c}_{2,3}=\frac{1}{18}\Big[9s(v_5)+5D_{5,7}s(v_5)+D_{5,7}^2s(v_5)-9s(v_7)$$
$$-4D_{7,5}s(v_7)-\frac{1}{2}D_{7,5}^2s(v_7)\Big], \tag{7.59}$$

其中 $L_{2,1}=2\bar{u}_5-\bar{u}_7$，$L_{2,3}=\bar{u}_5-2\bar{u}_7$，而 $(\bar{u}_2,\bar{u}_5,\bar{u}_7)$ 是点 v 相应于三角形 $v_2v_5v_7$ 的面积坐标。

引理 7.26 设

$$\begin{aligned}\bar{p}(v)=\ & s(v_4)u_4^3+[3s(v_4)+D_{4,7}s(v_4)]u_4^2u_7\\ &+[3s(v_7)+D_{7,4}s(v_7)]u_4u_7^2+s(v_7)u_7^3\\ &+h_3[D_{n1,2}s(v_4)u_4(2u_4-u_7)+4D_{n1,2}s(v_{10})u_4u_7\\ &+D_{n1,2}s(v_7)u_7(2u_7-u_4)]u_0\\ &+\frac{1}{2}[D_{n1,2}^2s(v_4)u_4+D_{n1,2}^2s(v_7)u_7]u_0^2h_3^2\end{aligned}$$

$$p_0(v)=\bar{p}(v)+c_1u_0^3,$$

$$p_1-p_0=c_2(u_0-u_4)^3,\quad p_2-p_1=c_3(u_0-u_7)^2,$$

$$p_3-p_2=\bar{c}_{2,1}(u_0-2u_4-u_7)^3,$$

$$p-p_3=\bar{c}_{1,2}(u_0-u_4-2u_7)^3,$$

$$\begin{aligned}p-\bar{p}=\ & c_1u_0^3+c_2(u_0-u_4)^3+c_3(u_0-u_7)^2\\ &+\bar{c}_{2,1}(u_0-2u_4-u_7)^3+\bar{c}_{1,2}(u_0-u_4-2u_7)^3,\end{aligned} \tag{7.60}$$

则

$$c_1 = 3p(v_0) + \frac{1}{3}(D_{0,4} + D_{0,7})p(v_0) - 3\bar{p}(v_0)$$

$$- \frac{1}{3}(D_{0,4} + D_{0,7})\bar{p}_0(v_0) + 2(\bar{c}_{1,2} + \bar{c}_{2,1}),$$

$$c_2 = -p(v_0) - \frac{1}{3} D_{0,4}p(v_0) + \bar{p}(v_0)$$

$$+ \frac{1}{3} D_{0,4}\bar{p}(v_0) - \bar{c}_{1,2} - 2\bar{c}_{2,1},$$

$$c_3 = -p(v_0) - \frac{1}{3} D_{0,7}p(v_0) + \bar{p}(v_0)$$

$$+ \frac{1}{3} D_{0,7}\bar{p}(v_0) - 2\bar{c}_{1,2} - \bar{c}_{2,1}, \qquad (7.61)$$

其中 $n_{1,2}$ 是 v_1v_2 的法向方向，$v_{10}=(v_1+v_2)/2$，$h_3=2\cdot S_{v_0v_4v_7}$面积$/|v_4v_7|$，(u_0,u_4,u_7) 为 v 相应于三角形 $v_0v_4v_7$ 的面积坐标（见图 7.12）

引理 7.27 方向导数值 $D_{0,4}s(v_0)$ 和 $D_{0,7}s(v_0)$ 分别由

$$D_{0,4}s(v_0) = D_{0,4}p(v_0) = \frac{1}{12}\Big[2h_3D_{n,2}s(v_4)$$

$$+ h_3^2D^2_{n1,2}s(v_4) + 12\bar{c}_{2,1} - 2h_1D_{n2,3}s(v_8)$$

$$- h_1^2D^2_{n2,3}s(v_8) - 12\bar{c}_{2,3}\Big],$$

和

$$D_{0,7}s(v_0) = D_{0,7}p(v_0) = \frac{1}{12}\Big[2h_3D_{n1,2}s(v_7) - h_3^2D^2_{n1,2}s(v_7)$$

$$+ 12\bar{c}_{1,2} - 2h_1D_{n3,1}s(v_6) - h_2^2D^2_{n3,1}s(v_6)$$

$$- 12\bar{c}_{1,3}\Big] \qquad (7.62)$$

给出，其中 $n_{1,2}$, $n_{2,3}$, $n_{3,1}$ 和 h_1 和 h_2 的涵义类似于引理 7.26 中定义。

定理 7.21 的证明.由样条函数的维数公式可知 $\dim S_3^2(\Delta^1_{mn})=$

$\dim \mathbf{P}_3 + 18 = 28$ 恰好与插值条件(*)的个数相吻合. 因此只需证明相应于插值问题(*)的齐次问题只有零解. 由引理 7.22, 7.23 和 7.25, 可证明 $\bar{c}_{ij} = 0$, 再由引理 7.26 和 7.27 的结果, 有 $s(x, y) \equiv 0$, $(x,y) \in T$. □

Δ^2_{*} 上的插值样条函数 $s(x, y) \in S^2_3(\Delta^2_{*})$ 的表达式或样条空间 $S^2_3(\Delta^2_{*})$ 的基函数表达式完全可由本节介绍的定理求得. 详细的推导此处从略.

顺便指出, 在样条空间 $S^1_2(\Delta^1_{*})$ 内不存在类似于前一段中所述的 B 样条基函数.

对于Δ的 μ 自适应剖分情形,同样可证明下面的

定理 7.28[150] 对任意给定的 f_{ijt}, $0 \leqslant i + j \leqslant \mu$, $t = 1, 2, \cdots, N_v$; $f(v^{(k)}_{lr})$, $r = 1, 2, \cdots, l$, $l = 1, 2, \cdots, \mu$, $k = 1, 2, \cdots, N_E$; $f(\lambda_{\tau\rho})$, $\tau = 1,2,\cdots,N_T$, $\rho = 1,2,\cdots,\mu(\mu-1)/2$, 存在唯一的样条函数 $s(x,y) \in S^{\mu}_{\mu+1}(\Delta^{\mu}_{*})$, 使得

$$(\mathrm{IC2}) \quad \frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial y^j} s(v_t) = f_{ijt}, \; 0 \leqslant i + j \leqslant \mu, \quad t = 1,2,\cdots,N_v,$$

$$\frac{\partial^l}{\partial n^l_k} s(v^{(k)}_{lr}) = f(v^{(k)}_{lr}), \; l = 1,2,\cdots,\mu, \quad r = 1,2,\cdots,l, \; k = 1,2,\cdots,N_E,$$

$$s(\lambda_{\tau\rho}) = f(\lambda_{\tau\rho}), \; \tau = 1,2,\cdots,N_T, \quad \rho = 1,2,\cdots,\mu(\mu-1)/2,$$

其中 $v_t(t = 1, 2, \cdots, N_v)$ 是剖分Δ的网点; n_k 为Δ的第 k 条网线的法线方向; $v^{(k)}_{lr}$ $(r = 1, 2, \cdots, l)$ 为Δ中第 k 条网线内部的第 $l + 1$ 个等分点, 即若记 v^k_1, v^k_2 为Δ中第 k 条网线 e_k 的两个端点,则

$$v^{(k)}_{lr} = \frac{1}{l+1}[rv^{(k)}_1 + (l - r + 1)v^{(k)}_2], \; r = 1,2,\cdots,l;$$

$\Lambda_\tau = \{\lambda_{\tau\rho} | \rho = 1, 2, \cdots, \mu(\mu - 1)/2\}$ 是Δ中第 τ 个三角形内部的适定结点组,即 Λ_τ 不在任何一条 $\mu - 2$ 阶代数曲线上.

由定理 7.28 可知，$S_{\mu+1}^{\mu}(\Delta_{r\alpha}^{\mu})$ 的自由度为

$$\dim S_{\mu+1}^{\mu}(\Delta_{r\alpha}^{\mu})=\frac{1}{2}(\mu+1)(\mu+2)N_{v}+\frac{1}{2}\mu(\mu+1)N_{E}$$

$$+\frac{1}{2}\mu(\mu-1)N_{T}.$$

虽然插值样条函数 $s(x,y)\in S_{\mu+1}^{\mu}(\Delta_{r\alpha}^{\mu})$ 的计算比较复杂，但仍可通过建立类似于引理 7.22—引理 7.27 的办法来实现.

鉴于样条函数空间 $S_{\mu+1}^{\mu}(\Delta_{r\alpha}^{\mu})$ 在同一"局部"贯穿线上的所有内网线上的光滑余因子是相同的常数. 因而可以预见，采用恰当的并行算法来计算该空间中的样条函数将是可行的.

1.5 Fraeijs de Veubeke-Sander 格式[151]

前面已经讨论了任意三角剖分的某种加细剖分上的几种样条空间中的插值格式. 本节讨论在四边形单元上的一种光滑插值格式.

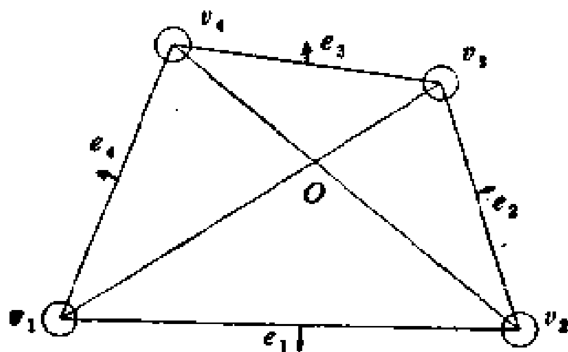


图 7.13

设 $\Omega\subset R^2$ 是平面上可进行凸四边形剖分的多边形区域，Π 为 Ω 的一凸四边形剖分. $V=\{v_i,\ i=1,2,\cdots,N_v\}$ 为剖分 Π 的顶点. 对每一凸四边形单元 $Q\in\Pi$，连接 Q 的两对角线，以构成 Π 的一种加细剖分 Π^*（见图 7.13)，并称之为 FVS 加细剖分.

定理 7.29 设 $Q=v_1v_2v_3v_4$ 是任意的凸四边形单元，$v_i^{(1)}(i=1,2,3,4)$ 是 $e_i:v_iv_{i+1}$（$v_{i+4}=v_i$）的中点，$f(x,y)\in C^1(Q)$. 则存在唯一的样条函数 $s(x,y)\in S_3^1(Q,Q^*)$，满足插值条件

$$\begin{cases} s(v_i) = f(v_i), \\ \dfrac{\partial}{\partial x} s(v_i) = \dfrac{\partial}{\partial x} f(v_i), \ \dfrac{\partial}{\partial y} s(v_i) = \dfrac{\partial}{\partial y} f(v_i), \\ \dfrac{\partial}{\partial n_i} s(v_{1,i}^{(i)}) = \dfrac{\partial}{\partial n_i} f(v_{1,i}^{(i)}), \ i = 1,2,3,4, \end{cases} \tag{7.63}$$

其中 n_i 为 e_i 的法线方向。

证明 $\dim S_3^1(\Omega,\Omega^*) = \dim \mathbf{P}_3 + d_3^1(2) + 2\begin{pmatrix} 3-1+1 \\ 2 \end{pmatrix} = 10 + 0 + 6 = 16$ 恰如与插值条件数相等，因此只需证明相应于插值问题(7.63)的齐次问题只有零解。记 v_1v_3 和 v_2v_4 的交点为 O，e_i 的方程为 $l_i(x,y) = 0$，且满足 $l_i(0) = 1$。设 $s_i(x,y) = s(x,y)|_{\Delta v_i v_{i+1}}$，则由齐次插值条件，易知

$$s_i(x,y) = p_1^{(i)}(x,y) \cdot l_i^2(x,y), p_1^{(i)}(x,y) \in \mathbf{P}_1, \ i = 1,2,3,4.$$

由 $l_i(x, y)$，$i = 1, 2, 3, 4$ 的定义知它的构成连续的 C^0 分片函数。因此由 $s(x,y)$ 的 C^0 性质知 $p_1^{(i)}(x,y)$ 也是 C^0 的。进而由 $s(x,y) \in c^1(\Omega)$，即在 Dv_i 上有

$$(Dp_1^{(i)})l_i^2 + 2l_i \cdot (Dl_i) \cdot p_1^{(i)} = (Dp_1^{(i+1)})l_{i+1}^2 + 2l_{i+1} \cdot (Dl_{i+1}) \cdot p_1^{(i+1)},$$

即在 Dv_i 上有

$$2p_1^{(i)} \cdot D(l_i - l_{i+1}) = l_i \cdot D(p_1^{(i)} - p_1^{(i+1)}),$$

知 $p_1^{(i)}(v_i) = 0$，同理引证 $p_1^{(i)}(v_{i+1}) = 0$。所以有 $s_i(x,y) = c_i \cdot l_i^3(x,y)$。再由 $s(x,y) \in C^0(\Omega)$ 条件，可知 $c_i = 0$，$i = 1,2,3,4$。

□

插值问题(7.63)的解常被作为有限元模型函数。类似于 HCT 格式的讨论，FVS 四边形所对应的有限元空间（或插值样条空间）$V_h \in C^r(\Omega)$。也就是说，对多边形区域 $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ 的凸四边形剖分 Π，可按定理 7.29 在 Π^* 上构造 C^1 类的分片 3 次多项式空间，并且有

$$\dim S_3^1(\Omega,\Pi^*) = 3N_v + N_E,$$

式中 N_E 表示剖分 Π 的网线的个数。

类似于 $S_2^1(\Omega,\Delta^*)$ 空间的讨论，可给出空间 $S_3^1(\Omega,\Pi^*)$ 的基函数表达式以及一些插值算子等等。在有限元与计算机辅助几何设计中，将 FVS 格式与 HCT 格式组合起来使用。类似于构造 HCT 型插值格式，也可在 FVS 加细剖分下构造具有高阶光滑度的局部插值格式[153]。为节省篇幅，此处从略。

1.6 其它细分插值格式

设 $D\subset R^2$ 是平面上的多边形区域，Δ 为 D 的三角剖分，其网点集合，网线集合和三角形胞腔集合分别为 $V=\{v_i:1\leqslant i\leqslant N_v\}$，$E=\{e_j:1\leqslant j\leqslant N_E\}$ 和 $\{T_i:1\leqslant i\leqslant N\}$。考虑如下的插值问题：对 $f(x,y)\in C^\nu(D)$，

$$\text{问题 (I)}\begin{cases}\text{求 } s(x,y)\in S_k^\mu(D,\Delta),\text{ 使}\\ D^\alpha s(v_i)=D^\alpha f(v_i),\ |\alpha|\leqslant\nu,\ i=1,2,\cdots,N_v, & (7.64)\\ \dfrac{\partial^l}{\partial n_j^l}s(v_{j,t}^{(l)})=\dfrac{\partial^l}{\partial n_j^l}f(v_{j,t}^{(l)}),\ t=1,2,\cdots,l,\\ \qquad\qquad l=1,2,\cdots,\mu,\ j=1,2,\cdots,N_E, & (7.65)\end{cases}$$

其中还假定条件(7.64)和(7.65)是相容的。

条件(7.65)保证了插值问题的解 $s(x,y)$ 在相邻单元之间的 C^μ 光滑过渡，因此，如果在每个三角形胞腔上求得问题(I)的解，随即便获得了在整个区域 D 上的解。如果插值问题(I)有解，我们称其解为 $(\mu;\nu,k)$ 有限元格式(或称为 $(\mu;\nu,k)$ 插值格式)。

考虑问题(I)对于任意给定的三角形单元 $T=v_1v_2v_3$ 的情形。此时问题(I)可以陈述为

$$\text{问题 (II)}\begin{cases}\text{对给定的 } f(x,y)\in c^\nu(T),\text{ 求 } s(x,y)\in S^\mu(T^*),\text{ 使得}\\ D^\alpha s(v_i)=D^\alpha f(v_i),\ |\alpha|\leqslant\nu,\\ D_{ni}^r s(v_{r,t}^{(i)})=D_{ni}^r f(v_{r,t}^{(i)}),\ 1\leqslant r\leqslant\mu,\ 1\leqslant t\leqslant r,\end{cases}$$

$i=1,2,3$，其中 $v_{r,t}^{(i)}(t=1,2,\cdots,r)$ 为 $e_i=v_iv_{i+1}$ 上的 $r+1$ 个等分点，D_{ni}^r 表示 e_i 边的 r 阶法向导数；T^* 为 T 的某个对称形式的加细剖分，且 T 的各边没有新的分点。

设 T 的每个内角被分成 β 份。在以上这些约束下，我们分析问题(II)的解存在时的 ν，μ 和 β 之间的关系。这种关系由下面

的定理 7.30 给出。

定理 7.30[illegible] 问题（II）有解的一个必要条件是

$$\beta \geqslant (\mu + 1)/(\nu + 1 - \mu).$$

借助于定理 7.30，可对已讨论过的某些细分插值格式作出相应的解释。

当 $\beta = 1$ 时，$\nu \geqslant 2\mu$. 即对三角形单元不必进行细分。这正是 1.1 中介绍的 A. Ženišek 的工作。

当 $\nu = \mu$ 时，便有 $\beta \geqslant \mu + 1$. 此情形使用了最少的顶点插值信息. 取 $\mu = 1$，则 $\beta \geqslant 2$. 若取 $\beta = 2$ 恰好对应着 C^1-HCT 格式. 当 $\mu = 2$ 时，若取 $\beta = 4$，将对应着 2-HCT 型细分下 (2;2,5) 插值格式，这一段作简要介绍.

当 $\beta = 2$ 时，$\nu \geqslant \left[\frac{1}{2}(3\mu - 1)\right] + 1$. 它正是 P. Sablonnière[145] 曾研究的 $(\mu;2\mu-1,4\mu-1)$ 型插值格式。

在所有的细分格式中，最有兴趣的是 $\nu = \mu$ 情形，亦即在顶点上使用最少的插值信息情形.

$\mu = 2$ 情形. 设 $T = v_1v_2v_3$ 为 Δ 中一三角形单元. 在 T 上作 HCT 细分，再对 T 中的三个小三角形施以特定的 HCT 细分（见图 7.14）. 如此形成的 T 的加细剖分为 2-HCT 型加细剖分. P. Alfeld[154] 得到了 2-HCT 加细剖分上的 (2;2,5) 插值格式，此时 $\dim S_5^2(T, T_{2H}) = 21 + 4 \cdot d_5^2(3) = 37$. P. Alfeld 构造的 (2;2,5) 插值格式对 3 次多项式是精确的.

根据定理 7.30，当 $\nu = \mu = 2$ 时，对三角形 T 进行 Morgan-Scott 型加细剖分，也可能存在相应的插值格式，王仁宏和战荫伟[153]给出了 Morgan-Scott 型加细剖分 Δ_{ms} 上的 (2,2,5) 插值格式（见图 7.15）. 设 $T = v_1v_2v_3$ 且 B_i $(i = 1,2,3)$ 为 T 内的三个不同点. 设 k_i 为过点 B_i 的具不同斜率的线段数，则 k_i 可能取值为 2,3 或 4，但不存在两个 k_i 同时取 2 的情形. 当 $k_i = 2$ 时，称 B_i 为 Δ_{ms} 的奇异内网点，并记 δ 为奇异网点数. 显然 $\delta = 0$ 或 $\delta = 1$. 令

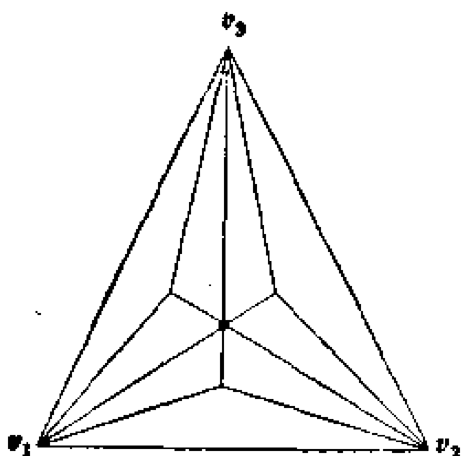


图 7.14

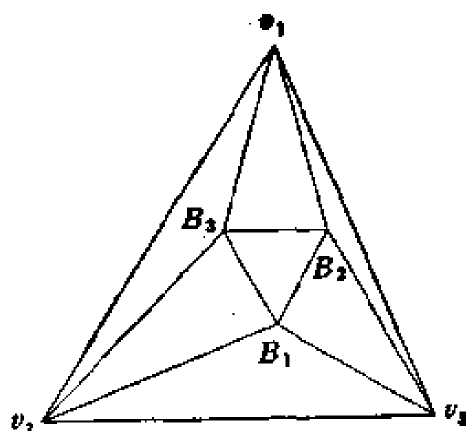


图 7.15

$$\boldsymbol{k}=\{4-k_1,\ 4-k_2,\ 4-k_3\},\ k=\sum_{i=1}^{3}(4-k_i).$$

于是由样条函数的维数公式有

命题 7.31 $\dim S_5^2(\Delta_{mt})=30+k+\delta.$

由此得到

定理 7.32 当 $\boldsymbol{k}=(0,0,0)$ 时,对于给定的 $f(x,y)\in C^2(T)$,存在唯一的样条函数 $s(x,y)\in S_5^2(T,\Delta_{mt})$,使得

$$\begin{cases}D^\alpha s(v_i)=D^\alpha f(v_i),\ |\alpha|\leqslant 2,\\ \dfrac{\partial^l}{\partial n_i^l}s(v_{l,t}^{(i)})=\dfrac{\partial^l}{\partial n_i^l}f(v_{l,t}^{(i)}),\ t=1,\cdots,l,l=1,2,\\ s(B_i)=f(B_i),\ i=1,2,3.\end{cases}$$

定理 7.33 当 $\boldsymbol{k}\neq(0,0,0)$, $\delta=0$ 时,对给定的 $f(x,y)\in C^2(T)$, 存在唯一的样条函数 $s(x,y)\in S_5^2(T,\Delta_{mt})$, 使得

$$\begin{cases}D_i^\alpha(v_i)=D^\alpha f(v_i),\ |\alpha|\leqslant 2,\\ \dfrac{\partial^l}{\partial n_i^l}s(v_{l,t}^{(i)})=\dfrac{\partial^l}{\partial n_i^l}f(v_{l,t}^{(i)}),\ t=1,\cdots,l,\ l=1,2,\\ s(B_i)=f(B_i),D_{B_iA_j}s(B_i)=D_{B_iA_j}f(B_i),\ i=1,2,3,\end{cases}$$

其中 $D_{B_iA_j}$ 为沿 B_iA_j 方向的方向导数, B_i 与某 B_j,A_j 共线。

定理 7.34 当 $\delta=1$ 时, $k=2$, 对于给定的 $f(x,y)\in C^2(T)$, 存在唯一的样条函数 $s(x,y)\in S_5^2(T,T_{mt})$, 使得

$$D^{\alpha}s(v_i)=D^{\alpha}f(v_i),\ |\alpha|\leqslant 2,$$
$$\frac{\partial^l}{\partial n_i^l}s(v_{l,s}^{(i)})=\frac{\partial^l}{\partial n_i^l}f(v_{l,s}^{(i)}),\ s=1,\cdots,l,\ l=1,2,$$
$$s(B_i)=f(B_i),\ i=1,2,3;$$
$$D_{B_rA_j}s(B_r)=D_{B_rA_j}f(B_r),\ D_{B_rA_k}s(B_r)=D_{B_rA_k}f(B_r),$$
$$D_{B_rA_j}D_{B_rA_k}s(B_r)=D_{B_rA_j}D_{B_rA_k}f(B_r),$$
此处 B_r 为奇异内网点，$r\neq k\neq j\neq r$.

这一节介绍的所有插值格式均是在三角形 T 的某种特定的，即对称的且 T 的每一边均无新的分点的加细剖分 T^* 上建立的.通常可利用压缩参数的方法简化定理 7.32—7.34 中的插值格式，以得到具有 21，24 和 24 个自由参数的简化的插值格式. 在实际问题中，除顶点 v_i 点处的数据外，其余的均非原始数据. 故需设法将它们用已知的原始数据合理地表示，即对这些参数进行压缩.在实际应用中，人们常常根据具体的问题选择压缩参数的方法和技巧，如在保证插值问题的解具有较高的代数精度的前提下，压缩 B_i 处的函数值及导数值. 压缩参数的方法、技巧以及简化后的插值格式，在这里不一一介绍了.

一般地，如下的细分方式是可行的:

(1) 当 $\mu=2m-1, m=1,2,\cdots$时构造 m-HCT 加细剖分:

步骤 1. 对 $m=1$ 时，取三角形 T 的重心，并与各顶点相连，构成 T 的 HCT 细分，记作 1-HCT 加细剖分;

步骤 m. 若已获得 $(m-1)$-HCT 加细剖分，我们分别将 $(m-1)$-HCT 加细剖分中的以 T 的边界为边的每一子三角形分成相应的 1-HCT 细分，这样便得到了 m-HCT 加细剖分. 结合前面的讨论，可以期望在 T 的 m-HCT 加细剖分上存在着 $(\mu;\mu,2\mu+1)$ 插值格式，$\mu=2m-1$，$m=1,2,\cdots$. 实际上，对 $m=2$ 情形可以得到 2-HCT 加细剖分下 (3;3,7) 插值格式的存在性[153].

(2) 当 $\mu=2m$, $m=1,2,\cdots$时，构造 m-MS 型加细剖分:

步骤 1. $m=1$，取 T 内的三个不同点，进行三角形单元 T 的

Morgan-Scott 型剖分，记为 1-MS 加细剖分；

步骤 m. 若已获得 $(m-1)$-MS 加细剖分，我们分别将以 T 的边界为边的子三角形细分成 1-MS 加细剖分，这样便得到了 T 的 m-MS 加细剖分. 自然地，也可以期望在 T 的 m-MS 型加细剖分上存在着 $(\mu;\mu,\ 2\mu+1)$ 插值格式，$\mu=2m$，$m=1,2,\cdots$。当 $m=1$ 情形便是前面提到的 $(2,2,5)$ 插值格式。

§2. 参 数 曲 面

2.1 参数曲面的光滑拼接

在参数曲面拼接中，连续性（或光滑性）的定义有两种，即参数连续与几何连续（或称视觉连续）。

1. 参数连续

定义 7.35 称一个曲面 $P(s,t)$，$(s,t)\in\Omega$ 在点 $(s_0,t_0)\in\Omega$ 处 k 阶参数连续 (C^k) 是指

$$D^{\alpha}P(s,t)=\frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial s}\frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial t}P(s,t)$$

$$|\alpha|=0,1,\cdots,k$$

在 (s_0,t_0) 处皆连续，其中 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2)$，$|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2$，$0\leqslant\alpha_1$，$\alpha_2\leqslant k$. 如果曲面 $P(s,t)$ 在定义域 Ω 上每一点处皆是 C^k 的，则称曲面 $P(s,t)$ 在 Ω 上关于参数 (s,t) 是 k 阶参数连续光滑的 (C^k)，或简称曲面 $P(s,t)$ 是 C^k 的.

显然，参数连续是关于某个整体参数而言的. 张量积型样条曲面通常是参数连续的，例如，双 3 次 B 样条曲面是 C^2 的；累加弦长双 3 次 Coons 曲面可以是 C^1 或 C^2 的. 然而以上这些曲面都是特殊曲面，对于一般的参数曲面的拼接来讲，参数连续的要求实在太苛刻了. 由于每一个拼接曲面的参数之间可以是无关的，要想达到参数的统一是很困难的，因此采用与参数选取无关的连续性条件才是更适宜的.

2. 几何连续

定义 7.36[131]　对于某曲面 $S\subset\boldsymbol{R}^3$，如果对任意点 $X\in S$，在其附近存在 S 的局部 C^k 光滑的参数表示，即存在 X 在 S 中的邻域 U_X 以及 C^k 映射 $P_X:D\rightarrow S$，使得 $P_X(D)=U_X$ 为 D 上 C^k 参数光滑的曲面，其中 $D\subset\boldsymbol{R}^2$ 为一平面区域，那么称 S 为 k 阶几何连续的，记为 GC^k.

显然，几何连续是同参数选取无关，而且是仿射不变的. 下面讨论两个曲面片几何光滑拼接的条件（参见 [131]，[155—164]）.

设 Ω_1 和 Ω_2 是平面上的两个区域，$E_1(s)$，$E_2(s)$ 分别为 Ω_1 和 Ω_2 的边界，如图 7.16. 为了讨论分别定义在 Ω_1 和 Ω_2 上的两曲面片沿着边界 E_1,E_2 的拼接问题，首先要通过参数变换使这两个曲面片在拼接边界的邻域内转化为定义在同一个域上的曲面. 这种参数变换是从 E_1 到 E_2 的 C^k 连接同胚，它是定义在 E_1 的某个邻域上的一个 C^k 同胚 $\phi:U_{E_1(s)}\rightarrow V_{E_2(s)}$，$\phi(E_1(s))=E_2(s)$，并且 ϕ 将 Ω_1 的内点映成 Ω_2 的外点，因而有

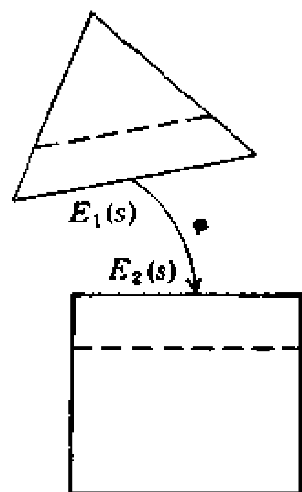


图　7.16

命题 7.37　两个 C^k 曲面片 $\boldsymbol{P}_1:\Omega_1\rightarrow\boldsymbol{R}^3$ 和 $\boldsymbol{P}_2:\Omega_2\rightarrow\boldsymbol{R}^3$ 在 E_1,E_2 处 GC^k 光滑拼接的充要条件是存在一个从 E_1 到 E_2 的 C^k 连续同胚 ϕ，使得 $\boldsymbol{P}_1$ 与 $\boldsymbol{P}_2\cdot\phi$ 在 $E_1(s)$ 上有直到 m 阶相同的偏导数，即

$$D_\alpha|_{E_1(s)}=D_\alpha(\boldsymbol{P}_2\cdot\phi)|_{E_1(s)},\qquad(7.66)$$
$$|\alpha|=0,1,\cdots,k,s\in[0,1].$$

这样，通过参数变换 ϕ，已得到了组合曲面在 $E_1(s)$ 的一个邻域上的 C^k 参数表示式

$$\boldsymbol{P}(X)=\begin{cases}\boldsymbol{P}_1(X) & \text{当 } X\in\Omega_1,\\ \boldsymbol{P}_2\cdot\phi(X) & \text{当 } X\notin\Omega_1,\text{ 但 }\phi(X)\in\Omega_2.\end{cases}$$

下面用方向导数关系来刻划曲面的几何连续性. 为此先介绍一个引理.

引理 7.38　设 Ω_1 和 Ω_2 为平面上的两个区域，$E_1(s)$，$E_2(s)$

分别是它们的边界，并且 $U(s)$ 是 $E_1(s)$ 上的 C^{k-1} 向量场，方向指向 E_1 内侧，$V^{(i)}(s)$ 是 $E_2(s)$ 上的 C^{k-i} 的向量场，$1 \leqslant i \leqslant k$，$V^{(i)}(s)$ 的方向指向 $E_2(s)$ 的外侧，那么存在一个从 E_1 到 E_2 的 C^k 连接同胚 ϕ，使得

$$D^j_{U(s)}\phi|_{E_1(s)} = V^{(j)}(s),\ j = 1,2,\cdots,k. \tag{7.67}$$

这里，$D^j_{U(s)}\phi = \frac{d^j}{dt^j}\phi(E_1(s) + tU(s))$ 是沿 $U(s)$ 方向的 j 阶方向导数。

由上面的引理及链锁规则，可得

定理 7.39[131] 两个曲面片 P_1, P_2 在 $E_1(s)$，$E_2(s)$ 上 GC^1 连续拼接的充要条件是存在 $E_1(s)$ 上 C^0 的指向内侧的向量场 $U(s)$ 及 $E_2(s)$ 上的指向外侧的 C^0 的向量场 $V(s)$，使得

$$D_{U(s)}P_1|_{E_1(s)} = D_{V(s)}P_2|_{E_2(s)}. \tag{7.68}$$

它们 GC^2 拼接的充要条件为 $U(s)$ 及 $V(s)$ 是 C^1 的，且存在 E_2 上的 C^0 的向量场 $W(s)$，使得

$$D^2_{U(s)}P_1|_{E_1(s)} = D^2_{V(s)}P_2|_{E_2(s)} + D_{W(s)}P_2|_{E_2(s)}. \tag{7.69}$$

类似地，还可以得到 GC^k 拼接的充要条件。

设 Ω_1 为以 $(0,0)$，$(1,0)$，$(0,1)$ 为顶点的三角形，Ω_2 为单位正方形，$U(s) \equiv (1,0)$，$V(s) = (v_1(s), v_2(s))$，$W(s) = (w_1(s), w_2(s))$，那么 P_1: $\Omega_1 \to R^3$ 与 P_2: $\Omega_2 \to R^3$ 于 $E_1 = (s,0)$ 及 $E_2 = (s,1)$ 边上 GC^2 光滑拼接的充要条件是

$$v_2(s) < 0, \tag{7.70}$$

$$P_1(s,0) = P_2(s,1), \tag{7.71}$$

$$D^{(0,1)}P_1(s,0) = v_1(s)D^{(1,0)}P_2(s,1) + v_2(s)D^{(0,1)}P_2(s,1) \tag{7.72}$$

$$\begin{aligned} D^{(0,2)}P_1(s,0) = {} & v_1^2(s)D^{(2,0)}P_2(s,1) + 2v_1(s)v_2(s)D^{(1,1)}P_2(s,1) \\ & + v_2^2(s)D^{(0,2)}P_2(s,1) + w_1(s)D^{(1,0)}P_2(s,1) \\ & + w_2(s)D^{(0,1)}P_2(s,1) \end{aligned} \tag{7.73}$$

$$s \in [0,1],$$

其中 $D^{(i,j)} = \frac{\partial^{i+j}}{\partial s^i \partial t^j}$，$i,j = 0, 1, 2$. (7.70)，(7.71)，(7.72) 为

GC^1 光滑拼接的充要条件. 对任意正整数 $k>0$, 可以类似得到 GC^k 光滑拼接的充要条件.

在实际应用中,通常取(7.72),(7.73)中的 $v_1(s),v_2(s),w_1(s),w_2(s)$ 为简单函数,以得到 GC^1 或 GC^2 光滑拼接的充分条件. 例如当 $\boldsymbol{V}(s)=(v_1(s),\ v_2(s))\equiv(0,\ 1)$, $\boldsymbol{W}(s)=(0,\ 0)$ 时, 式(7.72)与(7.73)就分别变成了

$$D^{(0,1)}\boldsymbol{P}_1(s,0)=D^{(0,1)}\boldsymbol{P}_2(s,1)$$

与

$$D^{(0,2)}\boldsymbol{P}_1(s,0)=D^{(0,2)}\boldsymbol{P}_2(s,1).$$

这实际上等价于参数光滑条件(只差一个平移变换).

下面以两个 n 次三角 Bernstein-Bézier 曲面片为例, 讨论光滑拼接条件.

设 $\boldsymbol{B}^n(\boldsymbol{\tau})=\sum\limits_{|\lambda|=n}\boldsymbol{b}_\lambda B_\lambda^n(\boldsymbol{\tau})$ 和 $\boldsymbol{C}^n(\boldsymbol{\tau})=\sum\limits_{|\lambda|=n}\hat{\boldsymbol{c}}_\lambda B_\lambda^n(\boldsymbol{\tau})$ 分别为两个 n 次参数形式的 B-B 曲面片,其中 $\boldsymbol{\tau}=(\tau_1,\tau_2,\tau_3)$, $\hat{\boldsymbol{\tau}}=(\hat{\tau}_1,\hat{\tau}_2,\hat{\tau}_3)$ 为面积坐标.我们首先讨论在 $\boldsymbol{\tau}^0=\hat{\boldsymbol{\tau}}^0=(0,\tau_2,\tau_3)$ 边上两曲面片的光滑拼接条件. 由 B-B 曲面的性质,不难得出:曲面片 $\boldsymbol{B}^n(\boldsymbol{\tau})$ 与 $\hat{\boldsymbol{C}}^n(\boldsymbol{\tau})$ 在 $\boldsymbol{\tau}^0=\hat{\boldsymbol{\tau}}^0$ 处 C^k 连续拼接的充要条件是存在平面上的两个相邻三角形 $T=\Delta\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2\boldsymbol{v}_3$ 及 $\hat{T}=\Delta\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2\boldsymbol{v}_3$, 使得对任意一个方向 $\boldsymbol{X}=\alpha_1\boldsymbol{v}_1+\alpha_2\boldsymbol{v}_2+\alpha_3\boldsymbol{v}_3=\hat{\alpha}_1\boldsymbol{v}_1+\hat{\alpha}_2\boldsymbol{v}_2+\hat{\alpha}_3\boldsymbol{v}_3$, $|\boldsymbol{\alpha}|=|\hat{\boldsymbol{\alpha}}|=0$, 皆有

$$D_{\boldsymbol{x}}^i\boldsymbol{B}^n(\boldsymbol{\tau}^0)=D_X^i\hat{\boldsymbol{c}}^n(\hat{\boldsymbol{\tau}}^0),\ i=0,1,\cdots,k. \tag{7.74}$$

从而

$$\hat{\boldsymbol{c}}_{\lambda^i}=\hat{\boldsymbol{b}}_{\lambda^0}^i(\boldsymbol{\sigma}),\ i=0,1,\cdots,k. \tag{7.75}$$

其中 $\boldsymbol{\sigma}$ 为 $\hat{\boldsymbol{P}}_1$ 关于 T 的面积坐标 $\boldsymbol{\lambda}^i=(i,\lambda_2,\lambda_3)$, $\boldsymbol{\lambda}^0=(0,\lambda_2,\lambda_3)$, $\boldsymbol{b}_{\lambda^0}^i(\boldsymbol{\sigma})=\sum\limits_{|\mu|=i}\boldsymbol{b}_{\lambda^0+\mu}B_\mu^i(\boldsymbol{\sigma})$, $\lambda_2+\lambda_3=n-i$, $\lambda_2,\lambda_3\geqslant 0$, $i=1,2,\cdots,k$.

这个条件对于参数曲面的光滑拼接是太强了. 对于某些复杂的三角剖分来说, 按照条件(7.75)来构造光滑曲面也是难以实现

的．在参数曲面的拟合中，采用几何光滑条件是方便的．下面给出相应的 GC^1 光滑拼接条件．

首先，在拼接处要有 C^0 连续性，即

$$\boldsymbol{b}_{\lambda^0}=\hat{\boldsymbol{c}}_{\lambda^0},\quad |\boldsymbol{\lambda}^0|=n,\quad \boldsymbol{\lambda}^0=(0,\lambda_2,\lambda_3). \tag{7.76}$$

$\boldsymbol{B}^n(\boldsymbol{\tau})$ 与 $\boldsymbol{C}^n(\boldsymbol{\tau})$ 的公共边界曲线为

$$\boldsymbol{B}^n(\boldsymbol{\tau}^0)=\sum_{|\lambda^0|=n}\boldsymbol{b}_\lambda\cdot B^n_{\lambda^0}(\boldsymbol{\tau}^0)=\sum_{|\lambda^0|=n}\hat{\boldsymbol{c}}_{\lambda^0}B^n_{\lambda^0}(\hat{\boldsymbol{\tau}}^0)=\hat{\boldsymbol{c}}^n(\hat{\boldsymbol{\tau}}_0) \tag{7.77}$$

在 $\boldsymbol{B}^n(\boldsymbol{\tau}^0)$ 上满足切平面连续当且仅当

$$[D_\gamma\boldsymbol{B}^n(\boldsymbol{\tau}^0),\ D_\alpha\boldsymbol{B}^n(\boldsymbol{\tau}^0),\ D_\beta\boldsymbol{C}^n(\hat{\boldsymbol{\tau}}_0)]=0, \tag{7.78}$$

其中 $\boldsymbol{\alpha}=(1,0,-1)$，$\boldsymbol{\beta}=(1,0,-1)$，$\boldsymbol{\gamma}=(0,1,-1)$．上式等价于存在函数 $\rho_1(\boldsymbol{\tau}^0),\rho_2(\boldsymbol{\tau}^0),\rho_3(\boldsymbol{\tau}^0)$，使得

$$\begin{aligned}
&\rho_1(\boldsymbol{\tau}^0)D_\gamma\boldsymbol{B}^n(\boldsymbol{\tau}^0)+\rho_2(\boldsymbol{\tau}^0)D_\alpha\boldsymbol{B}^n(\boldsymbol{\tau}^0)+\rho_3(\boldsymbol{\tau}^0)D_\beta\boldsymbol{C}^n(\boldsymbol{\tau}^0)\\
&=\rho_0(\boldsymbol{\tau}^0)n\sum_{|\lambda^0|=n-1}(\boldsymbol{b}_{\lambda^0+e^2}-\boldsymbol{b}_{\lambda^0+e^3})B^{n-1}_{\lambda^0}(\boldsymbol{\tau}^0)\\
&\qquad+\rho_2(\boldsymbol{\tau}_0)n\sum_{|\lambda^0|=n-1}(\boldsymbol{b}_{\lambda^0+e^1}-\boldsymbol{b}_{\lambda^0+e^3})B^{n-1}_{\lambda^0}(\boldsymbol{\tau}^0)\\
&\qquad+\rho_3(\boldsymbol{\tau}_0)n\sum_{|\lambda^0|=n-1}(\hat{\boldsymbol{c}}_{\lambda^0+e^1}-\hat{\boldsymbol{c}}_{\lambda^0+e^3})B^{n-1}_{\lambda^0}(\boldsymbol{\tau}^0)\\
&=n\sum_{|\lambda^0|=n-1}[\rho_1(\boldsymbol{\tau}^0)(\boldsymbol{b}_{\lambda^0+e^2}-\boldsymbol{b}_{\lambda^0+e^3})\\
&\qquad+\rho_2(\boldsymbol{\tau}^0)(\boldsymbol{b}_{\lambda^0+e^1}-\boldsymbol{b}_{\lambda^0+e^3})\\
&\qquad+\rho_3(\boldsymbol{\tau}^0)(\hat{\boldsymbol{c}}_{\lambda+e'}-\hat{\boldsymbol{c}}_{\lambda^0+e^3})]\cdot B^{n-1}_{\lambda^0}(\boldsymbol{\tau}^0)=0
\end{aligned} \tag{7.79}$$

其中 $e^1=(1,0,0)$，$e^2=(0,1,0)$，$e^3=(0,0,1)$．为使 $D_\alpha\boldsymbol{B}^n(\boldsymbol{\tau}^0)$ 与 $D_\beta\boldsymbol{C}^n(\boldsymbol{\tau}^0)$ 不在 $D_\gamma\boldsymbol{B}^n(\boldsymbol{\tau}^0)$ 的同一侧，$\rho_2(\boldsymbol{\tau}^0)\rho_3(\boldsymbol{\tau}^0)$ 必须小于零．

在实际应用中，常取(7.79)中的 $\rho_1(\boldsymbol{\tau}^0)$，$\rho_2(\boldsymbol{\tau}^0)$，$\rho_3(\tau^0)$ 为特定的函数．若 $\rho_1(\boldsymbol{\tau}^0)$，$\rho_2(\boldsymbol{\tau}^0)$，$\rho_3(\boldsymbol{\tau}^0)$ 分别恒等于常数 $\rho_1^*,\rho_2^*,\rho_3^*$ 且 $\rho_2^*\cdot\rho_3^*<0$，则相应地得到 $\boldsymbol{B}^n(\boldsymbol{\tau})$ 与 $\hat{\boldsymbol{C}}^n(\hat{\boldsymbol{\tau}})$ 在 $\boldsymbol{\tau}^0$ 处 GC^1 拼接的充分条件，它实际上是 C' 参数连续的条件．由(7.79)可推得

$$\rho_1^*(b_{\lambda^0+e^1}-b_{\lambda^0+e^3})+\rho_2^*(b_{\lambda^0+e^1}-b_{\lambda^0+e^3})$$
$$+\rho_3^*(\hat{c}_{\lambda^0+e^1}-\hat{c}_{\lambda^0+e^3})=0 \quad (7.80)$$
$$|\lambda^0|=n-1.$$

从而 (7.76) 及 (7.80) 是 $B^n(\tau)$ 与 $\hat{C}^n(\tau)$ 在 τ_0 处 GC^1 光滑拼接的一个充分条件. 如图 7.17 所示, $b_{\lambda^0+e^1}$, $b_{\lambda^0+e^3}=\hat{c}_{\lambda^0+e^3}$, $b_{\lambda^0+e^2}=\hat{c}_{\lambda^0+e^2}$, $\hat{c}_{\lambda^0+e^1}$ 是共面的, 而且 $|\lambda^0|=n-1$. 以下具体讨论低次 B-B 曲面片的 GC^1 拼接的一个充分条件. 当 $n=2$ 时, 由(7.79)得

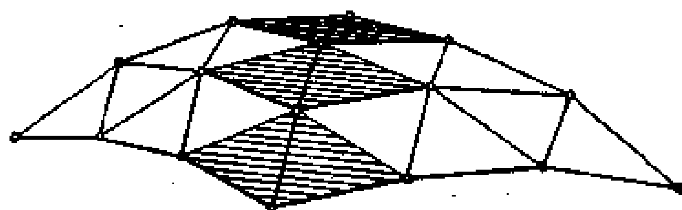


图 7.17

$$2\tau_3[\rho_1(0,\tau_2,\tau_3)(b_{011}-b_{002})+\rho_2(0,\tau_2,\tau_3)(b_{101}-b_{002})$$
$$+\rho_3(0,\tau_2,\tau_3)(\hat{c}_{101}-\hat{c}_{002})]+2\tau_2[\rho_1(0,\tau_2,\tau_3)(b_{020}-b_{011})$$
$$+\rho_2(0,\tau_2,\tau_3)(b_{110}-b_{011})+\rho_3(0,\tau_2,\tau_3)(\hat{c}_{110}-\hat{c}_{011})]=0. \quad (7.81)$$

这等价于

$$\begin{cases}\rho_1(0,0,1)(b_{011}-b_{002})+\rho_2(0,0,1)(b_{101}-b_{002}) \\ \qquad +\rho_3(0,0,1)(\hat{c}_{101}-\hat{c}_{002})=0, \\ \rho_1(0,1,0)(b_{020}-b_{011})+\rho_2(0,1,0)(b_{110}-b_{011}) \\ \qquad +\rho_3(0,1,0)(\hat{c}_{110}-\hat{c}_{020})=0\end{cases} \quad (7.82)$$

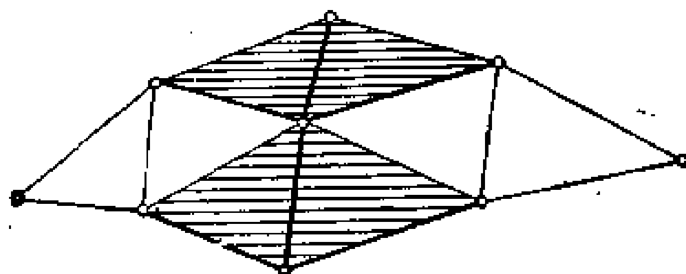


图 7.18

由 c^0 条件可知：两个二次曲面片 GC^1 光滑拼接的充要条件之几何意义是 $\boldsymbol{b}_{011}=\hat{\boldsymbol{c}}_{011}$，$\boldsymbol{b}_{002}=\hat{\boldsymbol{c}}_{002}$，$\boldsymbol{b}_{101}$，$\hat{\boldsymbol{c}}_{101}$ 和 $\boldsymbol{b}_{011}=\hat{\boldsymbol{c}}_{011}$，$\boldsymbol{b}_{020}=\hat{\boldsymbol{c}}_{020}$，$\boldsymbol{b}_{110}$，$\hat{\boldsymbol{c}}_{110}$ 均分别共面，如图 7.18 所示。当 $n=3$ 时，(7.79) 可以化为

$$\begin{aligned}
&3\tau_3^2[\rho_1(\boldsymbol{\tau}^0)(\boldsymbol{b}_{012}-\boldsymbol{b}_{003})+\rho_2(\boldsymbol{\tau}^0)(\boldsymbol{b}_{102}-\boldsymbol{b}_{003})\\
&\quad+\rho_3(\boldsymbol{\tau}^0)(\hat{\boldsymbol{c}}_{102}-\hat{\boldsymbol{c}}_{003})]+6\tau_2\tau_3[\rho_1(\boldsymbol{\tau}^0)(\boldsymbol{b}_{021}-\boldsymbol{b}_{012})\\
&\quad+\rho_2(\boldsymbol{\tau}^0)(\boldsymbol{b}_{111}-\boldsymbol{b}_{012})+\rho_3(\boldsymbol{\tau}^0)(\hat{\boldsymbol{c}}_{111}-\hat{\boldsymbol{c}}_{012})]\\
&\quad+3\tau_2^2[\rho_1(\boldsymbol{\tau}^0)(\boldsymbol{b}_{030}-\boldsymbol{b}_{021})+\rho_2(\boldsymbol{\tau}^0)(\boldsymbol{b}_{120}-\boldsymbol{b}_{021})\\
&\quad+\rho_3(\boldsymbol{\tau}^0)(\hat{\boldsymbol{c}}_{120}-\hat{\boldsymbol{c}}_{021})]=0。
\end{aligned}\tag{7.83}$$

特别地，若取 $\rho_1(\boldsymbol{\tau}^0)=\rho(0,\tau_2,\tau_3)=\alpha_1\tau_2+\beta_1\tau_3$，$\rho_2(\tau^0)=\alpha_2\tau_2+\beta_2\tau_3$，$\rho_3(\boldsymbol{\tau}^0)=\alpha_3\tau_2+\beta_3\tau_3$，则(7.83)可化为

$$\begin{aligned}
&3[\beta_1\boldsymbol{A}_0+\beta_2\boldsymbol{B}_0+\beta_3\boldsymbol{C}_0]\tau_3^3+3[(\alpha_1\boldsymbol{A}_0+\alpha_2\boldsymbol{B}_0+\alpha_3\boldsymbol{C}_0)\\
&\quad+2(\beta_1\boldsymbol{A}_1+\beta_2\boldsymbol{B}_1+\beta_3\boldsymbol{C}_1)]\tau_3^2\tau_2\\
&\quad+3[2(\alpha_1\boldsymbol{A}_1+\alpha_2\boldsymbol{B}_1+\alpha_3\boldsymbol{C}_1)+\beta_1\boldsymbol{A}_2+\beta_2\boldsymbol{B}_2\\
&\quad+\beta_3\boldsymbol{C}_2]\tau_3\tau_2^2+3[\alpha_1\boldsymbol{A}_2+\alpha_2\boldsymbol{B}_2+\alpha_3\boldsymbol{C}_2]\tau_2^3=0
\end{aligned}\tag{7.84}$$

这等价于

$$\begin{cases}
\beta_1\boldsymbol{A}_0+\beta_2\boldsymbol{B}_0+\beta_3\boldsymbol{C}_0=0\\
\alpha_1\boldsymbol{A}_0+\alpha_2\boldsymbol{B}_0+\alpha_3\boldsymbol{C}_0+2(\beta_1\boldsymbol{A}_1+\beta_2\boldsymbol{B}_1+\beta_3\boldsymbol{C}_1)=0\\
\alpha_1\boldsymbol{A}_2+\alpha_2\boldsymbol{B}_2+\alpha_3\boldsymbol{C}_2=0\\
2(\alpha_1\boldsymbol{A}_1+\alpha_2\boldsymbol{B}_1+\alpha_3\boldsymbol{C}_1)+\beta_1\boldsymbol{A}_2+\beta_2\boldsymbol{B}_2+\beta_3\boldsymbol{C}_2=0
\end{cases}\tag{7.85}$$

其中

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{A}_i=\boldsymbol{b}_{0(i+1)(2-i)}-\boldsymbol{b}_{0i(3-i)},\\
&\boldsymbol{B}_i=\boldsymbol{b}_{1i(2-i)}-\boldsymbol{b}_{0i(3-i)},\\
&\boldsymbol{C}_i=\hat{\boldsymbol{c}}_{1i(2-i)}-\hat{\boldsymbol{c}}_{0i(3-i)},\\
&i=1,2,0。
\end{aligned}$$

若 $\alpha_3\beta_2-\alpha_2\beta_3\neq 0$，式(7.85)的后两个等式又可化为

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{B}_1=\frac{1}{\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2}&\left\{\alpha_3\left[\beta_1\boldsymbol{A}_1+\frac{1}{2}(\alpha_1\boldsymbol{A}_0+\alpha_2\boldsymbol{B}_0+\alpha_3\boldsymbol{C}_0)\right.\right.\\
&\left.\left.-\beta_3\left[\alpha_1\boldsymbol{A}_1+\frac{1}{2}(\beta_1\boldsymbol{A}_2+\beta_2\boldsymbol{B}_2+\beta_3\boldsymbol{C}_2)\right]\right\}\right.,
\end{aligned}\tag{7.86}$$

$$C_1=\frac{1}{\alpha_2\beta_3-\beta_2\alpha_3}\left\{\beta_2\left[\alpha_1A_1+\frac{1}{2}(\beta_1A_2+\beta_2B_2+\beta_3C_2)\right]\right.$$

$$\left.-\alpha_2\left[\beta_1A_1+\frac{1}{2}(\alpha_1A_0+\alpha_2B_0+\alpha_3C_0)\right]\right\}. \qquad (7.87)$$

因此，(7.85)的前两个等式，(7.86)，(7.87) 式及 c^0 条件为 $B^3(\tau)$ 与 $\hat{c}_3(\tau)$ GC^1 光滑拼接的充分条件。如图 7.19 所示。

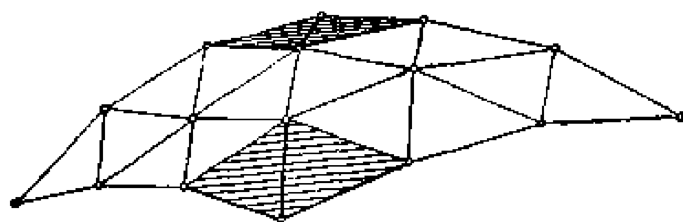


图 7.19

关于各种多项式或有理参数曲面间的几何光滑拼接条件可参见[155—164]等文献。

在任意三角剖分上构造光滑扦值样条曲面是实际中经常遇到的问题。各种细分格式，如 HCT，Powell-Sabin 格式等均有较多的应用。在构造几何光滑曲面时，在每个三角形元内部的各细分三角形之间一般能够满足参数光滑条件，而在两个相邻的三角形元之间则要求满足几何光滑条件。例如施锡泉和王天军[164]构造了 GC^1 的 3 次 HCT 格式。

2.2　张量积型参数曲面

在 CAGD 中，张量积型曲面有比较广泛的应用，其中常见的有双 3 次 Coons 曲面，B 样条曲面以及张量积型 Bézier 曲面等.张量积型曲面适用于较规则的四边形剖分下的曲面拟合问题。这里介绍几种张量积曲面的表示形式及其在曲面设计中的应用。

1. 双 3 次 Coons 曲面。

已知矩形参数域 $D=[0,1]\otimes[0,1]$ 的四个角点 (0, 0), (1,0),(0,1),(1,1)处的型值，参数 s,t 方向的切矢以及扭矢。用记号 **00**, **10**, **01**, **11**, 表示四个角点处的型值，$\mathbf{00}_s$, $\mathbf{00}_t$, $\mathbf{10}_s$, $\mathbf{10}_t$,

$\mathbf{01}_s$, $\mathbf{01}_t$, $\mathbf{11}_s$, $\mathbf{11}_t$ 表示角点处的 s, t 方向切矢，$\mathbf{00}_{st}$, $\mathbf{01}_{st}$, $\mathbf{10}_{st}$, $\mathbf{11}_{st}$ 表示角点处的扭矢。称曲面

$$\boldsymbol{r}(s,t)=[F_0(s),F_1(s),G_0(s),G_1(s)]\begin{bmatrix}\mathbf{00} & \mathbf{01} & \mathbf{00}_t & \mathbf{01}_t\\ \mathbf{10} & \mathbf{11} & \mathbf{10}_t & \mathbf{11}_t\\ \mathbf{00}_s & \mathbf{01}_s & \mathbf{00}_{st} & \mathbf{01}_{st}\\ \mathbf{10}_s & \mathbf{11}_s & \mathbf{10}_{st} & \mathbf{11}_{st}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}F_0(t)\\ F_1(t)\\ G_0(t)\\ G_1(t)\end{bmatrix} \tag{7.88}$$

为双 3 次 Coons 曲面，其中

$$\begin{cases}F_0(s)=2s^3-3s^2+1,\\ F_1(s)=-2s^3+3s^2,\\ G_0(s)=s^3-2s^2+s\\ G_1(s)=s^3-s^2\end{cases} \tag{7.89}$$

为 3 次混合函数，也称为 3 次 Hermite 基函数。

容易验证，曲面(8.23)满足插值性质

$$\begin{cases}\boldsymbol{r}(i,j)=\boldsymbol{ij},\\ \dfrac{\partial}{\partial s}\boldsymbol{r}(i,j)=\boldsymbol{ij}_s,\\ \dfrac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{r}(i,j)=\boldsymbol{ij}_t,\\ \dfrac{\partial^2}{\partial s\partial t}\boldsymbol{r}(i,j)=\boldsymbol{ij}_{st},\\ i,j=0,1.\end{cases} \tag{7.90}$$

曲面的四个边分别为 3 次 Hermite 插值曲线，曲面的形状由已知的角点信息所唯一确定。

双 3 次 Coons 曲面常用来构造双 3 次样条曲面。如果已给定规则分布的插值节点 $\boldsymbol{r}(s_i,t_j)=\boldsymbol{p}_{ij}$, $i=0,1,\cdots,n$, $j=0,1,\cdots,m$ 以及相应的 s, t 方向上的切矢及扭矢，则可以利用双 3 次 Coons 曲面分片来构造插值曲面，以得到整个的双 3 次样条插值曲面。这样的样条曲面通常是 C^1 连续的。对给定插值点列 $\boldsymbol{p}_{ij}$, $i=0,1,\cdots,n$, $j=0,1,\cdots,m$，相应的切矢常可通过对每一行

和列解 3 次累加弦长插值样条曲线的连续性方程而求得，扭矢则可由 s 方向的连续性方程关于 t 求导所得的连续性方程求得。

2. 张量积型 Bézier 曲面

设 $\boldsymbol{b}_{ij}$，$i=0,1,\cdots,n$，$j=0,1,\cdots,m$ 为 $\boldsymbol{R}^3$ 空间中的点，那么曲面

$$\boldsymbol{B}(s,t)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\boldsymbol{b}_{ij}B_{i,n}(s)B_{j,m}(t) \tag{7.91}$$

$$(s,t)\in[0,1]\otimes[0,1]$$

称为张量积型 Bézier 曲面，$\{\boldsymbol{b}_{ij}\}_{i=0,j=0}^{n\ \ m}$ 称为控制顶点，而

$$B_{i,n}(s)=\frac{n!}{i!(n-i)!}s^i(1-s)^{n-i}\quad i=0,1,\cdots,n, \tag{7.92}$$

为一元 Bernstein 基函数。

由 Bernstein 基函数的性质可知，张量积型 Bézier 曲面具有凸包性质，而且在角点处具有插值性质。当 $m=n=3$ 时，曲面(7.91)为双 3 次 Bézier 曲面，它可等价地表示为双 3 次 Coons 曲面，其中 Bézier 控制顶点 $\{\boldsymbol{b}_{ij}\}$ 与(7.89)中的角点信息之间的关系为

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{b}_{00} & \boldsymbol{b}_{01} & \boldsymbol{b}_{02} & \boldsymbol{b}_{03}\\ \boldsymbol{b}_{10} & \boldsymbol{b}_{11} & \boldsymbol{b}_{12} & \boldsymbol{b}_{13}\\ \boldsymbol{b}_{20} & \boldsymbol{b}_{21} & \boldsymbol{b}_{22} & \boldsymbol{b}_{23}\\ \boldsymbol{b}_{30} & \boldsymbol{b}_{31} & \boldsymbol{b}_{32} & \boldsymbol{b}_{33}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\mathbf{00} & \mathbf{00}+\frac{1}{3}\mathbf{00}_t \\ \mathbf{00}+\frac{1}{3}\mathbf{00}_s & \mathbf{00}+\frac{1}{3}(\mathbf{00}_t+\mathbf{00}_s)+\frac{1}{9}\mathbf{00}_{st} \\ \mathbf{10}-\frac{1}{3}\mathbf{10}_s & \mathbf{10}-\frac{1}{3}(\mathbf{10}_t-\mathbf{10}_s)-\frac{1}{9}\mathbf{00}_{st} \\ \mathbf{10} & \mathbf{10}+\frac{1}{3}\mathbf{10}_t\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{01}-\frac{1}{3}\mathbf{01}_t & \mathbf{01} \\ \mathbf{01}+\frac{1}{3}(\mathbf{01}_s-\mathbf{01}_t)-\frac{1}{9}\mathbf{01}_{st} & \mathbf{01}+\frac{1}{3}\mathbf{01}_s \\ \mathbf{11}-\frac{1}{3}(\mathbf{11}_s+\mathbf{11}_t)+\frac{1}{9}\mathbf{11}_{st} & \mathbf{11}-\frac{1}{3}\mathbf{11}_s \\ \mathbf{11}-\frac{1}{3}\mathbf{11}_t & \mathbf{11} \end{bmatrix}. \tag{7.93}$$

Bézier 曲面比较直观，它既可通过控制点的改变来进行修正，又具有良好的保形性和凸包性，因而有着广泛的应用。

3. B 样条曲面

给定空间点列 b_{ij}, $i=0,1,\cdots,n$, $j=0,1,\cdots,m$, 称 $(p-1)\times(q-1)$ 次参数曲面

$$P(s,t)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}b_{ij}N_{i,p}(s)N_{j,q}(t) \tag{7.94}$$

$$(s,t)\in[s_{p-1},s_{n+1}]\otimes[t_{q-1},t_{m+1}]$$

为 B 样条曲面，$\{b_{ij}\}$ 称为控制顶点。其中 $\{N_{i,p}(s)\}$, $\{N_{j,q}(t)\}$ 分别为 p 阶和 q 阶 B 样条基函数，对应的参数节点向量为 $(s_0,s_1,\cdots,s_{n+p})$, 及 $(t_0,t_1,\cdots,t_{m+q})$. B 样条基函数可递归定义为

$$N_{i,1}(s)=\begin{cases}1 & \text{当 } s\in[s_i,s_{i+1}],\\ 0 & \text{其它.}\end{cases}$$

$$N_{i,p}(s)=\frac{s-s_i}{s_{i+p-1}-s_i}N_{i,p-1}(s)+\frac{s_{i+p}-s}{s_{i+p}-s_{i+1}}N_{i+1,p-1}(s) \tag{7.95}$$

$i=0,1,2,\cdots,n$.

B 样条曲面具有很好的光滑性及凸包性，常用来进行样条曲面的拟合，通过反求控制顶点可以方便地用于光滑曲面插值。

4. 有理张量积型曲面

常用的有理张量积型曲面为有理 Bézier 曲面和有理 B 样条曲面。它们的表示形式分别为

$$R(s,t)=\frac{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} w_{ij}b_{ij}B_{i,n}(s)B_{j,m}(t)}{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} w_{ij}B_{i,n}(s)B_{j,m}(t)}, \tag{7.96}$$

$(s,t)\in[0,1]\otimes[0,1]$.

和

$$R(s,t)=\frac{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} w_{ij}b_{ij}N_{i,p}(s)N_{j,q}(t)}{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} w_{ij}N_{i,p}(s)N_{j,q}(t)}, \tag{7.97}$$

$s\in[s_{p-1},s_{n+1}]$, $t\in[t_{q-1},t_{m+1}]$,

其中 $w_{ij}>0$, $i=0,1,\cdots,n$, $j=0,1,\cdots,m$ 为权系数，$\{b_{ij}\}$ 为控制顶点。

曲面(7.96),(7.97)都具有凸包性质，而且曲面(7.96)与(7.91)有类似的角点性质。有理 Bézier 曲面与有理 B 样条曲面同多项式曲面的区别在于曲面的形状不是由控制顶点 $\{b_{ij}\}$ 所唯一确定的。通过调节 $\{w_{ij}\}$ 可以自由地改变曲面的形状，也可以改变曲面对某些控制点的接近程度。有理曲面的另外一个优点是能够精确地表示多种常见的特殊曲面，如球面，环面，柱面，锥面等。

2.3 几种特殊的参数曲面

1. 球面

R^3 空间中的球面隐式方程为

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2, \tag{7.98}$$

其中 $r_0(x_0,y_0,z_0)$ 为球心，R 为半径。其相应的参数方程为

$$r(\theta,\varphi)=R\cos\theta\cos\varphi\, i+R\sin\theta\cos\varphi\, j+R\sin\varphi\, k+r_0 \tag{7.99}$$

$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$, $-\frac{\pi}{2}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$.

这里 i,j,k 为 $oxyz$ 坐标系中三个轴的单位正交轴向量，如图 7.20。如果 $\theta\in[\theta_1,\theta_2]\subseteq[0,2\pi]$, $\varphi\in[\varphi_1,\varphi_2]\subseteq\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，则(7.99)定义的是球面的一部分，

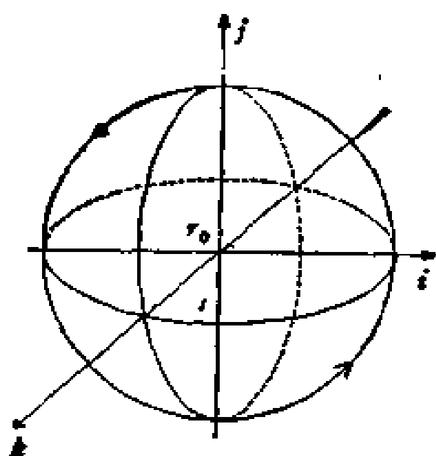


图 7.20

令 $u = \text{tg}\frac{\theta}{2}$, $v = \text{tg}\frac{\varphi}{2}$, 则相应地可得到球面的另一种表达形式

$$r(u,v) = \frac{R(1-u^2)(1-v^2)}{(1+u^2)(1+v^2)}i + \frac{2Ru(1-v^2)}{(1+u^2)(1+v^2)}j + \frac{2Rv}{1+v^2}k + r_0, \quad (7.100)$$

其中当 $u \in (-\infty, \infty)$, $v \in [-1, 1]$ 时,(7.100)定义的是整个球面;当 $u \in [u_1, u_2] \subseteq (-\infty, \infty)$, $v \in [v_1, v_2] \subseteq [-1, 1]$ 时,(7.100)定义的也是球面的一部分.

在曲面设计中,有时需要将球面表示为有理 Bézier 或有理 B 样条的形式,以便于进行光滑曲面拟合。下面考虑球面片

$$\begin{cases} r(\theta,\varphi) = R\cos\theta\cos\varphi i + R\sin\theta\cos\varphi j + R\sin\varphi k + r_0, \\ \theta \in [\theta_1, \theta_2], \quad \varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]. \end{cases} \quad (7.101)$$

不妨设 $\theta_1, \theta_2 \in [0, 2\pi]$, $\varphi_1, \varphi_2 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, 且 $0 < \theta_2 - \theta_1 < \pi$, $-\frac{\pi}{2} < \varphi_2 - \varphi_1 < \frac{\pi}{2}$, 如图 7.21. 曲面片是圆弧 $r(\theta_1, \varphi)$, $\varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2$, 绕向量 k 旋转到 $r(\theta_2, \varphi)$ 而得到的. 对任意 $\theta \in [\theta_1,$

$\theta_2]$，$r(\theta,\varphi)$，$\varphi\in[\varphi_1,\varphi_2]$ 是一段由 $r(\theta_1,\varphi)$ 旋转 $\theta-\theta_1$ 角的圆弧。由 2 次曲线的理论可知，圆弧 $r(\theta,\varphi)$ 可定义为下面的形式：

$$\begin{cases} r(\theta,\varphi)=\dfrac{w_0(\theta)r(\theta,\varphi_1)(1-v)^2+2w_1(\theta)r_*(\theta)v(1-v)+w_2(\theta)v^2r(\theta,\varphi_2)}{w_0(\theta)(1-v)^2+2w_1(\theta)v(1-v)+w_2(\theta)v^2}, \\ 0\leqslant v\leqslant 1, \end{cases} \tag{7.102}$$

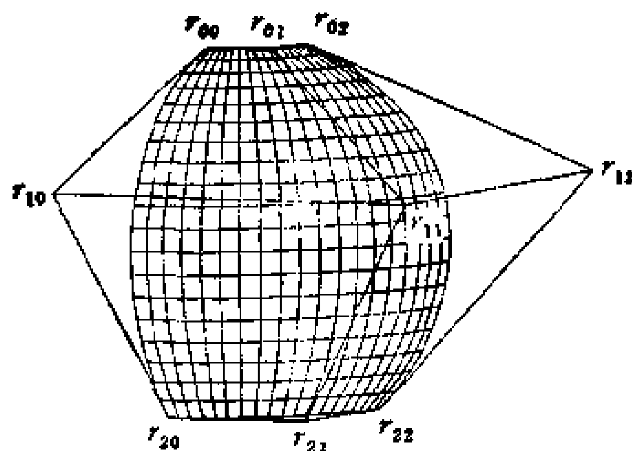


图 7.21

其中 $w_0(\theta)=w_2(\theta)=\dfrac{w_1(\theta)}{\cos\left(\dfrac{\varphi_2-\varphi_1}{2}\right)}>0$，而 $r(\theta,\varphi_1),r_*(\theta)$，$r(\theta,\varphi_2)$ 均相当于 2 次有理 Bézier 曲线的控制点。当 θ 取遍所有的 $[\theta_1,\theta_2]$ 值时，$r(\theta,\varphi_1)$，$r_*(\theta)$，$r(\theta,\varphi_2)$ 则是三段圆弧。它们还可分别表示成

$$\begin{aligned} r(\theta,\varphi_1)&=\hat{r}(u,\varphi_1)\\ &=\frac{w_{00}r_{00}(1-u)^2+2w_{10}r_{10}(1-u)u+w_{20}r_{20}u^2}{w_{00}(1-u)^2+2w_{10}(1-u)u+w_{20}u^2} \\ &=\frac{\sum\limits_{i=0}^{2}w_{i0}r_{20}B_{i,2}(u)}{w_0(\theta)}, \end{aligned} \tag{7.103}$$

$$r_1(\theta) = \hat{r}_1(u)$$

$$= \frac{w_{01}r_{01}(1-u)^2 + 2w_{11}r_{11}u(1-u) + w_{21}r_{21}u^2}{w_{01}(1-u)^2 + 2w_{11}u(1-u) + w_{21}u^2} \quad (7.104)$$

$$= \frac{\sum_{i=0}^{2} w_{i1}r_{i1}B_{i,2}(u)}{w_1(\theta)},$$

$$r(\theta, \varphi_2) = \tilde{r}(u, \varphi_2)$$

$$= \frac{w_{02}r_{02}(1-u)^2 + 2w_{12}r_{12}u(1-u) + w_{22}r_{22}u^2}{w_{02}(1-u)^2 + 2w_{12}u(1-u) + w_{22}u^2} \quad (7.105)$$

$$= \frac{\sum_{i=0}^{2} w_{i2}r_{i2}B_{i,2}(u)}{w_2(\theta)}$$

其中 $0 \leqslant u \leqslant 1$. 若将(7.103),(7.104),(7.105)代入到(7.102),则得到球面(7.101)的张量积型有理 Bézier 表示:

$$\begin{cases} r(u,v) = \dfrac{\sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{2} w_{ij}r_{ij}B_{i,2}(u)B_{j,2}(v)}{\sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{2} w_{ij}B_{i,2}(u)B_{j,2}(v)} \\ 0 \leqslant u, v \leqslant 1, \end{cases} \quad (7.106)$$

其中

$$r_{00} = r(\theta_1, \varphi_1) = R\cos\theta_1\cos\varphi_1 \boldsymbol{i} + R\sin\theta_1\cos\varphi_1 \boldsymbol{j} + R\sin\varphi_1 \boldsymbol{k} + r_0,$$

$$r_{20} = r(\theta_2, \varphi_1) = R\cos\theta_2\cos\varphi_1 \boldsymbol{i} + R\sin\theta_2\cos\varphi_1 \boldsymbol{j} + R\sin\varphi_1 \boldsymbol{k} + r_0,$$

$$r_{02} = r(\theta_1, \varphi_2) = R\cos\theta_1\cos\varphi_2 \boldsymbol{i} + R\sin\theta_1\cos\varphi_2 \boldsymbol{j} + R\sin\varphi_2 \boldsymbol{k} + r_0,$$

$$r_{22} = r(\theta_2, \varphi_2) = R\cos\theta_2\cos\varphi_2 \boldsymbol{i} + R\sin\theta_2\cos\varphi_2 \boldsymbol{j} + R\sin\varphi_2 \boldsymbol{k} + r_0,$$

$$r_{10} = \frac{R\cos\varphi_1}{\cos\left(\frac{\theta_2-\theta_1}{2}\right)}\left(\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}i + \sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}j\right)$$

$$+ R\sin\varphi_1 k + r_0,$$

$$r_{21} = \frac{R}{\cos\left(\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}\right)}\left(\cos\theta_2\cos\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}i\right.$$

$$\left. + \sin\theta_2\cos\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}j + \sin\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}k\right) + r_0,$$

$$r_{12} = \frac{R\cos\varphi_2}{\cos\left(\frac{\theta_2-\theta_1}{2}\right)}\left(\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}i + \sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}j\right)$$

$$+ R\sin\varphi_2 k + r_0,$$

$$r_{11} = \frac{R}{\cos\left(\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}\right)}\left[\frac{\cos\left(\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\right)}{\cos\frac{\theta_2-\theta_1}{2}}\left(\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}i\right.\right.$$

$$\left.\left. + \sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}j\right) + \sin\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}k\right] + r_0,$$

$$w_{00} = w_{02} = w_{20} = w_{22} = aw_{10} = bw_{01} = bw_{21} = aw_{12}$$

$$= abw_{11} > 0,$$

$$a = \frac{1}{\cos\left(\frac{\theta_2-\theta_1}{2}\right)},\quad b = \frac{1}{\cos\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}}.$$

通常取 $w_{00}=w_{02}=w_{20}=w_{22}=1$，其余的权系数可由此确定。

前面我们具体地将球面片表示成了有理 Bézier 曲面的形式。类似地，我们也可以把它表示成有理 Hermite 张量积型曲面或有理 B 样条张量积曲面，这里就不一一详述了。

在曲面设计中，三角曲面片的应用更为方便。下面考虑一种三角球面片。它是由三个互不平行的平面所截得的三段圆弧围成的球面片，如图 7.22。$r_{200}, r_{020}, r_{002}$ 分别是三角球面片的顶点。

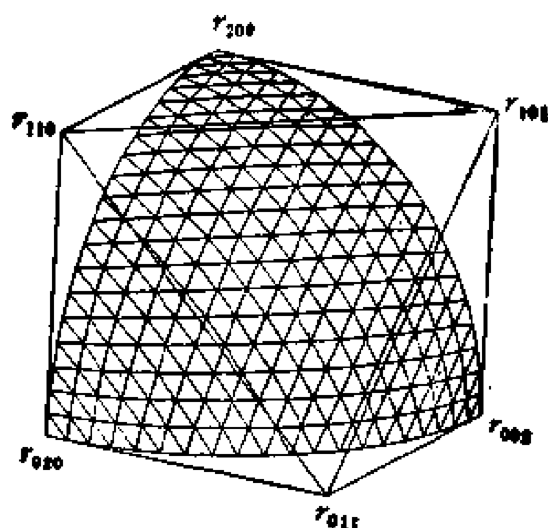


图 7.22

设三段圆弧的有理 Bézier 表示式为

$$r_1(u)=\frac{\sum_{i=0}^{2} w_i^1 r_i^1 B_{i,2}(u)}{\sum_{i=0}^{2} w_i^1 B_{i,2}(u)},$$

$$r_2(v)=\frac{\sum_{i=0}^{2} w_i^2 r_i^2 B_{i,2}(v)}{\sum_{i=0}^{2} w_i^2 B_{i,2}(v)},$$

$$r_3(w)=\frac{\sum_{i=0}^{2} w_i^3 r_i^3 B_{i,2}(w)}{\sum_{i=0}^{2} w_i^3 B_{i,2}(w)},$$

$$0\leqslant u,v,w\leqslant 1,$$

其中

$$\begin{cases} r_0^1=r_2^3=r_{200},\ r_0^2=r_2^1=r_{020},\ r_2^2=r_0^3=r_{002},\\ w_0^1=w_2^3=w_{200}=w_0^2=w_2^1=w_{020}=w_2^2=w_0^3=w_{002}=1,\\ r_1^1=r_{110},\ r_1^2=r_{011},\ r_1^3=r_{101},\end{cases}$$

$$
\begin{cases}
w_1^1 = w_{110} = \dfrac{|r_2^1 - r_0^1|}{2|r_1^1 - r_0^1|}, \quad w_1^2 = w_{011} = \dfrac{|r_2^2 - r_0^2|}{2|r_1^2 - r_0^2|}, \\
w_1^3 = w_{101} = \dfrac{|r_2^3 - r_0^3|}{2|r_1^3 - r_0^3|},
\end{cases}
$$

我们知道，由 (r_λ, w_λ)，$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$，$|\lambda| = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$，$0 \leqslant \lambda_i \leqslant 2$，$i = 1,2,3$ 可以唯一确定一个 2 次有理 Bézier 曲面片

$$
\begin{cases}
r(\tau) = \dfrac{\sum\limits_{|\lambda|=2} r_\lambda w_\lambda B_\lambda^2(\tau)}{\sum\limits_{|\lambda|=2} w_\lambda B_\lambda^2(\tau)}, \\
\tau = (\tau_1, \tau_2, \tau_3), \ \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 1, \ 0 \leqslant \tau_1, \tau_2, \tau_3 \leqslant 1.
\end{cases}
\tag{7.107}
$$

这就是球面片的有理 Bézier 曲面片表示.

实际上，对任意 2 次曲面 $f(x,y,z) = 0$ 来讲，用三个互不平行的平面所截得的三角曲面片都可以表示成 2 次有理 Bézier 形式。此时，三条边界曲线段是一般的 2 次曲线段，且由此可确定 $\{r_\lambda\}$. $\{w_\lambda\}$ 满足条件

$$
\begin{cases}
w_{200} \cdot w_{020} = k_1^2 w_{110}^2, \\
w_{020} \cdot w_{002} = k_2^2 w_{011}^2, \\
w_{002} \cdot w_{200} = k_3^2 w_{101}^2,
\end{cases}
\tag{7.108}
$$

其中 k_1, k_2, k_3 分别为三条 2 次曲线的固有值。

2. 环面

环面是通过平面上的圆绕该平面上某一直线旋转一周而得到的。它的参数表示式为

$$
\begin{cases}
r(u,v) = r_0 + \left(a + b\dfrac{1-u^2}{1+u^2}\right)\left(\dfrac{1-v^2}{1+v^2}\right)i \\
\qquad\qquad + \left(a + b\dfrac{1-u^2}{1+u^2}\right)\dfrac{2v}{1+v^2}j + \dfrac{2bu}{1+u^2}k, \\
-\infty < u < +\infty, \ -\infty < v < +\infty.
\end{cases}
\tag{7.109}
$$

或

$$
\begin{cases}
\boldsymbol{r}(\theta,\varphi)=\boldsymbol{r}_0+(a+b\cos\theta)\cos\varphi\boldsymbol{i}+(a+b\cos\theta)\sin\varphi\boldsymbol{j} \\
\qquad\qquad +b\sin\theta\boldsymbol{k}, \\
0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi.
\end{cases}
\tag{7.110}
$$

如图 7.23. 其中 (7.109) 或 (7.110) 中的 a,b 通常为非负的. 当 $a=0$, $b>0$ 时, $\boldsymbol{r}(u,v)$ 是球面;当 $0<a\leqslant b$ 时, 环面的内侧是自交的;一般的环面是 $a>b>0$; 如果 $a>0$, $b=0$, 则 $\boldsymbol{r}(u,v)$ 是柱面.

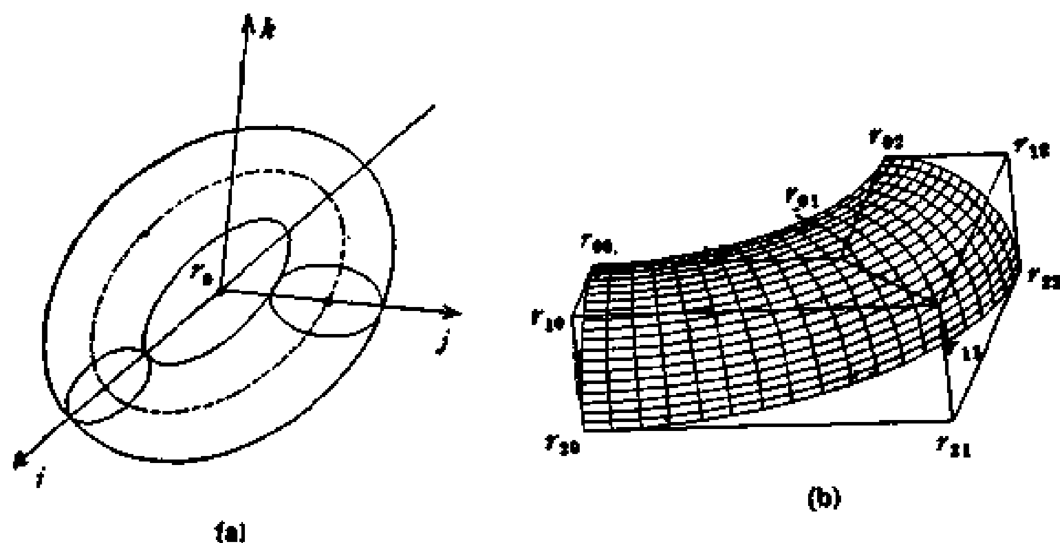


图 7.23

我们也可以把环面表示成张量积型的有理 Bézier 曲面或有理 B 样条曲面. 不妨只考虑曲面片 $\boldsymbol{r}(\theta,\varphi)$, $0\leqslant\theta_1\leqslant\theta\leqslant\theta_2\leqslant\pi$; $0\leqslant\varphi_1\leqslant\varphi\leqslant\varphi_2$; 且 $0<\theta_2-\theta_1<\pi$, $0<\varphi_2-\varphi_1<\pi$. 经推导可得

$$
\boldsymbol{r}(u,v)=\frac{\sum_{j=0}^{2} w_j(u)\boldsymbol{r}_j(u)B_{j,2}(v)}{\sum_{j=0}^{2} w_j(u)B_{j,2}(v)}
$$

$$
=\frac{\sum_{j=0}^{2}\left(\sum_{i=0}^{2} w_{ij}\boldsymbol{r}_{ij}B_{i,2}(u)\right)B_{j,2}(v)}{\sum_{j=0}^{2}\left(\sum_{i=0}^{2} w_{ij}B_{i,2}(u)\right)B_{j,2}(v)},
$$

$$= \frac{\sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{2} w_{ij}\boldsymbol{r}_{ij}B_{i,2}(u)B_{j,2}(v)}{\sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{2} w_{ij}B_{i,2}(u)B_{j,2}(v)}, \qquad (7.111)$$

其中 $w_{20}=w_{02}=w_{22}=w_{00}=1$，$w_{21}=w_{01}=\cos\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}$，$w_{12}=w_{10}=\cos\frac{\theta_2-\theta_1}{2}$，$w_{11}=\cos\frac{\theta_2-\theta_1}{2}\cos\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}$，$\boldsymbol{r}_{00}=\boldsymbol{r}(\theta_1,\varphi_1)$，$\boldsymbol{r}_{02}=\boldsymbol{r}(\theta_1,\varphi_2)$，$\boldsymbol{r}_{20}=\boldsymbol{r}(\theta_2,\varphi_1)$，$\boldsymbol{r}_{22}=\boldsymbol{r}(\theta_2,\varphi_2)$，$\boldsymbol{r}_{01},\boldsymbol{r}_{10},\boldsymbol{r}_{12},\boldsymbol{r}_{21}$ 分别是圆弧 $\boldsymbol{r}(\theta_1,\varphi)$，$\boldsymbol{r}(\theta,\varphi_1)$，$\boldsymbol{r}(\theta,\varphi_2)$，$\boldsymbol{r}(\theta_2,\varphi)$ 在各自两端点处切线的交点，而 $\boldsymbol{r}_{11}$ 是过 $\boldsymbol{r}_{01},\boldsymbol{r}_{21}$ 的分别垂直于 $\boldsymbol{r}(\theta_1,\varphi)$，$\boldsymbol{r}(\theta_2,\varphi)$ 所在平面的两直线的交点.

3. 旋转面

设平面上的一条曲线

$$\boldsymbol{c}(v)=f(v)\boldsymbol{i}+g(v)\boldsymbol{k}+\boldsymbol{r}_0,\quad a\leqslant v\leqslant b \qquad (7.112)$$

绕 $\boldsymbol{k}$ 轴旋转一周后就得到一个旋转面，其方程为

$$\boldsymbol{r}(u,v)=f(v)\cos u\boldsymbol{i}+f(v)\sin u\boldsymbol{j}+g(v)\boldsymbol{k}+\boldsymbol{r}_0 \qquad (7.113)$$

此处 $0\leqslant u\leqslant 2\pi$，$a\leqslant v\leqslant b$. 这里 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 为 3D 坐标系的三个单位轴向量，$\boldsymbol{r}_0$ 为 3D 坐标系的原点. 当 $u\in[\theta_1,\theta_2]$，$0\leqslant\theta_1<\theta_2\leqslant 2\pi$ 时，方程(7.113)表示旋转面的一部分.

曲线 $\boldsymbol{c}(v)$ 是一条平面有理样条曲线，所以由它生成的旋转面 $\boldsymbol{r}(u,v)$ 是曲线 $\boldsymbol{c}(v)$ 中诸分段曲线经旋转所得曲面片的组合. 此处只讨论由一有理 Bézier 曲线段经旋转而产生的旋转曲面片. 设 $\boldsymbol{c}(v)$ 为一条有理 Bézier 曲线:

$$\boldsymbol{c}(v)=\frac{\sum_{i=0}^{n} w_i\boldsymbol{b}_iB_{i,n}(v)}{\sum_{i=0}^{n} w_iB_{i,n}(v)},\quad v\in[0,1] \qquad (7.114)$$

对任意给定的 $\theta\in[\theta_1,\theta_2]$，曲线 $\boldsymbol{c}(v)$ 绕直线 l 旋转 θ 角后所得的曲线为

$$r(\theta,v)=\frac{\sum_{i=0}^{n} w_i \boldsymbol{b}_i(\theta) B_{i,n}(v)}{\sum_{i=0}^{n} w_i B_{i,n}(v)}\tag{7.115}$$

其中对任意 $i=0,1,\cdots,n$, $\boldsymbol{b}_i(\theta)$, $\theta\in[\theta_1,\theta_2]$ 为圆弧. 不妨假设 $0<\theta_2<\theta_1<\pi$, 则每段这样的圆弧的可以表示为

$$\boldsymbol{b}_i(\theta)=\tilde{\boldsymbol{b}}_i(u)=\frac{\sum_{j=0}^{2} w_{ji}\boldsymbol{b}_{ji}B_{j,2_i}(u)}{\sum_{j=0}^{2} w_{ji}B_{j,2}(u)},\tag{7.116}$$

其中 $w_{0i}=w_{2i}=\frac{1}{\cos\frac{\theta_2-\theta_1}{2}}w_{1i}=1$. 当旋转轴 l 为 $\boldsymbol{k}$ 轴时，将(7.116)代入到(7.115),则得到旋转曲面的有理 Bézier 表示式:

$$\boldsymbol{r}(u,v)=\frac{\sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{n}\alpha_{ij}\boldsymbol{b}_{ij}B_{i,2}(u)B_{j,n}(v)}{\sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{n}\alpha_{ij}B_{i,2}(u)B_{j,n}(v)},\tag{7.117}$$

此处 $\alpha_{ij}=w_iw_j$, $i=0,1,2$, $j=0,1,\cdots,n$, $0\leqslant u\leqslant 1$, $0\leqslant v\leqslant 1$, $\boldsymbol{b}_{0j}$ 为 $\boldsymbol{b}_j$ 绕 $\boldsymbol{k}$ 轴旋转 θ_1 角后的象, $\boldsymbol{b}_{2j}$ 为 $\boldsymbol{b}_j$ 绕 $\boldsymbol{k}$ 轴旋转 θ_2 角后的象，而 $\boldsymbol{b}_{1j}$ 为圆弧 $\boldsymbol{b}_j(\theta)$ 在 $\boldsymbol{b}_{0j}$ 与 $\boldsymbol{b}_{2j}$ 处两切线的交点, $j=0,1,\cdots,n$.

也可以把旋转曲面表示成张量积型的有理 B 样条曲面或张量积型分片有理 Hermite 曲面,这里就不详细描述了.

4. 柱面、锥面、直纹面、可展曲面

a) 直纹面

曲线 $\boldsymbol{a}(u)$ 及其上的连续单位向量场 $\boldsymbol{l}(u)$ 可以定义一个直纹面,其方程为

$$\boldsymbol{r}(u,v)=\boldsymbol{a}(u)+v\boldsymbol{l}(u).\tag{7.118}$$

当 $u\in[a,b]$, $v\in[c,d]$ 时,由(7.118)式定义的曲面称为直纹面,

它可以表示成

$$
\begin{aligned}
r(u,v) &= \frac{d-v}{d-c}a_1(u) + \frac{v-c}{d-c}a_2(u) \\
&= (1-t)a_1(u) + ta_2(u),
\end{aligned}
\tag{7.119}
$$

其中 $a_1(u)=r(u,c)$，$a_2(u)=r(u,d)$，$t=\dfrac{v-c}{d-c}$，$u\in[a,b]$，$v\in[c,d]$，$t\in[0,1]$，参见7.24图．按直纹面的定义，它是一直线沿着曲线 $a(u)$ 移动而得到的，这些直线就是直纹面的母线．当(7.119)中的 $a(u)$ 为常数时，则相应的方程为

$$
r(u,v)=a+vl(u). \tag{7.120}
$$

此时，它表示的是锥面．当 $l(u)$ 为常数时，方程(7.120)变成了

$$
r(u,v)=a(u)+vl \tag{7.121}
$$

它表示的是柱面．因此，柱面、锥面均是特殊的直纹面．

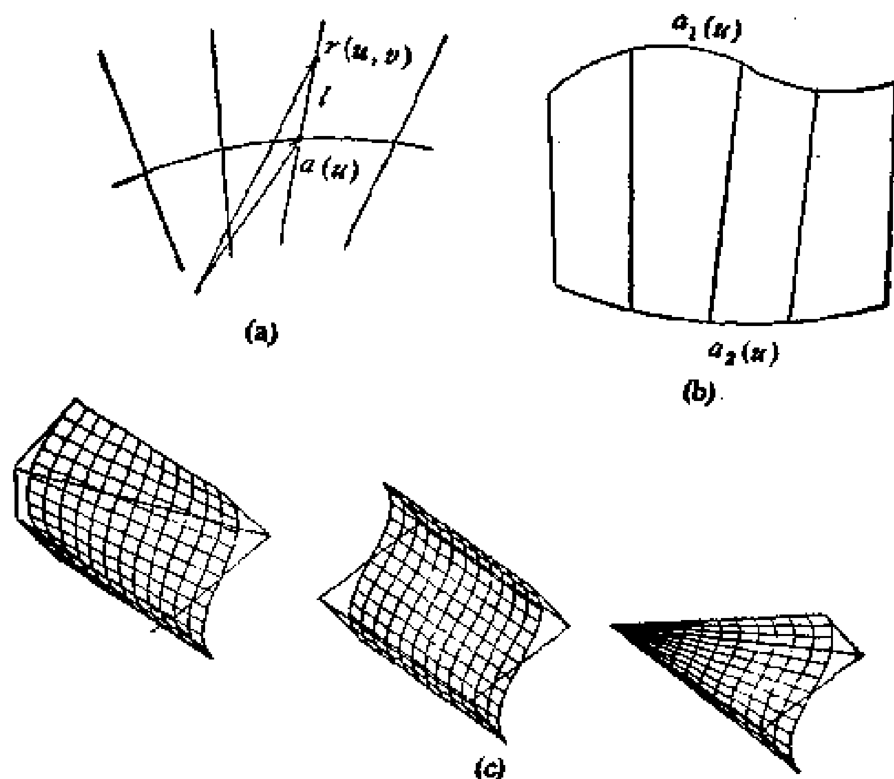


图 7.24

在曲线曲面设计中，一片直纹面通常是由(7.119)的形式来定义的。而 $a_1(u)$, $a_2(u)$ 是两条任意的曲线。一般地，它们都是有理或多项式参数样条曲线。通过重新参数化，可将它们的参数和节点统一起来，以便处理。不失一般性，此处假设

$$a_1(u)=\frac{\sum_{i=0}^{n_1} w_{i0}b_{i0}B_{i,n_1}(u)}{\sum_{i=0}^{n_1} w_{i0}B_{i,n_1}(u)},\quad u\in[0,1] \tag{7.122}$$

$$a_2(u)=\frac{\sum_{i=0}^{n_2} w_{i1}b_{i1}B_{i,n_2}(u)}{\sum_{i=0}^{n_2} w_{i2}B_{i,n_2}(u)},\quad u\in[0,1] \tag{7.123}$$

为两段有理 Bézier 曲线。通过升阶公式，可以把 $a_1(u)$, $a_2(u)$ 表示成相同次数的有理 Bézier 曲线。因而可不妨设 $n_1=n_2=:n$。将(7.122),(7.123)代入到(7.119)，并令 $c=0$, $d=1$，得到

$$\begin{aligned} r(u,v) &= (1-v)a_1(u)+va_2(u) \\ &= \frac{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{1} w_{ij}b_{ij}B_{i,n}(u)B_{j,1}(v)}{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{1} w_{ij}B_{i,n}(u)B_{j,1}(v)}, \\ & (u,v)\in[0,1]\otimes[0,1]. \end{aligned} \tag{7.124}$$

b) 可展曲面

如果沿着一个直纹面的母线，切平面都相同，就把这种直纹面称为可展曲面。由此可知，可展曲面的切平面只依赖于一个参数，这种曲面实质上是单参数曲面族的包络面。直纹面 $r(u,v)=a(u)+vl(u)$ 为可展曲面的充要条件是

$$[a',l,l']=0 \tag{7.125}$$

即向量 $a'(u)$, $l(u)$, $l'(u)$ 共面。当 $l\times l'=0$，也就是 $l'=0$ 时，该曲面称为柱面。直纹面还可以表示为 $r(u,v)=(1-v)a_1(u)+va_2(u)$，此时相应于(7.125)的充要条件是

$$[\boldsymbol{a}_1', \boldsymbol{a}_2(u) - \boldsymbol{a}_1(u), \boldsymbol{a}_2'(u)] = 0 \tag{7.126}$$

即 $\boldsymbol{a}_1'(u)$，$\boldsymbol{a}_2(u) - \boldsymbol{a}_1(u)$，$\boldsymbol{a}_2'(u)$ 对任意的 u 皆共面。也就是说，存在纯量函数 $\alpha(u), \beta(u), \gamma(u)$ 使

$$\alpha(u)\boldsymbol{a}_1'(u) + \beta(u)(\boldsymbol{a}_2(u) - \boldsymbol{a}_1(u)) + \gamma(u)\boldsymbol{a}_2'(u) = 0 \tag{7.127}$$

成立。如果 $\boldsymbol{a}_1(u) = \sum_{i=0}^{n} \boldsymbol{p}_i B_{i,n}(u)$，$\boldsymbol{a}_2(u) = \sum_{i=0}^{n} \boldsymbol{q}_i B_{i,n}(u)$ 分别为 n 次 Bézier 曲线，则

$$\boldsymbol{a}_1'(u) = n \sum_{i=0}^{n-1} (\boldsymbol{p}_{i+1} - \boldsymbol{p}_i) B_{i,n-1}(u)$$

$$= \sum_{i=0}^{n} [(\boldsymbol{p}_i - \boldsymbol{p}_{i-1}) + n - i(\boldsymbol{p}_{i+1} - \boldsymbol{p}_i)]\, B_{i,n}(u),$$

$$\boldsymbol{a}_2'(u) = n \sum_{i=0}^{n-1} (\boldsymbol{q}_{i+1} - \boldsymbol{q}_i) B_{i,n-1}(u)$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \left[\frac{i}{n}(\boldsymbol{q}_i - \boldsymbol{q}_{i-1}) + n - i\ (\boldsymbol{q}_{i+1} - \boldsymbol{q}_i)\right] B_{i,n}(u),$$

$$\boldsymbol{a}_2(u) - \boldsymbol{a}_1(u) = \sum_{i=0}^{n} (\boldsymbol{q}_i - \boldsymbol{p}_i) B_{i,n}(u).$$

当 $\alpha(u) \equiv \alpha^*$，$\beta(u) \equiv \beta^*$，$\gamma(u) \equiv \gamma^*$ 时，代入到(7.127)可得

$$\alpha^*\boldsymbol{a}_1'(u) + \beta^*(\boldsymbol{a}_2(u) - \boldsymbol{a}_1(u)) + \gamma^*\boldsymbol{a}_2'(u)$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \Big\{\alpha^* [(\boldsymbol{p}_i - \boldsymbol{p}_{i-1}) + n - i\ (\boldsymbol{p}_{i+1} - \boldsymbol{p}_i)]$$

$$+ \beta^*(\boldsymbol{q}_i - \boldsymbol{p}_i) + \gamma^* \Big[\frac{i}{n}(\boldsymbol{q}_i - \boldsymbol{q}_{i-1})$$

$$+ n - i\ (\boldsymbol{q}_{i+1} - \boldsymbol{q}_i)\Big]\Big\} B_{i,n}(u) = 0 \tag{7.128}$$

从而条件

$$\alpha^* \left[\frac{i}{n}(\boldsymbol{p}_i - \boldsymbol{p}_{i-1}) + n - i\ (\boldsymbol{p}_{i+1} - \boldsymbol{p}_i)\right] + \beta^*(\boldsymbol{q}_i - \boldsymbol{p}_i)$$

$$+ \gamma^* \left[\frac{i}{n}(\boldsymbol{q}_i - \boldsymbol{q}_{i-1}) + n - i\ (\boldsymbol{q}_{i+1} - \boldsymbol{q}_i)\right] = 0 \tag{7.129}$$

是曲面 $r(u,v)=(1-v)a_1(u)+va_2(u)$ 为可展曲面的一个充分条件。这里 $p_{-1}=q_{-1}=p_{n+1}=q_{n+1}=0$.

当 $l(u)=a'(u)$ 时，曲面 $r(u,v)=a(u)+vl(u)$ 为一切线面。此时，曲线 $a(u)$ 称为这个切线面的脊线。切线面是可展曲面。当 $a(u)\equiv a$ 退化为一点时，$r(u,v)=a(u)+vl(u)$ 为一锥面,它也是可展曲面。事实上,直纹面为可展曲面的一个充要条件是：它为柱面,或者是锥面,或者是切线面。

2.4 参数曲面拟合

在曲面设计的许多实际问题中，原始数据是按较规则的四边形网格分布的。在这种情况下，张量积型样条曲面起着重要的作用。例如前面曾经介绍过的双 3 次曲面，张量积型 Bézier 曲面，张量积型 B 样条曲面都是在实际中经常使用的曲面拟合工具。这里仅讨论如何利用张量积型 B 样条曲面来对给定的型值进行插值或逼近。

已知型值点阵 p_{ij}，$i=1,2,\cdots,m$，$j=1,2,\cdots,n$ 以及乘积型 B 样条基 $\{M_i(u)N_j(v)=N_{i,k}(u)N_{j,l}(v)\}$，其节点向量为 $s_i(i=1,2,\cdots,m'+k)$，$t_j\,(j=1,2,\cdots,n'+l)$，对应于每个型值点,我们赋予相应的参数 $\{u_i,v_j\}$，$i=1,2,\cdots,m$；$j=1,2,\cdots,n$。其中 $u_1=s_k$，$u_m=s_{m'+1}$，$v_1=t_l$，$v_n=t_{n'+l+1}$。于是可得逼近曲面

$$s(u,v)=\sum_{i=1}^{m'}\sum_{j=1}^{n'}c_{ij}M_i(u)N_j(v). \tag{7.130}$$

当 $m'\times n'<m\times n$ 时,控制点 c_{ij} 可由函数

$$e(c,u,v)=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}(p_{ij}-s(u_i,v_j))^2 \tag{7.131}$$

关于 c_{ij} 取极小,也就是求解方程组

$$\frac{\partial e(c,u,v)}{\partial c_{ij}}=0,\ i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n \tag{7.132}$$

而唯一地求出。函数(7.131)的极小值就是曲面 (7.130) 对型值点 $\{p_{ij}\}$ 的平方逼近误差。

参数 (u_i, v_j) 的选取将直接影响曲面(7.130)的逼近误差。在原参数值 (u_i, v_j) 的基础上，可再选取新的参数值 (u_i^*, v_j^*)，使相应的 $e(\boldsymbol{c}^*, \boldsymbol{u}^*, \boldsymbol{v}^*)$ 小于 $e(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$。如此迭代下去，直至收敛的过程称为曲面拟合的参数优化过程。关于参数优化过程，大致有下面几种。

a)[167] 新参数 (u_i^*, v_j^*) 由求解方程组

$$\begin{cases}[\boldsymbol{p}_{ij} - \boldsymbol{s}(u_i^*, v_j^*)] \cdot \boldsymbol{s}_u(u_i^*, v_j^*) = 0, \\ [\boldsymbol{p}_{ij} - \boldsymbol{s}(u_i^*, v_j^*)] \cdot \boldsymbol{s}_v(u_i^*, v_j^*) = 0.\end{cases}$$

来求得。

b)[168] 令 $\Delta u_i = u_i^* - u_i$，$\Delta v_j = v_j^* - v_j$，则

$$\Delta u_i = [\boldsymbol{s}(u_i, v_j) - \boldsymbol{p}_{ij}] \cdot \frac{\boldsymbol{s}_u(u_i, v_j)}{|\boldsymbol{s}_u(u_i, v_j)|} \cdot \frac{b-a}{\mu},$$

$$\Delta v_j = [\boldsymbol{s}(u_i, v_j) - \boldsymbol{p}_{ij}] \cdot \frac{\boldsymbol{s}_v(u_i, v_j)}{|\boldsymbol{s}_v(u_i, v_j)|} \cdot \frac{d-c}{\gamma},$$

其中 $u \in [a, b]$，$v \in [c, d]$，μ 是当 v_j 为常数时，相应曲线的近似弧长，γ 是当 u_i 为常数时相应曲线的近似弧长。

c)[169]

$$\Delta u_i = \frac{(\boldsymbol{p}_{ij} - \boldsymbol{s}(u_i, v_j)) \cdot \boldsymbol{s}_u(u_i, v_j)}{(\boldsymbol{p}_{ij} - \boldsymbol{s}(u_i, v_j))\boldsymbol{s}_{uu}(u_i, v_j) - [\boldsymbol{s}_u(u_i, v_j)]^2},$$

$$\Delta v_j = \frac{(\boldsymbol{p}_{ij} - \boldsymbol{s}(u_i, v_j)) \cdot \boldsymbol{s}_v(u_i, v_j)}{(\boldsymbol{p}_{ij} - \boldsymbol{s}(u_i, v_j)) \cdot \boldsymbol{s}_{vv}(u_i, v_j) - [\boldsymbol{s}_v(u_i, v_j)]^2}.$$

d)[170]

$$\Delta u_i = \frac{[\boldsymbol{p}_{ij} - \boldsymbol{s}(u_i, v_j)] \cdot \boldsymbol{s}_u(u_i, v_j)}{[\boldsymbol{s}_{uu}(u_i, v_j)]^2},$$

$$\Delta v_j = \frac{[\boldsymbol{p}_{ij} - \boldsymbol{s}(u_i, v_j)] \cdot \boldsymbol{s}_v(u_i, v_j)}{[\boldsymbol{s}_{vv}(u_i, v_j)]^2}.$$

当 $m' = m$，$n' = n$，并且 $u_i\ (i = 1, 2, \cdots, m)$，$v_j\ (j = 1, 2, \cdots, n)$ 分别满足条件 $u_1 = s_k$，$u_m = s_{m+1}$，$s_i \leqslant u_i < s_{i+k}$，$i = 2, \cdots, m-1$ 及 $v_1 = t_l$，$v_n = t_{n+1}$，$t_j \leqslant v_j < t_{j+k}$，$j = 2, \cdots, n-1$ 时，我们可以得到插值曲面

$$s(u,v)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}M_i(u)N_j(v),$$

其控制点 $c_{ij}(i=1,2,\cdots,m,\ j=1,2,\cdots,n)$ 由方程组

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}M_i(u_s)N_j(v_t)=p_{st} \tag{7.133}$$

$$s=1,2,\cdots,m;\ t=1,2,\cdots,n$$

所唯一确定。

当 $m'=m+k-2,\ n'=n+l-2$ 时，可取 $u_i=s_{i+k-1}$，$v_j=t_{j+l-1}$，$i=1,2,\cdots,m$，$j=1,2,\cdots,n$. 要想唯一确定(7.130)的全部系数，所剩的 $(k-2)n+(l-2)m+(k-2)(l-2)$ 个条件需用其它方法来给定。这种情况是经常遇到的。例如，当 $k=l=4$ 时，也就是用双 3 次 B 样条对给定点 p_{ij} 进行插值时。这另外的 $2m+2n+4$ 个条件要在曲面的边界上，它们分别为 p_{1j},p_{mj} 处 u 方向的切矢，$j=1,2,\cdots,n$；p_{i1},p_{in} 处 v 方向的切矢，$i=1,2,\cdots,m$，以及 $p_{11},p_{1n},p_{m1},p_{mn}$ 处的 2 阶扭矢等。这里的反求控制点的方法是比较实用的。

§3. 散乱数据的曲面拟合

对区域D上给定的散乱分布的型值点(x_i,y_i)及其相应的函数值 f_i，$i=1,2,\cdots,N$，求定义于区域D上的某函数空间H中的函数 $f(x,y)$，使得

$$f(x_i,y_i)=f_i,\ i=1,2,\cdots,N. \tag{7.134}$$

或者按最小二乘意义，使得

$$\sum_{i=1}^{N}\alpha_i(f(x_i,y_i)-f_i)^2=\min_{h\in H}\sum_{i=1}^{N}\alpha_i(h(x_i,y_i)-f_i)^2, \tag{7.135}$$

其中 $\alpha_i\geqslant 0$，$i=1,2,\cdots,N$. 以上两问题分别称为曲面插值和最小二乘曲面逼近。若还已知给定点处的偏微商 $D^\lambda f_i$ 或方向导数 $D_n^k f_i$，$\lambda=(\lambda_1,\lambda_2)$，$\lambda_i\geqslant 0$，$i=1,2$，$k\geqslant 0$，$n=(n_1,n_2)$ 时，则在(7.134)上还要附加相应的条件

$$D^k f(x_i,y_i) = D^k f_i, \qquad (7.134)'$$

或

$$D_n^k f(x_i,y_i) = D_n^k f_i. \qquad (7.134)''$$

(7.135)也要相应修改为

$$\sum_{i=1}^{N}\Big[\alpha_i(f(x_i,y_i)-f_i)^2+\sum_k \beta_i^k(D^k f(x_i,y_i)-D^k f_i)^2$$

$$+\sum_{k,n} r_i^{(k,n)}(D_n^k f(x_i,y_i)-D_n^k f_i)^2\Big] = \min, \quad (7.135)'$$

其中 $D^k = \dfrac{\partial^{\lambda_1+\lambda_2}}{\partial x^{\lambda_1}\partial y^{\lambda_2}}$, $D_n^k = \left(n_1\dfrac{\partial}{\partial x}+n_2\dfrac{\partial}{\partial y}\right)^k$. 用来逼近的函数空间$H$常被取为多项式空间或二元样条函数空间。鉴于函数空间H的选取是曲面拟合的先决条件。在利用多项式或有理样条进行曲面拟合时,应尽可能选择次数较低的样条空间。例如,采用四边形剖分下的双 3 次曲面,三角剖分下的 Powell-Sabin 格式,HCT 格式,有理 C^1 混合格式(5.32)以及 3 次 C^2 格式(见定理 7.21)等等。以上所提到的几种格式,都需要网点处的微商信息。然而大多数实际问题事先并未给出这些信息。因此需要通过可行的数值方法来近似确定这些尚缺少的信息,以便最终求出所需的曲面。

曲面的光顺性以及保形性也是曲面拟合中的重要课题。在苏步青与刘鼎元著《计算几何》一书中对此有精彩的阐述。此处不在复述。

3.1 三角剖分

定义 7.40 设D是$\mathbf{R}^2$内的一个多边形区域,D上的点集 $V=\{v_i(x_i,y_i),\ i=1,\cdots,N\}$ 包含 ∂D 的所有顶点。若Δ是一个以V中所有顶点为顶点的 2 维复形,且 $|\Delta| = D$,则称Δ为D的一个三角剖分。相应的零维单形集合也就是网点集合

$$V = \{v_i(x_i,y_i),\ i=1,2,\cdots,N\};$$

1 维单形的集合

$$E = \{e_{ij}(v_i,v_j) \mid (v_i,v_j)\in\Delta\}$$

为网线集合；2 维单形的集合

$$T=\{\delta_{ijk}(v_i,v_j,v_k)|\ (v_i,v_j,v_k)\in\Delta\}$$

为三角形集合。如果 $e_{ij}\in E$ 是T中两个三角形的公共边，则称 e_{ij} 为Δ的内网线，否则称为Δ的边界网线。

对应于平面域D上的一组散乱点，可形成的三角剖分不是唯一的。用以判定三角剖分优劣的标准也不尽相同，以下介绍几种常用的形成三角剖分的方法。

1. 凸区域 Delaunay 剖分

Delaunay 三角剖分是 Voronoi 图的对偶[172]。三角剖分Δ为 Delaunay 部分的充要条件是：对任意三角形 $\delta_{ijk}\in\Delta$，均不存在网点 $v\in V$，使得v落在δ_{ijk}的外接圆内。至今已有多种 Delaunay 剖分算法(参见 [172],[173],[174] 等)。这里仅介绍一种形成最小凸包D的 Delaunay 剖分方法，它是按递归方式实现的。

设 Δ_{n-1} 为顶点集 $V_{n-1}=\{v_i;\ i=1,2,\cdots,n-1\}$ 对应的 Delaunay 三角剖分，相应的网线集合为 E_{n-1}，三角形集合为 T_{n-1}，D_{n-1} 为由 $v_1,\cdots,v_{n-1}$ 形成的最小凸包。往下来构造点集 $V_n=\{v_n\}\cup V_{n-1}$ 的 Delaunay 三角剖分 Δ_n。如所知，任何三角剖分均可由其网线集合所唯一确定。因此仅须考虑网线在递归算法中的生成情况：

1° 当 $v_n\in D_{n-1}$时，可以得到v_n在D_{n-1}中的关联区域 $\Pi_{n-1}=\bigcup_{i=1}^{k}\delta_{a_i}$，其中 $\delta_{a_i}\in T_{n-1}$，并且v_n落在δ_{a_i}的外接圆的内部，$i=1,2,\cdots,k$。Π_{n-1} 的剖分$\Delta^*_{n-1}\subset\Delta_{n-1}$，相应的顶点 $V^*_{n-1}=\{v_{l_1},\cdots,v_{l_r}\}$，$D_{n-1}-\Pi_{n-1}$ 的闭包 $\overline{D_{n-1}-\Pi_{n-1}}$ 的三角剖分为 $\tilde{\Delta}^*_{n-1}\subset\Delta_{n-1}$。用网线 $(v_n,v_{l_1}),\cdots,(v_n,v_{l_r})$ 替代 Δ^*_{n-1} 的内网线。如果 v_n 落在 Δ_{n-1} 的某边界网线 e_* 上，则去掉 e_*，如此便形成了关于顶点 $V^*_n=\{v_{l_1},\cdots,v_{l_r},v_n\}$ 的 Delaunay 剖分 Δ^*_n。这样，$\Delta_n=\Delta^*_n\cup\tilde{\Delta}^*_{n-1}$ 便为 $D_n=D_{n-1}$ 的关于顶点 $V_n=V_{n-1}\cup\{v_n\}$ 的 Delaunay 三角剖分。如图 7.25。

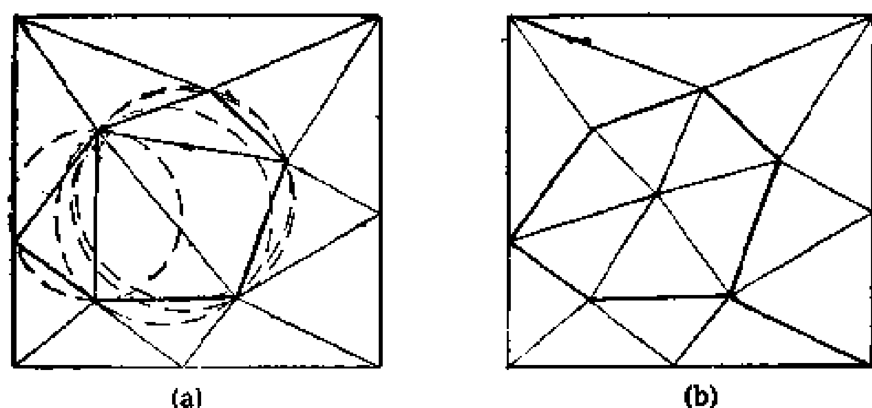


图 7.25

2° 当 $v_n \notin D_{n-1}$ 时，可以得到 $v_1,\cdots,v_{n-1}$，v_n 的最小凸包 D_{n-1}。此时，v_n 在 D_n 中的关联区域为 $\Pi_n = \Pi_{n-1} \cup (\overline{D_n - D_{n-1}})$，其中 Π_{n-1} 的定义同前,有时 Π_{n-1} 是空集. D_n 关于顶点集 $V_n = \{v_1,\cdots,v_{n-1},v_n\}$ 的 Delaunay 三角剖分的网线集合为

$$E_n = (E_{n-1} - \{e_\alpha \in E_{n-1} \mid \mathring{e}_\alpha \subset \mathring{\Pi}_n\}$$

$$\cup \{(v_n, v_l) \mid v_l \in \Pi_n,\ 1 \leqslant l \leqslant n-1\}.$$

如图 7.26。

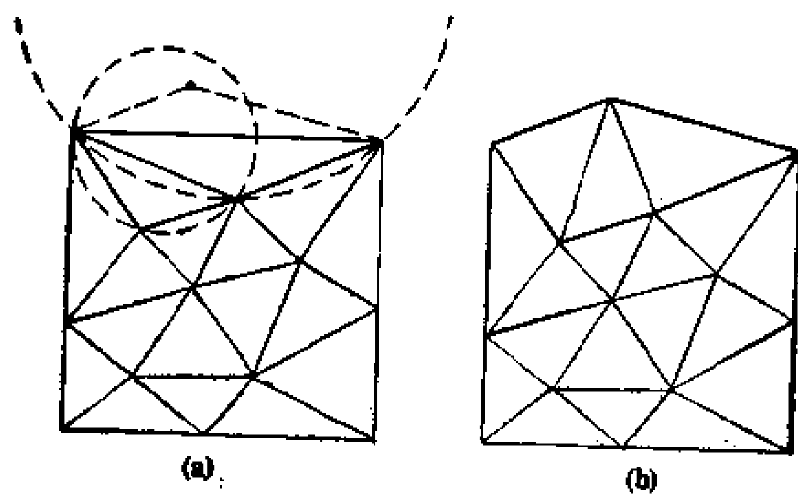


图 7.26

2. 任意单连通多边形区域的三角剖分[173]

设 D 为一单连通区域,其上的散乱点为 $v_i = (x_i, y_i)$，$i = 1$，

$2\cdots,N$，其中 v_i，$i=1,2,\cdots,M$，$M\leqslant N$ 为按逆时针方向顺序排列的全部边界网点．区域 D 的边界 ∂D 由线段 $\overline{v_1v_2}$，$\overline{v_2v_3},\cdots,\overline{v_{M-1}v_M}$，$\overline{v_Mv_1}$ 构成．于是存在 $1\leqslant k\leqslant M$，以及 $v_*\in\{v_k^-,v_{k+1}^+\}\cup\{v_i,\ M<i\leqslant N\}$ 使得

1°v_*,v_k,v_{k+1} 不共线，且三角形 $(v_*,v_k,v_{k+1})\subset D$；

2°不存在除 v_*，v_k，v_{k+1} 以外的点 v_i，$1\leqslant i\leqslant N$，使 $v_i\in(v_*,v_k,v_{k+1})$．

三角形 (v_*,v_k,v_{k+1}) 即为最终所形成三角剖分中的一个三角形，其三边为三角剖分的网线．以上为剖分算法的第一步．往下用同样的方法对区域 $D'=\overline{D-(v_*,v_k,v_{k+1})}$ 进行三角剖分，其顶点集合为 $\{v_i|\ v_i\in D',\ 1\leqslant i\leqslant N\}$．如此继续下去，直到仅剩下三个顶点时为止．连接以此三点为顶点的三角形即最后完成了剖分过程．如此得到的剖分一般不是最优的．如图 7.27．

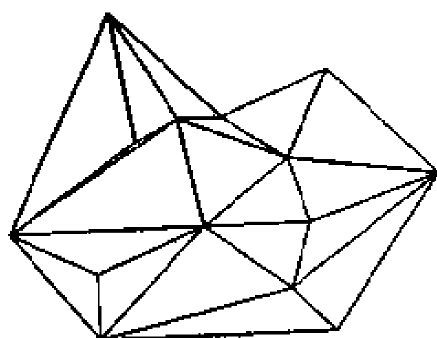


图 7.27

3. 三角剖分的优化

首先讨论凸四边形的三角剖分．设 v_1,v_2,v_3,v_4 为四边形的四个顶点，其中任何 3 点不在同一直线上，那么该四边形存在两种三角剖分 Δ 和 Δ'，其相应的三角形集合分别为 $T=\{(v_1,v_2,v_3),\ (v_1,v_3,v_4)\}$ 和 $T'=\{(v_1,v_2,v_4),(v_2,v_3,v_4)\}$．在这两种剖分中，应如何选出最恰当的剖分呢？为此引入衡量以上凸四边形的三角剖分优劣的正则性参量 $s(\Delta)$．使 $s(\Delta)$ 尽可能大的剖分 Δ，即为在某种意义下的最优剖分．常用来定义 $s(\Delta)$ 的方式有

i) $s(\Delta)=\min\limits_{\delta\in T}\delta$ 的最小角；

ii) $s(\Delta)=\min\limits_{\delta\in T}\dfrac{A_\delta}{L_\delta^2}$；

iii) $s(\Delta)=\min\limits_{\delta\in T}\dfrac{r_\delta}{R_\delta}$，

其中 $A_\delta, L_\delta, r_\delta$ 与 R_δ 分别为三角形 δ 的面积，周长，内接圆半径与外接圆半径。

对于任意三角剖分 Δ，剖分的优化过程是：对所有内网线，若以其为公共边的两个三角形所构成的四边形区域为凸区域时，则利用准则 i, ii 或iii来选取由此凸四边形所产生的两种三角剖分中的最优者。如果所有这样的凸四边形的剖分均是如此优化了，则称剖分 Δ 为局部最优的(或称最优的)。如图 7.28。

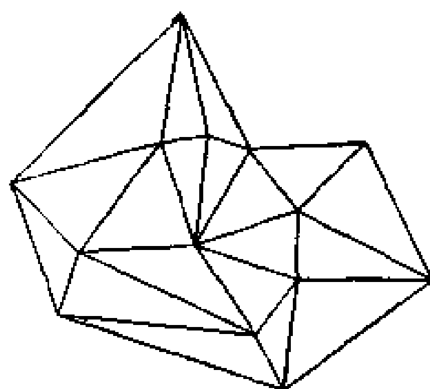


图 7.28

从 Delaunay 剖分的充要条件可知，对于一个凸四边形来讲，相应于准则 i 的最优三角剖分与相应的 Delaunay 剖分是等同的。所以剖分 Δ 按准则 i 是局部最优的，当且仅当 Δ 是 Delaunay剖分。

3.2 几种常用的估算偏微商及方向导数的方法

以下恒假定在以插值结点 (x_i, y_i), $i=1,2,\cdots,N$ 为顶点的三角剖分 Δ 上讨论问题。

1° 凸组合方法

用与某一网点相邻的三角形或剖分 Δ 中所有三角形上的线性插值平面法矢(或偏微商)作凸组合的方法来近似计算该点处的法矢(或偏微商)。例如，可取

$$\begin{cases} f_x(v_i) = \dfrac{\sum\limits_{(i,j,k)\in T_i} w_{(i,j,k)} f_x(i,j,k)}{\sum\limits_{(i,j,k)\in T_i} w_{(i,j,k)}}, \\ f_y(v_i) = \dfrac{\sum\limits_{(i,j,k)\in T_i} w_{(i,j,k)} f_y(i,j,k)}{\sum\limits_{(i,j,k)\in T_x} w_{(i,j,k)}}, \end{cases} \tag{7.136}$$

其中 $f_x(i,j,k)$, $f_y(i,j,k)$ 分别为空间三角形 (v_i, f_i), (v_j, f_j),

(v_k, f_k) 所确定的线性函数的偏导数，而 T_i 和 $w_{(i,j,k)}$ 可有不同的取法：

(a) Akima 方法[176]

$$T_i = \{(i,j,k) \mid j \neq k,\ v_j, v_k \text{ 是 } v_i \text{ 的相邻点}\},$$

$$w_{(i,j,k)} = \cos(r_{(i,j,k)}) \cdot A_{(i,j,k)}, \tag{7.137}$$

其中 $A_{(i,j,k)}$ 为空间三角形 $\{(v_i, f_i), (v_j, f_j), (v_k, f_k)\}$ 的面积，而 $r_{(i,j,k)}$ 为上述三角形所在平面法矢与 z 轴的夹角.

(b) Little 方法[182]

$$T_i = \{(i,j,k) \mid j \neq k,\ v_i, v_j, v_k \text{ 不共线}\},$$

$$w_{(i,j,k)} = \frac{1}{|v_j - v_i|^2 |v_k - v_i|^2}. \tag{7.138}$$

2° 节点函数法

对应每一节点 (x_i, y_i)，构造一个节点函数

$$\begin{aligned} Q_i(x,y) = f_i &+ f_x(v_i)(x - x_i) + f_y(v_i)(y - y_i) \\ &+ \frac{1}{2} f_{xx}(v_i)(x - x_i)^2 + \frac{1}{2} f_{yy}(v_i)(y - y_i)^2 \\ &+ f_{xy}(v_i)(x - x_i)(y - y_i). \end{aligned} \tag{7.139}$$

显然有 $Q_i(x_i, y_i) = f_i$. 通过最小二乘法,对点 (x_i, y_i) 附近的点或整个区域 D 上的散乱点进行拟合，从而求得 (x_i, y_i) 处的近似 1 阶，2 阶偏导 $f_x(v_i)$，$f_y(v_i)$，$f_{xx}(v_i)$，$f_{xy}(v_i)$，$f_{yy}(v_i)$，$i = 1, 2, \cdots, N$. 一般地,最小二乘法的目标函数应取为

$$e_i(f) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} \alpha_{ij} [Q_i(x_j, y_j) - f_j]^2, \tag{7.140}$$

其中 $\alpha_{ij} = \dfrac{1}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}}$.

3° 最小能量法

对任意三角剖分，G. M. Nielson[179] 证明了存在唯一的定义在剖分网线上的 C^1 分片 3 次函数 f,使得

$$\sum_{e_{ij}\in E}\int_{e_{ij}}\left[\frac{df}{ds}\right]^2 ds \tag{7.141}$$

取极小,并且假设 $f(x_i,y_i)=f_i$, $i=1,2,\cdots,N$. 利用这种方法可以估计网点处的偏导值. 例如,我们假定网点 (x_i,y_i) 处的函数值为 f_i, 1 阶导数为 f_{x_i}, f_{y_i}, 由此便求得定义在剖分的每条边 e_{ij} 上的 3 次曲线,以构成 C^1 的曲线网. 通过解以上极小化问题,可得到下面的方程组

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{e_{ij}\in E_i}\frac{(x_j-x_i)}{|v_j-v_i|^3}\Big[(x_j-x_i)f_x(v_i)+(y_j-y_i)f_y(v_i)\\ \qquad\displaystyle+\frac{1}{2}(x_j-x_i)f_x(v_j)+\frac{1}{2}(y_j-y_i)f_y(v_j)\\ \qquad\displaystyle+\frac{3}{2}(f_i-f_j)\Big]=0,\\ \displaystyle\sum_{e_{ij}\in E_i}\frac{(y_j-y_i)}{|v_j-v_i|^3}\Big[(x_j-x_i)f_x(v_i)+(y_j-y_i)f_y(v_i)\\ \qquad\displaystyle+\frac{1}{2}(x_j-x_i)f_x(v_j)+\frac{1}{2}(y_j-y_i)f_y(v_j)\\ \qquad\displaystyle+\frac{3}{2}(f_i-f_j)\Big]=0,\\ i=1,2,\cdots,N.\end{cases} \tag{7.142}$$

其中 $E_i=\{e_{ij}(v_i,v_j);\ e_{ij}\in E\}$, $i=1,2,\cdots,N$. f_{x_i}, f_{y_i} 的近似值便可由这 $2N$ 个线性方程组求得. 类似地还可用这方法估计高阶偏导数. 其它方法参见[175]等.

4° 方程求解法[129]

在曲面拟合的实践中,我们也给出了一种全局性估计微商信息的方法,这种方法效果比较好. 形式上,它类似于 3 次累加弦长样条曲线的连续方程.

对于空间三角剖分 Δ, 设 M_i 表示与顶点 v_i 相邻点的集合; T_i 表示以 v_i 为顶点的空间三角形的集合, k_i 为 M_i 的点数; n_i 代表 v_i 处曲面的法矢, N_i 为三角形 $t_i\in T_i$ 的法矢, 则我们有下面的方程组

$$k_i n_i + \sum_{v_j \in M_i} \alpha_{ij} n_j = (k_i + 1) \sum_{t_j \in T_i} \beta_{ij} N_j,$$

$$i = 1, 2, \cdots, N,$$

其中

$$\alpha_{ij} = \frac{|v_i - v_j|}{\sum_{v_k \in M_i} |v_i - v_k|}, \quad \beta_{ij} = \frac{A(t_j)}{\sum_{t_k \in T_i} A(t_k)},$$

而 $A(t_j)$ 表示三角形 t_j 的面积。由于这个方程组是严格对角占优的，我们可由此唯一求得 n_i，$i = 1, 2, \cdots, N$. 图 7.29 是利用这种方法构造的插值曲面。

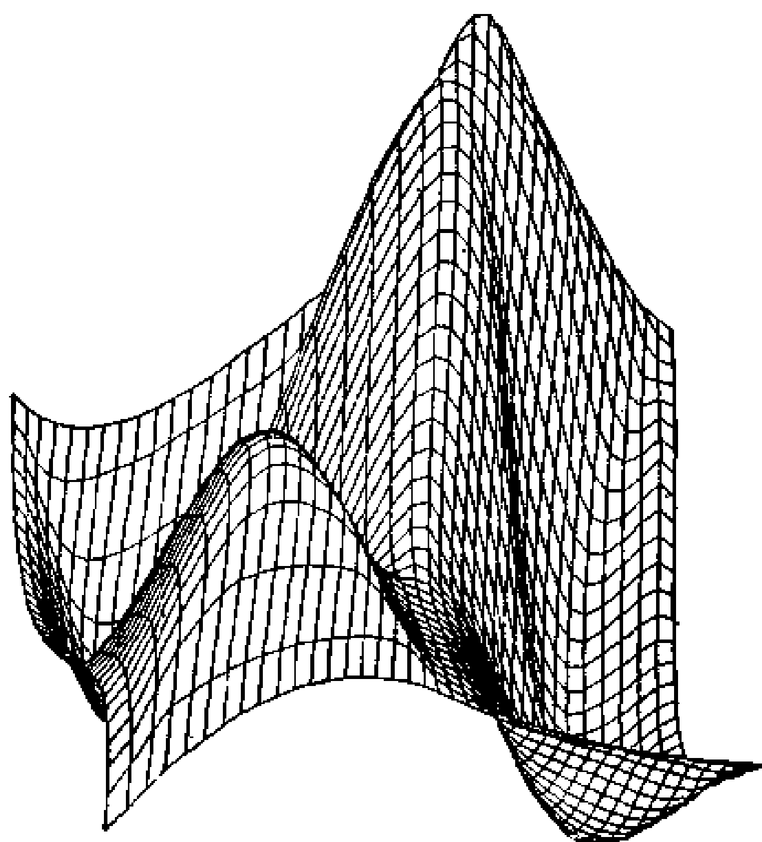


图 7.29

3.3 最小二乘逼近

对于大量的散乱数据，通过插值方法来进行曲面拟合的工作量是很大的。此时常用的也是较为有效的方法是最小二乘法。适

当地选取剖分，再利用最小二乘法可以满足给定的误差要求。下面介绍几种常用的样条曲面拟合方法。

1. 用双 3 次 B 样条曲面片拟合散乱数据

将区域 $D=[a,b]\otimes[c,d]$ 剖分成规则的矩形网格，即根据散乱点 (x_k, y_k) 的分布，用直线 $x=u_i$，$y=v_j$ 将区域 D 划分成若干个小矩形 $D_{ij}=[u_{i-1},u_i]\times[v_{j-1},v_j]$，$i=1,2,\cdots,m$；$j=1,2,\cdots,n$。如图 7.30。如果分别取 u_i, v_j 为 x，y 方向的 B 样条函数的参数节点，相应的双 3 阶 B 样条函数为

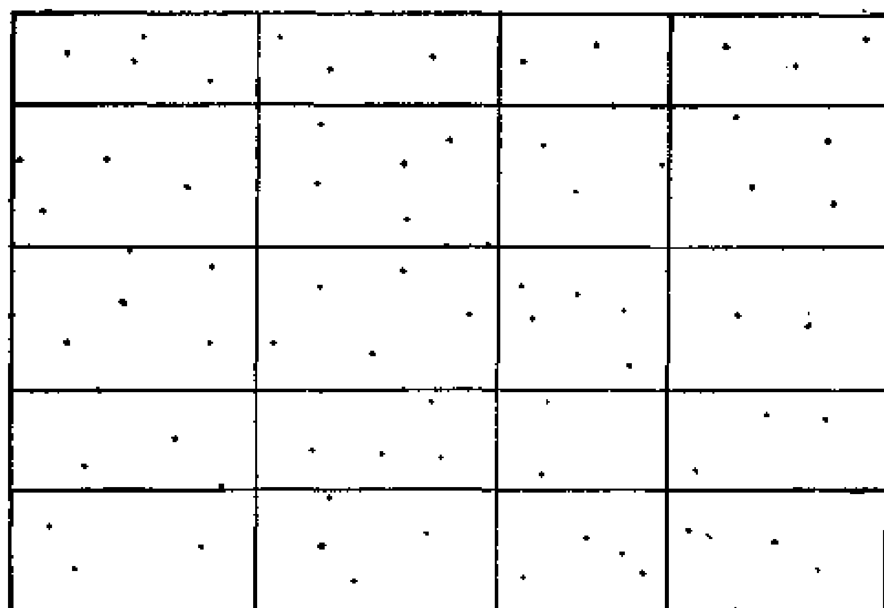


图 7.30

$$F(x,y)=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}c_{ij}N_{i,3}(x)N_{j,3}(y), \tag{7.143}$$

其中控制顶点 c_{ij} 可用最小二乘法，即可从矛盾方程组

$$\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}c_{ij}N_{i,3}(x_k)N_{j,3}(y_k)=f_k, \tag{7.144}$$

$$k=1,2,\cdots,N$$

的带权最小二乘解而求得。

一般地，为了方便起见常取参数节点为等距的，即

$$\begin{cases} u_i = a + ih_x, & i = 0,1,\cdots,m, \\ v_j = b + jh_y, & j = 0,1,\cdots,n, \\ h_x = \dfrac{b-a}{m}, & h_y = \dfrac{d-c}{n}. \end{cases} \tag{7.145}$$

但为了使曲面逼近的效果更好，应根据散乱点分布的疏密程度来决定参数节点的疏密，即采用非均匀 B 样条曲面来逼近散乱数据。

2. 特定剖分下的样条曲面拟合

这里我们仅以 Powell-Sabin 格式为例来讨论最小二乘曲面拟合问题。设区域 D 的三角剖分为 Δ，与其对应的 Powell-Sabin 细分为 Δ^*。对 D 上的散乱点 (x_i, y_i) 及其对应的函数值 f_i，$i = 1,2,\cdots,N$。我们的目的是寻求一函数 $f(x,y)\in S_2^1(\Delta^*)$，使得

$$e = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i (f(x_i,y_i) - f_i)^2, \tag{7.146}$$

取极小。我们知道，$\dim S_2^1(\Delta^*) = 3m$，其中 m 为剖分 Δ 的顶点个数。[148] 中给出了相应插值条件 $f(v_i)$，$f_x(v_i)$，$f_y(v_i)$ 的 B 样条基 $\phi_i^0(x,y)$，$\phi_i^1(x,y)$，$\phi_i^2(x,y)$，$i = 1, 2,\cdots, m$。因为任一函数 $f(x,y)\in S_2^1(\Delta^*)$，均可唯一地表示成

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{2} c_{ij}\phi_i^j(x,y) \\ &= \sum_{i=1}^{m} (f(v_i)\phi_i^0(x,y) + f_x(v_i)\phi_i^1(x,y) \\ &\qquad + f_y(v_i)\phi_i^2(x,y)], \end{aligned} \tag{7.147}$$

$$(x,y)\in D.$$

因此为求使得(7.146)取极小的 $f(x,y)\in S_2^1(\Delta^*)$ 的系数 c_{ij}，$i = 1,2,\cdots,m$，$j = 0,1,2$，可转化为求下面的方程组

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{2} c_{ij}\phi_i^j(x_l,y_l) = f_l, \quad l = 1,2,\cdots,N. \tag{7.148}$$

的带权最小二乘解。这里假定以上方程为矛盾方程，否则在 $S_2^1(\Delta^*)$ 中存在插值函数。

由(7.148)解得的逼近函数 $f(x,y)$ 对 (v_i,f_i)，$i=1,2,\cdots,N$ 的逼近误差，可以由(7.146)式求得。在剖分Δ的每个三角形 $\delta\in T$ 上的逼近误差为

$$e_\delta=\sum_{v_i\in\delta}\alpha_i(f(v_i)-f_i)^2,\ \delta\in T. \tag{7.149}$$

若在某个三角形 $\delta\in T$ 上，$f(x,y)$ 的逼近误差不满足要求时，可以将 δ 进行适当的细分，以形成新的剖分 Δ_1。再对 Δ_1 进行 Powell-Sabin 细分而形成剖分 Δ_1^*，并用对Δ同样的方法求出 $f_1(x,y)\in S_2^1(\Delta_1^*)$。如此进行下去，直到求出满足给定误差要求的拟合曲面为止。在[149]中较详细地讨论了用 Powell-Sabin 格式进行曲面拟合的算法。

借助于其它样条空间进行曲面拟合的方法是类似的，此处不详细讨论。

3. 任意剖分的曲面拟合

对于区域 D 上的任意剖分Δ(可以不是三角剖分)，已知 D 上的散乱点 (x_i,y_i) 及相应的函数值 f_i，$i=1,2,\cdots,N$。根据需要，适当地选取 k,μ，使得 $S_k^\mu(\Delta)$ 是非蜕化的。

由第一章相应结果可知，任意 $f(x,y)\in S_k^\mu(\Delta)$，均可表现为

$$f(x,y)=P(x,y)+\sum_{i=1}^{M}Q_i(x,y)[l_i(x,y)]_*^{\mu+1}, \tag{7.150}$$

$$(x,y)\in D.$$

其中 $Q_i(x,y)$ 为Δ的内网线 $l_i(x,y)=0$ 上的光滑余因子，而 $P(x,y)\in\mathbf{P}_k$ 为 $f(x,y)$ 在源胞腔上的表达式。由第一章的理论可知，所有内网线上的光滑余因子必须满足整体协调方程。即所有光滑余因子的系数 c_j，$j=1,2,\cdots,m$ 应满足整体协调条件所对应的方程组

$$\boldsymbol{AC}=0, \tag{7.151}$$

其中 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times m}$，$\boldsymbol{C}=(c_1,\cdots,c_m)^T$。由 $S_k^\mu(\Delta)$ 非蜕化的假设知方程(7.151)有非零解。如果 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})=r<m$，$r<n$，则通过对 $\boldsymbol{C}$ 的元素的适当排序，可以将方程(7.151)等价地化为

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} C = 0, \tag{7.152}$$

其中 A_1 为对角线上元素为非零的 r 阶上三角阵．由此可得

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_r \end{pmatrix} = -A_1^{-1} A_2 \begin{pmatrix} c_{r+1} \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}. \tag{7.153}$$

假设 $p(x, y)$ 的系数依次为 $c_{m+1}, \cdots, c_{m+\frac{1}{2}(k+1)(k+2)}$，则 $f(x,y)$ 中的独立参数仅为 $c_{r+1}, \cdots, c_m$、$c_{m+1}, \cdots, c_{m+\frac{1}{2}(k+1)(k+2)}$. 利用加权最小二乘法，即可求出一切 c_i 来．

以上方法可以推广任意样条曲面的最小二乘逼近上去．

在从(7.151)到(7.152)的转换过程中，如果采用数值方法（如消去法）进行计算时，由于舍入误差的影响，(7.152) 一般是不能精确地达到的，但我们可以将充分小的数当作零来对待．如果我们把剖分Δ的每个内网线方程 $l_i(x,y) = 0$ 中的系数用符号来替代，那么方程组(7.151)将是一个整体符号系数的方程组，通过吴方法[183]或符号计算的其它方法，便可精确地将(7.151)化为(7.152)的形式．

§4. 高维 HCT 和 PS 格式

二维 HCT (Hsieh-Clough-Tocher) 和 PS (Powell-Sabin) 格式前面已作介绍．在实际问题中还会遇到高维有限元空间的构造问题．本节将介绍高维空间中的 HCT ([81]、[88]) 和 PS ([81],[89]) 格式．Worsey-Farin 也用不同的方法得到了其中的一些结果，但他们没有给出显式表达式．

设Δ是 R^n 中的一个单纯形剖分．按如下方式构造的加细剖分称作Δ的 HCT 加细剖分，并记为 $\bar{\Delta}$:

1) 设 $\sigma \in \Delta$ 是一个 i 单纯形，$i \geq 2$，则在 σ 内取一加细网点 v_σ;

2）若 v_σ 是 i 单纯形 σ 的加细网点，$i \geqslant 2$，则连接 v_σ 与 σ 的顶点及 σ 面上的加细网点；

3）若 δ 是两个 n 单纯形 σ_1 和 σ_2 的 $n-1$ 维公共面，则要求 v_{σ_1}、v_{σ_2} 和 v_δ 三点共线。

对任意的单纯形剖分 Δ，满足条件 1)—3) 的加细剖分是存在的。例如，我们可取 n-单纯形的加细网点为其内切球球心。如果有两个 n-单纯形 σ_1 和 σ_2 以 $(n-1)$-单纯形 δ 为公共面，不难证明连接 σ_1 和 σ_2 内切球球心的直线交 δ 所在的 $n-1$ 维超平面于 δ 的内部。从而可取为 δ 的加细网点。其余的加细网点可任意选取，只要是相应单纯形的内点即可。

为书写方便，除用 D^λ 表示 $|\lambda|$ 阶混合偏导数外，我们还需引用记号 D_τ^λ：设 e 是一个网线，$n_{e,i}$，$1 \leqslant i \leqslant n-1$ 是与 e 垂直且互相垂直的 $n-1$ 个单位向量，我们定义 $D_\tau^\lambda = \prod_{i=1}^{n-1} D_{n_{e,i}}^{\lambda_i}$。

定理 7.41 下面的值唯一确定了一个 $f \in S_2^1(\Delta)$：

1）$D^\lambda f(v)$，$|\lambda| \leqslant 1$，$v \in V(\Delta)$；

2）$D_\tau^\lambda f(w_m)$，$|\lambda| = 1$，$e \in V(\Delta, 1)$。

进一步，我们有

$$\dim S_2^1(\bar{\Delta}) = (n+1)N_0 + (n-1)N_1,$$

其中 w_m 是 e 的中点，N_0 和 N_1 分别是 Δ 中的网点数和网线数。

为证定理 7.41，先给出以下引理。

引理 7.42 设 $\bar{\sigma}$ 是 n-单纯形 σ 的 HCT 加细剖分，v_σ 是 σ 的加细网点，δ 是 σ 的 $n-1$ 维面，记 $\mathrm{St}(v_\sigma, \delta)$ 是 $\bar{\sigma}$ 限制在 $[\delta, v_\sigma]$ 上所得。则

$$\dim S_2^1(\mathrm{St}(v_\sigma, \delta)) = \frac{1}{2}(n+1)(n+2),$$

即空间 $S_2^1(\mathrm{St}(v_\sigma, \delta))$ 中只包含多项式。

证明 若 $f \in S_2^1(\mathrm{St}(v_\sigma, \delta))$ 使得

$$f\left(\frac{v+w}{2}\right) = 0, \quad v, w \in V(\rho), \tag{7.154}$$

其中 v 和 w 可取为同一点，而 $\rho=[v_\sigma,\delta]$。

设 e 是 ρ 的一边，由(7.154)得 $f|_e=0$。注意 $f\in c^1(\rho)$，由(7.154)可证

$$D^{\lambda}_{v,\rho}f(v)=0,\ |\lambda|\leqslant 1,\ v\in V(\rho).$$

又设 β 是 δ 的 i 维面，$i\geqslant 2$，v_β 是 β 的加细网点。由定理4.7，得

$$2f(v_\beta)+D_{v-v_\beta}f(v_\beta)-2f(v)+D_{v_\beta-v}f(v_\beta)=0.\quad(7.155)$$

再设 $(\tau_v,v\in V(\beta))$ 是 v_β 关于 β 的重心坐标，显然有

$$\sum_{v\in V(\beta)}\tau_v D_{v-v_\beta}f(v_\beta)=0.\qquad(7.156)$$

从(7.155)和(7.156)，得

$$f(v_\beta)=D_{v-v_\beta}f(v_\beta)=0,\ v\in V(\beta).$$

从而不难证明 $f\equiv 0$，即

$$\dim S_2^1(\mathrm{St}(v_\sigma,\delta))\leqslant\frac{1}{2}(n+1)(n+2).$$

另一方面显然有

$$\dim S_2^1(\mathrm{St}(v_\sigma,\delta))\geqslant\frac{1}{2}(n+1)(n+2).\qquad\square$$

引理 7.43 n-单纯形 $\sigma=[v_0,v_1,\cdots,v_n]$ 上的三次多项式 f 有如下的表达式

$$f(w)=\sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{n}\tau_j D_{v_j-v_i}f(v_i)+(3-2\tau_i)f(v_i)\right)\tau_i^2$$

$$+\sum_{0\leqslant i<j<k\leqslant n}d_{i,j,k}\tau_i\tau_j\tau_k,$$

且当 $i\neq j\neq k\neq i$ 时，有

$$D_{v_k-v_i}f\left(\frac{v_i+v_j}{2}\right)=\frac{1}{4}d_{i,j,k}+\frac{1}{4}(D_{v_k-v_i}f(v_i)+D_{v_k-v_j}f(v_j))$$

$$-\frac{1}{2}(D_{v_j-v_i}f(v_i)+3f(v_i)),$$

$$D_{v_j-v_i}f\left(\frac{v_i+v_j}{2}\right)=\frac{3}{2}f(v_j)+\frac{1}{4}D_{v_i-v_j}f(v_i)$$

$$-\left(\frac{3}{2}f(\boldsymbol{v}_i)+\frac{1}{4}D_{\boldsymbol{v}_j-\boldsymbol{v}_i}f(\boldsymbol{v}_i)\right),$$

其中 $(\tau_0,\tau_1,\cdots,\tau_n)$ 是 $\boldsymbol{w}$ 关于 σ 的重心坐标。$\tau_i\tau_j\tau_k$ $(i\neq j\neq k\neq i)$ 称为 $f(\boldsymbol{w})$ 的混和项。

不难直接验证引理 7.43。

引理 7.44 设 $\bar{\sigma}$ 是 n-单纯形 σ 的 HCT 加细剖分。若 $f\in S_3^0(\bar{\sigma})$ 在 σ 的顶点及边的中点存在一阶偏导数，则 $f\in S_3^1(\bar{\sigma})$ 的充要条件是

1）对任意的 i-维单纯形 $\delta\in\sigma$，$i\geqslant 2$，都有

$$\begin{cases}\sum\limits_{\boldsymbol{v}\in V(\delta)}\tau_{\boldsymbol{v}}D_{\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_\delta}f(\boldsymbol{v}_\delta)=0,\\ \sum\limits_{\boldsymbol{v}\in V(\delta)}\tau_{\boldsymbol{v}}D_{\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_\delta}f\left(\dfrac{\boldsymbol{w}+\boldsymbol{v}_\delta}{2}\right)=0,\ \boldsymbol{w}\in V(\delta),\end{cases}$$

其中 $\boldsymbol{v}_\delta$ 是 δ 的加细网点，$\boldsymbol{v}_\delta=\sum\limits_{\boldsymbol{v}\in V(\delta)}\boldsymbol{v}\tau_{\boldsymbol{v}}$；

2）若 δ 是 ρ 的一个面，$\mathrm{St}(\boldsymbol{v}_\rho,\delta)$ 是 $\bar{\sigma}$ 限制在单纯形 $[\boldsymbol{v}_\rho,\delta]$ 上所得，则 $f|_{[\boldsymbol{v}_\rho,\delta]}\in S_3^1(\mathrm{St}(\boldsymbol{v}_\rho,\delta))$。

在证明引理 7.44 前，我们先证明

引理 7.45 设 $\mathrm{St}(\boldsymbol{w})$ 是 R^n 中某 $n-1$ 维超平面上的 $\boldsymbol{w}$ 星，$\boldsymbol{v}$ 是该超平面外一点。连接 $\boldsymbol{v}$ 与 $\mathrm{St}(\boldsymbol{w})$ 中所有顶点得到 $\boldsymbol{v}$ 星 $\mathrm{St}(\boldsymbol{v})$。若 $f\in S_k^\mu(\mathrm{St}(\boldsymbol{v}))$，则 $D_{\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}}f\in S_{k-1}^\mu(\mathrm{St}(\boldsymbol{v}))$。

证明 设 $\sigma_1,\sigma_2\in\mathrm{St}(\boldsymbol{v})$ 有 $n-1$ 维公共面 δ，$\Pi_\delta=0$ 是 δ 所在超平面的方程，则有

$$p_2-p_1=p\Pi_\delta^{\mu+1},$$

其中 $p_i=f|_{\sigma_i}$，$i=1,2$，p 是一个 $k-\mu-1$ 次多项式。注意 $[\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}]$ 是 δ 的边，故有 $D_{\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}}\Pi_\delta=0$。由此得

$$D_{\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}}p_2-D_{\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}}p_1=D_{\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}}p\Pi_\delta^{\mu+1}.$$

这等价于 $D_{\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}}f\in S_{k-1}^\mu(\mathrm{St}(\boldsymbol{v}))$。 □

现在证明引理 7.44。必要性是显然的。为证充分性对 n 采用数学归纳法。当 $n=2$ 时，设 $\sigma=[\boldsymbol{v}_0,\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2]$，$e_i=[\boldsymbol{v}_\sigma,\boldsymbol{v}_i]$，$\sigma_i=$

$[v_\sigma, v_i, v_{i+1}]$, $p_i = f|_{\sigma_i}$, $0 \leqslant i \leqslant 2 (v_3 = v_0)$. 又设 $\mathbf{0} \neq n_i \perp e_i$, $n_i = \alpha_i(v_i - v_\sigma) + \beta_i(v_{i+1} - v_\sigma)$. 由引理假设,

$$
\begin{aligned}
D_{n_i} p_i(v_\sigma) &= \alpha_i D_{v_i - v_\sigma} p_i(v_\sigma) + \beta_i D_{v_{i+1} - v_\sigma} p_i(v_\sigma) \\
&= \alpha_i D_{v_i - v_\sigma} p_{i-1}(v_\sigma) - \frac{\beta_i}{\tau_{v_{i+1}}} (\tau_{v_{i-1}} D_{v_{i-1} - v_\sigma} p_{i-1}(v_\sigma) \\
&\quad + \tau_{v_i} D_{v_i - v_\sigma} p_{i-1}(v_\sigma)) \\
&= \alpha_i D_{v_i - v_\sigma} p_{i-1}(v_\sigma) + \beta_i D_{v_{i+1} - v_\sigma} p_{i-1}(v_\sigma) \\
&= D_{n_i} p_{i-1}(v_\sigma).
\end{aligned} \tag{7.157}
$$

同理有

$$
D_{n_i} p_i\left(\frac{v_i + v_\sigma}{2}\right) = D_{n_i} p_{i-1}\left(\frac{v_i + v_\sigma}{2}\right). \tag{7.158}
$$

又 f 在点 v_i 处存在一阶偏导数,从而

$$
D_{n_i} p_i(v_i) = D_{n_i} p_{i-1}(v_i). \tag{7.159}
$$

由(7.157)—(7.159),易知

$$
D_{n_i} p_i|_{e_i} = D_{n_i} p_{i-1}|_{e_i},
$$

即 $f \in S_3^1(\sigma)$. 假设引理 7.44 当 $n \leqslant m-1$ 时成立,往证 $n = m$ 时它也成立. 设 $\delta_i = [\delta, v_i]$, $i = 1,2$ 是 σ 的两个 $n-1$ 维面, e 是 $[\delta, v_\sigma]$ 的单位法向量. 任意给定 $(m-1)$-单纯形 $\rho \in \mathrm{St}(v_\sigma, \delta)$, 则 ρ 的顶点包括两个 δ 的顶点,设为 v_0, v_1. 而 ρ 的其它顶点分别是 δ 的某个 i 维面 ρ_i 的加细顶点 $v_{\rho_i}, 2 \leqslant i \leqslant m-2$ 和 v_σ, 即 $\rho = [v_0, v_1, v_{\rho_2}, \cdots, v_{\rho_{m-2}}, v_\sigma]$, 其中 ρ 满足条件 v_0, $v_1 \in \rho_2$, $\rho_i \subset \rho_{i+1}$, $2 \leqslant i \leqslant m-3$. 记 $v_{\rho_i} = v_i$, $i = 0,1$, $v_{\rho_{m-1}} = v_{\delta_1}$, $v_{\rho_m} = v_\sigma$. 显然向量 $v_{\delta_1} - v_{\rho_2}$ 可被 $v_{\rho_i} - v_{\rho_2}$, $0 \leqslant i \leqslant m$, $i \neq 2$ 线性表出,设为 $v_{\delta_1} - v_{\rho_2} = \sum_{i=0}^{m} a_i(v_{\rho_i} - v_{\rho_2})$. 由引理 7.45, 易知

$$
D_{v_{\rho_i} - v_{\rho_2}} g_i \in S_2^1(\mathrm{St}(v_\rho, \rho_2)),
$$

其中 $g_i = f|_{[\rho_2, v_{\rho_i}]}$, $i \geqslant 3$. 再由引理 7.42, $D_{v_{\rho_i} - v_{\rho_2}} g_i$ 是 $[\rho_2, v_{\rho_i}]$ 上的 2 次多项式,故有

$$D_{v_{\rho_i}-v_{\rho_2}}g_i(x)=\sum_{v\in V(\rho_2)}D_{v_{\rho_i}-v_{\rho_2}}f(v)\tau_v(2\tau_v-1)$$

$$+4\sum_{[v,w]\in V(\rho_2,1)}D_{v_{\rho_i}-v_{\rho_2}}f\left(\frac{v+w}{2}\right)\tau_v\tau_w,$$

(7.160)

其中对网线所求的和与端点的次序无关,即 $[v,w]$ 与 $[w,v]$ 只能取一个，而 $x=\sum_{v\in V(\rho_2)}v\tau_v$. 记 $p_i=f|_{(\rho,v_{\delta_i})}$, $i=1,2$. 由(7.160),当 $x\in\rho_2$ 时,有

$$\begin{aligned}D_{v_{\delta_2}-v_{\rho_2}}p_2(x)&=\sum_{i=0}^{n}a_iD_{v_{\rho_i}-v_2}p_2(x)\\&=\sum_{i=0}^{1}a_iD_{v_{\rho_i}-v_{\rho_2}}p_2(x)+\sum_{i=3}^{n}a_iD_{v_{\rho_i}-v_{\rho_2}}p_2(x)\\&=\sum_{i=0}^{1}a_iD_{v_{\rho_i}-v_{\rho_2}}p_1(x)\\&\quad+\sum_{i=3}^{n}a_i\Big(\sum_{v\in V(\rho_2)}D_{v_{\rho_i}-v_{\rho_2}}f(v)\tau_v(2\tau_v-1)\\&\quad+4\sum_{[v,w]\in V(\rho_2,1)}D_{v_{\rho_i}-v_{\rho_2}}f\left(\frac{v+w}{2}\right)\tau_v\tau_w\Big)\\&=D_{v_{\delta_2}-v_{\rho_2}}p_1(x),\end{aligned}$$

其中 $(\tau_v,v\in V(\rho_2))$ 是 x 关于 ρ_2 的面积坐标。这等价于

$$(D_ep_2)|_{\rho_2}=(D_ep_1)|_{\rho_2},$$

其中 e 为 $[\delta,v_0]$ 的法向量. 同理可证

$$D_ep_2\left(\frac{v_{\rho_2}+v_{\rho_i}}{2}\right)=D_ep_1\left(\frac{v_{\rho_1}+v_{\rho_i}}{2}\right),\quad 3\leqslant i\leqslant m,\ i\neq m-1.$$

重复上面的讨论,可得

$$\begin{cases}(D_ep_2)|_{\rho_j}=(D_ep_1)|_{\rho_j},\ 2\leqslant j\leqslant m-2,\\ D_ep_2\left(\dfrac{v_{\rho_j}+v_{\rho_i}}{2}\right)=D_ep_1\left(\dfrac{v_{\rho_j}+v_{\rho_i}}{2}\right),\ j+1\leqslant i\leqslant m,i\neq m-1.\end{cases}$$

由上式推出

$$D_e p_2\left(\frac{v_{\rho_i}+v_{\rho_j}}{2}\right)=D_e p_1\left(\frac{v_{\rho_i}+v_{\rho_j}}{2}\right),\ 0\leqslant i,\ j\leqslant m-2,$$

$$D_e p_2\left(\frac{v_{\rho_i}+v_\sigma}{2}\right)=D_e p_1\left(\frac{v_{\rho_i}+v_\sigma}{2}\right),\ 2\leqslant i\leqslant m-2.$$

再由引理的第一条假设,得

$$D_e p_2\left(\frac{v_{\rho_i}+v_\sigma}{2}\right)=D_e p_1\left(\frac{v_{\rho_i}+v_\sigma}{2}\right),\ i=0,1,m. \quad (7.161)$$

注意到 $D_e p_2|[\delta,v_\sigma]$ 和 $D_e p_1|[\delta,v_\sigma]$ 是 $n-1$ 元 2 次多项式,(7.160)和(7.161)表明

$$(D_e p_2)|_{[\delta,v_\sigma]}=(D_e p_1)|_{[\delta,v_\sigma]}.$$

这等价于

$$f\in c^1([\delta_2,v_\sigma]\cup[\delta_1,v_\sigma]).$$

进而有 $f\in S_3^1(\bar\sigma)$. □

现在我们证明定理 7.41. 先假定Δ只有一个 n-单纯形 σ, 并对 n 运用数学归纳法. 易见当 $n=2$ 时, 定理 7.41 就是熟知的 HCT 格式. 假定 $n\leqslant m-1$ 时所证结论成立, 往证当 $n=m$ 时亦然. 设 δ 是 σ 的一个 $n-1$ 维面, 由定理 4.27、引理 7.42, 以及归纳假设, 有

$$\begin{aligned}\dim S_3^1(\mathrm{St}(v_\sigma,\delta))&=\dim S_2^1(\mathrm{St}(v_\sigma,\delta))+\dim S_3^1(\bar\delta)\\&=\frac{1}{2}(m+1)(m+2)+\frac{1}{2}m(m^2-m+2).\end{aligned}$$

另一方面,可以证明,任给 $f\in S_3^1(\mathrm{St}(v_\sigma,\delta))$, f 可被其下面的值所唯一确定:

$$\{D^\lambda f(v),\ |\lambda|\leqslant 1,\ v\in V(\delta);\ D_T^\lambda f(w_m),\ e\in V(\delta,1),$$
$$|\lambda|=1;\ D^\lambda_{v_\sigma,\sigma_1}f(v_\sigma),\ |\lambda|\leqslant 1\}, \quad (7.162)$$

其中 $\sigma_1=[\delta,v_\sigma]$, w_m 是 e 的中点. 不难验证(7.162)中共有

$$\begin{aligned}N&=(m+1)m+\frac{1}{2}m(m-1)^2+m+1\\&=\frac{1}{2}(m+1)(m+2)+\frac{1}{2}m(m^2-m+2)\end{aligned}$$

个值．若(7.162)中的值全为零，而π是δ所在的$n-1$维超平面，由归纳假定，$f|_\pi=0$．设v_δ是δ的加细网点，由引理7.45，得

$$D_{v_\sigma-v_\delta}f\in S_2^1(\mathrm{St}(v_\sigma,\delta)).$$

再由引理7.42，$D_{v_\sigma-v_\delta}f$是一个整体2次多项式．若(7.162)中的值为零，显然有

$$D_{v_\sigma-v_\delta}f\left(\frac{v+w}{2}\right)=0,\ v,w\in V(\delta),$$

其中v和w可取为同一顶点．即$D_{v_\sigma-v_\delta}f|_\pi=0$．这表明对任何$m$-单纯形$\sigma_1\in\mathrm{St}(v_\sigma,\delta)$，都有

$$f|_{\sigma_1}=p\pi^2,$$

其中p是线性函数．再由$D^\lambda_{v_\sigma,\sigma_1}f(v_\sigma)=0$，$|\lambda|\leqslant1$，不难证明$f|_{\sigma_1}\equiv0$．从而$f\equiv0$．即(7.162)中的值唯一确定了一个$S_3^1(\mathrm{St}(v_\sigma,\delta))$中的函数．为完成归纳法，由引理7.44，我们只需证明

$$\{f(v_\sigma),\ D_{v-v_\sigma}f(v_\sigma),\ v\in V(\delta)\}$$

可由方程

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{v\in V(\sigma)}\tau_vD_{v-v_\sigma}f(v_\sigma)=0,\\ \displaystyle\sum_{v\in V(\sigma)}\tau_vD_{v-v_\sigma}f\left(\frac{w+v_\sigma}{2}\right)=0,\ w\in V(\sigma)\end{cases}\tag{7.163}$$

唯一确定即可．这点将在求f的表达式时一并证明． □

有了上面的讨论，一般情况下的定理7.41就不难证明了．显然，限制在每个n-单纯形$\sigma\in\Delta$上，定理7.41的条件1)和2)都唯一确定了一个$f_\sigma\in S_3^1(\bar\sigma)$．令$f$由$f|_\sigma=f_\sigma$，$\sigma\in\Delta$所定义，易见$f\in S_3^0(\bar\Delta)$，且$f$由1)和2)唯一确定．余下要证明的就是$f\in S_3^1(\bar\Delta)$．为此，只需证明，当两个$n$-单纯形$\sigma_1,\sigma_2\in\Delta$有公共$n-1$维面$\delta$时，$f\in S_3^1(\sigma_1\cup\sigma_2)$即可．事实上，由引理7.45，$D_{v_{\sigma_i}-v_\delta}f\in S_3^1(\mathrm{St}(\sigma_{v_i},\delta))$，$i=1,2$．再由引理7.42，$(D_{v_{\sigma_i}-v_\delta}f)|_\delta$，$i=1,2$都是整体2次多项式，从而由定理7.41中的条件1)和2)所唯一确定．注意到v_{σ_1}、v_{σ_2}、v_δ三点共线，我们有

$$\frac{1}{\|v_{\sigma_2}-v_\delta\|}(D_{v_{\sigma_2}-v_\delta}f)|_\delta+\frac{1}{\|v_{\sigma_1}-v_\delta\|}(D_{v_{\sigma_1}-v_\delta}f)|_\delta=0,$$

即 $f\in S_3^1(\sigma_1\cup\sigma_2)$. □

下面我们计算 $f\in S_3^1(\bar{\Delta})$ 的表达式. 为此, 我们只需针对 Δ 中的某个 n-单纯形讨论即可. 假定 σ 是所有讨论的 n-单纯形. 我们首先求出 f 在 $\bar{\sigma}$ 中加细网点处的函数值和一阶偏导数值. 设 δ 是 σ 的一个 $n-1$ 维面或是 σ 自身, v_δ 是 δ 的加细网点. 又设 $e=[v,w]$ 是 δ 的一边, $\delta_e=[v_\delta,v,w]$, d_e 是引理 7.43 中 $f|_{\delta_e}$ 的混合项系数. 由引理 7.43, 得

$$d_e=4D_{v_\delta-v}f\left(\frac{v+w}{2}\right)-D_{v_\delta-v}f(v)-D_{v_\delta-v}f(w)$$
$$+2(D_{w-v}f(v)+3f(v)),$$

和

$$D_{w-v_\delta}f\left(\frac{v+v_\delta}{2}\right)=\frac{1}{4}d_e+\frac{1}{4}(D_{w-v_\delta}f(v)+D_{w-v_\delta}f(v_\delta))$$
$$-\frac{1}{2}(D_{v-v_\delta}f(v_\delta)+3f(v_\delta)). \qquad (7.164)$$

将(7.164)代入引理 7.44 1) 中的方程,得

$$\begin{cases}\sum\limits_{v\in V(\delta)}\tau_vD_{v-v_\delta}f(v_\delta)=0,\\ 3f(v_\delta)+D_{v-v_\delta}f(v_\delta)=b_v, v\in V(\delta),\end{cases} \qquad (7.165)$$

其中

$$b_v=3f(v)+\frac{1}{2}D_{v_\delta-v}f(v)+\sum_{w\in V(\delta)}\tau_w\left(2D_{v_\delta-v}f\left(\frac{v+w}{2}\right)\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}D_{v_\delta-v}f(w)\right).$$

将上式的第二个方程两端同乘 τ_v 并对 $v\in V(\delta)$ 求和, 同时利用第一式, 得

$$f(v_\delta)=\frac{1}{3}\left[\sum_{v\in V(\delta)}\tau_v(3f(v)+\frac{1}{2}D_{v_\delta-v}f(v)\right.$$

$$+2\sum_{v\in V(\delta)}\sum_{w\in V(\delta)}\tau_v\tau_w D_{v_\delta-w}f\left(\frac{v+w}{2}\right)\Big]. \quad (7.166)$$

由(7.165)和(7.166)，可求出 $f(v_\delta)$，$D_{v-v_\delta}f(v_\delta)$，$v\in V(\delta)$。特别令 $\delta=\sigma$，我们证明了 $f(v_\sigma)$，$D_{v-v_\sigma}f(v_\sigma)$ 由(7.163)唯一确定。从而完全证明了定理 7.41。

设 $\sigma=[v_0,v_1,\cdots,v_n]$，$n$-单纯形 $\delta\in\sigma$。由 HCT 的加细过程知，存在 $\{0,1,\cdots,n\}$ 的一个排列 $\{i_0,i_1,\cdots,i_n\}$，使得 δ 的顶点是 v_{i_0},v_{i_1} 和 $\delta_m:=[v_{i_0},v_{i_1},\cdots,v_{i_m}]$，$2\leqslant m\leqslant n$ 的加细网点 v_{δ_m}，即 $\delta=[v_{i_0},v_{i_1},v_{\delta_2},\cdots,v_{\delta_m}]$。记 $v_{i_0}=w_0$，$v_{i_1}=w_1$，$v_{\delta_m}=w_m$，$2\leqslant m\leqslant n$。则 $\delta=[w_0,w_1,\cdots,w_n]$。显然我们只要求出 f 在 δ 上的表达式即可。设 $w_m=\sum\limits_{v\in V(\delta_m)}v\tau_{m,v}$，$\sum\limits_{v\in V(\delta_m)}\tau_{m,v}=1$，$2\leqslant m\leqslant n$。当 $j<m$时，注意 $w_j-w_m=\sum\limits_{v\in V(\delta_j)}\tau_{j,v}(v-w_m)$，有

$$D_{w_j-w_m}p(w_m)=\sum_{v\in V(\delta)}\tau_{j,v}D_{v-w_m}f(w_m),\ 0\leqslant j\leqslant m-1, \quad (7.167)$$

其中 $p=f|_\delta$。当 $j>m$时，由引理 7.45，$D_{w_j-w_m}f$ 在 $[\delta_m,w_j]$ 上是一个整体 2 次多项式。与(7.160)类似地，有

$$D_{w_j-w_m}p(x)=\sum_{v\in V(\delta_m)}D_{w_j-w_m}f(v)\tau_v(2\tau_v-1)$$
$$+4\sum_{[v,w]\in V(\delta_{m-1})}D_{w_j-w_m}f\left(\frac{v+w}{2}\right)\tau_v\tau_w. \quad (7.168)$$

同样，对 δ_m 中的网线所求之和与顶点的次序无关，再由引理 7.43，当 $i<m<j$ 时，

$$d_{i,m,j}=4D_{w_j-w_m}p\left(\frac{w_i+w_m}{2}\right)-(D_{w_j-w_m}p(w_i)$$
$$+D_{w_j-w_m}p(w_m))+2(D_{w_i-w_m}p(w_m)$$

$$+ 3p(w_m)), \tag{7.169}$$

其中 $m=1$ 时，$\frac{1}{2}(w_0+w_1)$ 是 σ 一边的中点，从而

$$D_{w_0-w_1}p\left(\frac{w_0+w_1}{2}\right)$$

是已知的。由引理7.43及(7.165)—(7.169)，即可得到 $p=f|_\sigma$ 上的表达式。

下面我们不加证明地给出 HCT 格式的误差估计([81])。

定理 7.46 设 I 是由定理 7.41 中插值条件 1) 和 2) 所确定的从 C^1 到 $S_3^1(\bar{\Delta})$ 的投影算子。则当 $f\in C^4$ 时，有

$$\|If-f\|_\infty \leqslant 2M_4h^4,$$

$$\|D_e(If-f)\|_\infty \leqslant cM_4h^3,$$

其中 $M_4=\max\limits_{x,|\lambda|=4}|D^\lambda f(x)|$，$h$ 是 Δ 中网线的最大长度，c 是与 $\bar{\Delta}$ 有关的常数，e 是任意的单位向量。

在构造有限元空间时，人们总是希望分片多项式的次数越低越好。这里将给出高维空间中的 PS (Powell-Sabin)格式([81]、[89])。Worsey-Piper [185] 也用不同的方法得到了这一结果，但他们没有给出显式表达式。

设 Δ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的单纯形剖分。按如下方式得到的加细剖分称为 Δ 的 PS 剖分，记做 Δ_{ps}：

1）分别在每个 i-单纯形 $\sigma\in\Delta$ 内部取一点 v_σ，$1\leqslant i\leqslant n$；

2）将 i-单纯形 $\sigma\in\Delta$ $(i\geqslant 2)$ 的加细网点 v_σ 与其顶点及面上的加细网点连接起来；

3）设 i-单纯形 $\sigma\in\Delta$，$1\leqslant i\leqslant n-1$，则要求 v_σ,v_δ，$\delta\in\mathrm{St}(\sigma)$ (δ 是维数大于 i 的单纯形)同在一个 $n-i$ 维超平面 π 上，且有 $\pi\cap\sigma=\{v_\sigma\}$。

定理 7.47 设 Δ_{ps} 是 Δ 的 PS 加细剖分，则 $f\in S_2^1(\Delta_{ps})$ 由值 $D^\lambda f(v)$，$|\lambda|\leqslant 1$，$v\in V(\Delta)$ 所唯一确定。故有

$$\dim S_2^1(\Delta_{ps})=(n+1)N_0, \tag{7.170}$$

其中 N_v 为 Δ 中的顶点数.

证明 我们先假定 Δ 中只有一个 n-单纯形 σ, 并对 n 用归纳法证(7.170). 当 $n=2$ 时, 由 2 维的 PS 格式的结果知(7.170)成立. 假设当 $n\leqslant m-1$ 时(7.170)成立,往证当 $n=m$ 时(7.170)亦成立.

设 δ 是 σ 的一个 $n-1$ 维面, $\mathrm{St}(v_\sigma,\delta)$ 由 σ_{ps} 在 $[v_\sigma,\delta]$ 上所定义. 按定理 4.27 及归纳法假设,有

$$\dim S_2^1(\mathrm{St}(v_\sigma,\delta))=m+1+\dim S_2^1(\delta_{ps})=m+1+m^2.$$

故不难证明 $f\in S_2^1(\mathrm{St}(v_\sigma,\delta))$ 可被值

$$\{f(v_\sigma),\ D_{v-v_\sigma}f(v_\sigma),\ D_{v,\delta}f(v)\mid v\in V(\delta),\ |\lambda|\leqslant 1\}\quad(7.171)$$

所唯一确定. 为完成归纳法,我们先证

引理 7.48 设 σ 是 m-单纯形, σ_{ps} 是 σ 的 PS 加细剖分. 若 $f\in S_2^0(\sigma_{ps})$, 且 $f|_{[\delta,v_\sigma]}\in S_2^1(\mathrm{St}(v_\sigma,\delta))$, 则 $f\in S_2^1(\sigma_{ps})$ 的充要条件是

i) $\displaystyle\sum_{v\in V(\sigma)}\tau_v D_{v-v_\sigma}f(v_\sigma)=0$,

ii) $\displaystyle D_{v_\delta-w}f(w)=\sum_{v\in V(\sigma)}\tau_v D_{v-w}f(w),\ w\in V(\sigma)$,

其中 δ 是 σ 的一个 $m-1$ 维面.

证明 设 δ_1 和 δ_2 是 σ 的两个 $m-1$ 维面,显然只需证明 $f\in C^1([\delta_1,v_\sigma]\cup[\delta_2,v_\sigma])$. 令 $\delta=\delta_1\cap\delta_2$, 则 δ 是 σ 的 $m-2$ 维面. 设 $\rho\in\mathrm{St}(v_\sigma,\delta)$ 是一个 $(m-1)$-单纯形, $\rho=[v_\sigma,v,v_{\rho_1},\cdots,v_{\rho_{m-2}}]$, 其中 $v\in V(\delta)$, ρ_i 为 δ 的 i 维面 $(\rho_{m-2}=\delta)$, $\rho_i\subset\rho_{i+1}$, $1\leqslant i\leqslant m-3$, 且 $v\in\rho_1$. 由 i) 和 ii) 不难证明 f 在顶点 $v\in V(\sigma)$ 和 v_σ 处 (1,1) 协调. 往证 f 在 ρ 的其它顶点处也 (1,1) 协调. 从 PS 加细剖分的第三个条件, 可知存在常数 $a_{i,j}$, $1+i\leqslant j\leqslant m$, 使得

$$v_{\delta_i}-w_i=\sum_{j=i+1}^{m}a_{i,j}(w_j-w_i),\ 1\leqslant i\leqslant m-2,$$

其中 $w_j=v_{\rho_j}$, $i+1\leqslant j\leqslant m-2$, $w_{m-1}=v_{\delta_1}$, $w_m=v_\sigma$. 利用引理 7.45 并注意到 f 在 $v\in V(\sigma)$ 处 (1,1)-协调, 记 $p_i=$

$f|_{[\rho,v_{\delta_i}]}$, $i=1,2$, 则有

$$D_{v_{\delta_2}-w_i}p_2(w_i)=\sum_{v\in V(\rho_i)}\tau_v D_{v_{\delta_2}-w_i}f(v)=D_{v_{\delta_2}-w_i}p_1(w_i)$$

$$=\sum_{j=i+1}^{m}a_{i,j}D_{w_j-w_i}p_1(w_i),$$

其中 $(\tau_v,\ v\in V(\rho_i))$ 是 w_i 关于 ρ_i 的重心坐标. 从而 f 在 w_i 点也是(1,1)-协调的. 由定理 4.7, 推得 $f\in C^1([\rho,v_{\delta_1}]\cup[\rho,v_{\delta_2}])$, 所以 $f\in C^1([\delta_1,\ v_\sigma]\cup[\delta_2,\ v_\sigma])$. □

现在我们可以来完成定理 7.47 的归纳法了. 由引理 7.48 中的 i) 和 ii), 及

$$2f(v_\sigma)+D_{v-v_\sigma}f(v_\sigma)=2f(v)+D_{v_\sigma-v}f(v),\quad v\in V(\sigma),$$

不难解出

$$\begin{cases}f(v_\sigma)=\sum\limits_{v\in V(\sigma)}\tau_v\Big(f(v)+\dfrac{1}{2}\sum\limits_{w\in V(\sigma)}\tau_w D_{w-v}f(v)\Big),\\ D_{v-v_\sigma}f(v_\sigma)=2f(v)+\sum\limits_{w\in V(\sigma)}\tau_w D_{w-v}f(v)-2f(v_\sigma),v\in V(\sigma).\end{cases}\tag{7.172}$$

上式及 (7.171) 说明 $f\in S_2^1(\sigma_{ps})$ 被值 $D^{\lambda}_{e_\sigma\sigma}f(v)$, $|\lambda|\leqslant 1$, $v\in V(\sigma)$ 唯一确定。

在一般情况下,注意到 PS 加细的第三个条件, 当两个 n-单纯形 σ_1 和 σ_2 有 $n-1$ 维公共面 $\delta=\sigma_1\cap\sigma_2$ 时, $v_{\sigma_1},v_{\sigma_2}$ 和 v_δ 三点共线,从而定理 7.48 可与定理 7.41 类似地证明,不再累述.

将 (7.172) 中的 σ 换成任一 i-单纯形 $\delta\subset\sigma$, (7.172) 仍然成立. 故此不难得到 $f\in S_2^1(\Delta_{ps})$ 的表达式.

我们不加证明地给出

定理 7.49 设 I 是 C^1 到 $S_2^1(\Delta_{ps})$ 由定理 7.47 确定的投影算子. 若 $f\in C^3$, 则有

$$\|If-f\|_\infty\leqslant 2M_3h^3,$$
$$\|D_e(If-f)\|_\infty\leqslant cM_3h^2,$$

其中 $M_3=\max\limits_{x,|\lambda|=3}|D^\lambda f(x)|$, h 为 Δ 的最大网线长度, e 是单位

向量，c 是与 Δ_{pt} 有关的常数。

我们以讨论 $S_2^1(\Delta_{pt})$ 中的 B 样条来结束本节的内容。

定理7.50 设 v 是 Δ 的某顶点，$f\in S_2^1(\Delta_{pt})$ 由 $f(v)=1$，$\frac{\partial}{\partial x_i}f(v)=\varepsilon_i$，$1\leqslant i\leqslant n$ 及 $D^\lambda f(w)=0$，$|\lambda|\leqslant 1$，$v\neq w\in V(\Delta)$ 确定．则 f 为 B 样条(即 $f\geqslant 0$ 且其支集是局部的)的充要条件是

$$\|\boldsymbol{\varepsilon}\|\leqslant \frac{2}{\bar{h}},$$

其中 $\bar{h}$ 是 Δ_{pt} 中的最大网线长度，$\boldsymbol{\varepsilon}=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)$。

证明 显然 f 的支集是 Δ 中的 v 星 $\mathrm{St}(v)$．故只需在 n-单纯形 $\sigma\in \mathrm{St}(v)$ 上考虑问题即可．设 $\delta\subset\sigma$，由(7.172)，得

$$2f(v_\delta)=\sum_{w\in V(\delta)}\tau_w(2f(w)+D_{v_\delta-w}f(w))$$

$$=\begin{cases}0, & \text{如果 } v\bar{\in}\delta,\\ \tau_v(2f(v)+D_{v_\delta-v}f(v)), & \text{如果 } v\in\delta.\end{cases}\tag{7.173}$$

当 $v\in\delta$ 时，易证

$$D_{w-v_\delta}f(v_\delta)=\begin{cases}-2f(v_\delta), & w\neq v,\\ 2f(v)+D_{v_\delta-v}f(v)-2f(v_\delta), & w=v.\end{cases}\tag{7.174}$$

设 $x\in\partial\sigma$ (σ 的边界)，则

$$g_x(t)=f(v_\delta+t(x-v_\delta)),\quad 0\leqslant t\leqslant 1$$

是关于 t 的 2 次多项式．显然 $f|_\sigma\geqslant 0$ 等价于

$$g_x(t)\geqslant 0,\quad x\in\partial\sigma,\quad 0\leqslant t\leqslant 1.$$

利用(7.174)，不难得到 $g_x(t)$ 的表达式

$$g_x(t)=f(v_\delta)(1-t)^2+(2f(v_\sigma)+D_{x-v_\sigma}f(v_\sigma))t(1-t)+f(x)t^2.\tag{7.175}$$

现设 δ 是 σ 的 $n-1$ 维面，$x=\sum_{w\in V(\delta)}w\tau_{x,w}\in\delta$．由(7.174)得

$$D_{x-v_\sigma}f(v_\sigma)=\sum_{w\in V(\delta)}\tau_{x,w}D_{w-v_\sigma}f(v_\sigma)$$

$$
=\begin{cases}-2f(v_\sigma), & v\notin V(\delta),\\ -2f(v_\sigma)+\tau_{xvw}(2f(v)+D_{v_\sigma-v}f(v)), & v\in V(\delta).\end{cases}
$$

将上式代入(7.175),并利用(7.174),得

$$
g_x(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\tau_v(2f(v)+D_{v_\sigma-v}f(v))(1-t)^2+f(x)t^2, & v\notin V(\delta),\\ (2f(v)+D_{v_\sigma-v}f(v))\left(\dfrac{1}{2}\tau_v(1-t)+\tau_{xvw}t\right)(1-t) & \\ \qquad\qquad +f(x)t^2, & v\in V(\delta).\end{cases}
$$

由此不难得到,$f|_\sigma\geqslant 0$ 的充要条件是

$$
\begin{cases}2f(v)+D_{v_\sigma-v}f(v)\geqslant 0,\\ f|_{\partial\sigma}\geqslant 0.\end{cases}
$$

重复上面过程即得,$f|_\sigma\geqslant 0$ 的充要条件是当 $\delta\subset\sigma$ 且 $v\in V(\delta)$ 时,成立

$$
2f(v)+(v_\delta-v)\cdot\epsilon\geqslant 0,
$$

这里 $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}$ 是向量 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 的内积. 注意 $f(v)=1$ 且 ϵ 可为任何向量,即知定理 7.50 成立. □

由定理 7.50 不难构造出 $S_3^1(\Delta_{pt})$ 的 B 样条基,这里就不详细讨论了.

§5. 有限元空间中的谱基

小波 (wavelets) 是当前一个非常活跃的研究领域. 小波方法已被广泛地应用在物理和工程计算中([186]),这里将介绍有限元空间中的谱基,即有限元中的小波方法. 其中包括 Bramble-Pasiak-Xu, Dahmen-Oswald-Shi, 以及 Yserentant 等人的工作. 在工程界,早在七十年代就有人考虑过 C^1 有限元空间中的谱基 ([187]),但从理论上,首先证明了谱基优越性的是 Yserentant[188].

众所周知,用有限元法求解偏(常)微分方程(如调和方程和双调和方程等),最后都归结为求线性方程组

$$AY = b \tag{7.176}$$

的解．基于计算稳定性的考虑，希望刚度矩阵 A 的条件数

$$\mathscr{K}(A) := \|A\|\|A^{-1}\|$$

要尽可能地小，这里 $\|\cdot\|$ 是矩阵的某种相容模．如果用结点基有限元求解调和方程，则刚度矩阵的条件数满足

$$\mathscr{K}(A) = O(h^{-2}), \tag{7.177}$$

这里 h 是剖分的步长．若用结点基有限元求解双调和方程，则刚度矩阵的条件数满足

$$\mathscr{K}(A) = O(h^{-4}). \tag{7.178}$$

表明结点基的稳定性是较差的，在实际计算中人们总是希望通过各种方法来提高计算过程的稳定性，本文将要介绍的谱基(Hierarchical Basis)方法是一种从本质上提高计算稳定性的方法．而且不论对调和方程还是双调和方程，由适当的谱基所形成的刚度矩阵 B 的条件数都满足

$$\mathscr{K}(B) = O((\log h^{-1})^2). \tag{7.179}$$

显然它优于(7.177)和(7.178)．这种降低条件数的过程被称为条件数预处理．

H. Yserentant[188] 首先证明了分片线性连续谱基形成的刚度矩阵具有(7.179)所示的条件数．P. Oswald[1] 证明了用 Powell-Sabin 有限元构成的谱基求解双调和方程，其刚度矩阵的条件数也由(7.179)式给出．其后 Dahmen-Oswald-Shi[189] 就 HCT 元(Hsieh-Clough-Tocher) 及 VS 元 (Veubela-Sander) 也得到了同样的结果．

值得指出的是，利用一般的谱基方法求解三维以上的偏微分方程问题时，其刚度矩阵的条件数已不再满足(7.179)式．一般来说，其条件数的阶大于或等于 h^{-1}．H. Yserant[188] 猜测用谱基求解三维调和方程，其刚度矩阵的条件数 $\mathscr{K}(A) = O(h^{-1})$．本节

1) P. Oswald, Hierarchical conforming finite element methods for the biharmonic equation, to appear in SIAM J. Numer. Anal.

将我们将证明这个猜测是正确的。

Bramble-Pasiak-Xu[190] 改进了 Yserentant 的结果。他们证明了在某些情况下，存在较易求得的矩阵 B，使得

$$\mathscr{K}(BA)=O(\log h^{-1}), \tag{7.180}$$

Bramble-Pasiak-Xu 条件数预处理方法对许多三维及三维以上的情况也是适用的。

问题的提出和记号。

设 $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ 是一个有界多边形区域，这里我们只讨论数值求解调和方程

$$\begin{cases}\Delta u=f, & \text{在}\ \Omega\ \text{的内部},\\ u=0, & \text{在}\ \partial\Omega\ \text{上},\end{cases} \tag{7.181}$$

与双调和方程

$$\begin{cases}\Delta^2 u=f, & \text{在}\ \Omega\ \text{的内部},\\ u=\dfrac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}}u=\ ., & \text{在}\ \partial\Omega\ \text{上},\end{cases} \tag{7.182}$$

其中 $\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial}{\partial y^2}$ 是 Laplace 算子，$\boldsymbol{n}$ 是 Ω 边界的外法向量。然而，我们的讨论对非齐次边界条件及 2 次或 4 次强椭圆算子 L 也都是适用的。按通常的意义，L 是 $2d$ 次强椭圆型算子乃指由其诱导出的能量模，

$$\|\cdot\|_E:=\langle\cdot,\cdot\rangle^{\frac{1}{2}} \tag{7.183}$$

满足

$$\|u\|_E\cong\|u\|_{d,2}(\Omega),\quad u\in H^d(\Omega), \tag{7.184}$$

这里 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是由 L 诱导出的双线性形式，

$$\|\cdot\|^2_{d,2}(\Omega)=\|\cdot\|^2_2(\Omega)+|\cdot|^2_{d,2}(\Omega),$$

$$|u|^2_{d,2}(\Omega)=\sum_{|\alpha|=d}\|D^\alpha u\|^2_2(\Omega),$$

而“$\cong$”是等价等号。$A\cong B$ 是指存在不依赖 A 和 B 的常数 C_1，$C_2>0$，使得 $C_1A\leqslant B\leqslant C_2A$。

设 $S\subseteq H^d_0(\Omega)$ 是定义在长度为 h 的三角剖分上的 N 维线性

空间，$\mathscr{B}=\{B_i,\ i=1,\cdots,N\}$ 是 S 的结点基，$A=(\langle B_i,B_j\rangle)_{N\times N}$ 是由 $\mathscr{B}$ 得到的刚度矩阵，则 $\mathscr{K}(A)=O(h^{-2d})$. 熟知，对 $\mathscr{B}$，求解线性方程组 (7.176)即可得到(7.181)或 (7.182) 的一个近似解 $u_h=\sum_{i=1}^{N}y_iB_i$. 我们的基本思想是寻求适当的矩阵 C，使得 $\mathscr{K}(CAC^T)$ 小于 $\mathscr{K}(A)$. 并转而求解 (7.176) 的等价方程，

$$CAy=Cb,$$

即可得到 $y=C^T(CAC^T)^{-1}Cb$，这里 C^T 是 C 的转置矩阵. 这样的变换可以本质地提高计算过程的稳定性. 应该指出，这种方法还可通过基底的变换来实现.

设 $\mathscr{B}'=\{B'_i,\ 1\leqslant i\leqslant N\}$ 是 S 的另一个基，它与 $\mathscr{B}$ 之间满足关系式

$$\mathscr{B}'=C\mathscr{B}. \tag{7.185}$$

显然由 $\mathscr{B}'$ 得到的刚度矩阵为

$$A'=C^TAC.$$

注意到当 $g=\sum_{i=1}^{N}x_iB'_i\in S$ 时，有 $\|g\|_E^2=\langle g,g\rangle=x^TA'x$. 利用(7.184)式，可得到如下的结果(参见[188]或[189]等).

命题7.51 设存在常数 $0<r=r(\mathscr{B}')$, $\Gamma=\Gamma(\mathscr{B}')<\infty$，使得

$$r\sum_{i=1}^{N}|x_i|^2\leqslant\left\|\sum_{i=1}^{N}x_iB'_i\right\|_2^2(\Omega)\leqslant\Gamma\sum_{i=1}^{N}|x_i|^2,\ \forall x\in\mathbf{R}^N,$$

则 $\mathscr{K}(A')=O\left(\frac{\Gamma}{r}\right)$.

谱基及其构造

设 $J=\{\Delta_i\}_{i\geqslant 0}$ 是满足下列条件的一串三角剖分：

1) 对每个 $i\geqslant 0$，Δ_{i+1} 是 Δ_i 的加细剖分，即 $\forall\tau\in\Delta_{i+1}$，都存在 $\tau'\in\Delta_i$，使得 $\tau\subseteq\tau'$；

2) 设 Θ 是 J 中所有三角形的内角集合，则 $\inf\limits_{\theta\in\Theta}\theta>0$；

3）存在常数 $C_1, C_2 > 0$，使得

$$C_1 2^{-m} \leqslant d_m \leqslant D_m \leqslant C_2 2^{-m}, \quad m \geqslant 0, \tag{7.186}$$

其中 d_m 和 D_m 分别是 Δ_m 的最小和最大边的长度。

满足条件 1)—3) 的三角剖分列称为三角剖分串 (nested triangulations)，而 2) 和 3) 称为 Δ_m 的正规性条件. 我们用 $\{S_m\}_{m\geqslant 0}$ 表示 $J = \{\Delta_m\}_{m\geqslant 0}$ 上的多元样条有限元空间

$$S_m = H_0^d(\Omega) \cap S_k^{d-1}(\Delta_m),$$

式中 $S_k^r(\Delta)$ 表示 Δ 上的 k 次 r 阶样条空间. 此处恒假定 $S_k^{d-1}(\Delta_m)$ 存在结点基 $\mathscr{B}^m = \{B_\lambda^{(m)}, \lambda \in \Lambda^m\}$，其中 Λ^m 是满足

$$\lambda(B_\mu^{(m)}) = \delta_{\lambda,\mu} \tag{7.187}$$

的 $(S_m)^*$ 的基底，此处 $(S_m)^*$ 是 S_m 的对偶空间，而 $\delta_{\lambda,\mu}$ 是 Kronecker 符号. 更进一步，我们要求 $\lambda \in \Lambda^m$ 都具有形式

$$\lambda(f) = 2^{m(l-r)}(p(D)f)(v), \tag{7.188}$$

其中 p 是 r 次齐次多项式，$p(D)$ 是由 p 诱导出的微分算子. 此处 v 是 T_m 的某些特殊点（诸如顶点和边的中点等）. 点 v 称为 λ 的支集.

由 $J = \{\Delta_m\}_{m\geqslant 0}$ 的定义，$\{S_m\}_{m\geqslant 0}$ 显然满足条件

$$S_0 \subset S_1 \subset \cdots \subset S_m \subset \cdots. \tag{7.189}$$

定义映射

$$I_j: S_m \to S_j, \quad j \leqslant m$$

$$I_j g := \sum_{\lambda \in \Lambda^j} \lambda(g) B_\lambda^{(j)},$$

则 I_j 是 S_m 到 S_j 上的映射. 若记 $I_{-1} = 0$，$\Lambda^{-1} = \varnothing$（空集），则有

$$g = \sum_{j=0}^{m} (I_j - I_{j-1})g, \quad g \in S_m. \tag{7.190}$$

在以后的讨论中，若 $\lambda \in \Lambda^m$，$\tilde{\lambda} \in \Lambda^j (m \geqslant j)$ 使得 λ 与 $\tilde{\lambda}$ 只差常数倍，我们就将 λ 和 $\tilde{\lambda}$ 视为同一元素. 同时假定 $\Lambda^j \backslash \Lambda^{j-1}$ 是 Span $\{\Lambda^j \backslash \Lambda^{j-1}\}$ 的基底. 这等价于 $\{B_\lambda^{(j)}; \lambda \in \Lambda^j \backslash \Lambda^{j-1}\}$ 是空间

$$W_j := (I_j - I_{j-1})S_j; \quad j \geqslant 0$$

的基底。不难看出

$$S_j = S_{j-1} + W_j.$$

更进一步地

$$S_m = \sum_{j=0}^{m} \oplus W_j.$$

故集合

$$\mathscr{H}_m := \{B_\lambda^{(j)};\ \lambda \in \Lambda^j \backslash \Lambda^{j-1},\ 0 \leqslant j \leqslant m\} \tag{7.191}$$

是 S_m 的基底。$\mathscr{H}_m$ 称做 S_m 的谱基。

下面介绍目前已知的几种谱基。

1° 分片线性谱基

设 Δ_0 是一个粗网格三角剖分，Δ_{i+1} 是将 Δ_i 中每个三角形都加细成四个全等三角形而得到的加细剖分(如图 7.31)。

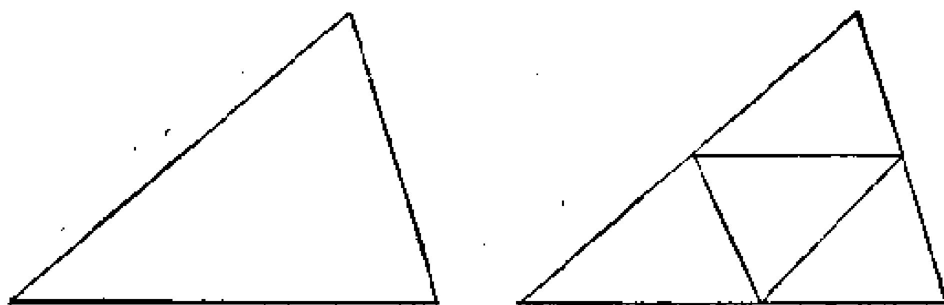


图 7.31

如此即可得到一个三角剖分串，对应每个 Δ_i 的样条空间 $S_1^0(\Delta_i)$ 记为 S_i。由 Λ^i 的定义

$$\Lambda^i = \{\lambda_v;\ \lambda_v(f) = 2^i f(v),\ v \in V_i\},$$

其中 V_i 是 T_i 的所有顶点的集合。故 S_m 的谱基为

$$\mathscr{H}_m = \{B_v^{(i)};\ \lambda_w(B_v^{(i)}) = \delta_{v,w},\ \lambda_w \in \Lambda^i \backslash \Lambda^{i-1},\ 0 \leqslant i \leqslant m\}.$$

由 $B_v^{(i)}$ 的定义，$B_v^{(i)}$ 是在顶点 $v \in \Delta_i$ 处取值 2^{-i}，在其它顶点 $w \in \Delta_i$ 取值零的分片线性函数。

2° 2 次 C^1 谱基

Oswald 利用 PS 元构造了如下的光滑谱基。设 $\{T_i\}_{i \geqslant 0}$ 是如图 7.31 所示的三分剖分串，Δ_i 是将 T_i 中每个三角形都按 PS 加细(如图 7.7)后所得到的 T_i 的加细剖分。显然 $\{\Delta_i\}_{i \geqslant 0}$ 也是一个

三角剖分串.

熟知，$S_i := S_2^1(\Delta_i)$ 的维数是 $3n(V_i) + n(E_i)$，这里 V_i 和 E_i 分别是 T_i 的顶点和边的集合，并且 $g \in S_i$ 被其所有顶点 $v \in V_i$ 处的函数值和 1 阶导数值以及其所有边 $e \in E_i$ 的中点处的法向导数值所唯一确定. 从而 Λ^0 可取为如下的集合

$$\Lambda^0 = \{\lambda_v^\alpha,\ \lambda_e;\ v \in V_0,\ e = E_0,\ |\alpha| \leqslant 1\}, \quad (7.192)$$

其中 λ_v^α 定义为

$$\lambda_v^\alpha(f) = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial \boldsymbol{n}_{v,1}^{\alpha_1}} \cdot \frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial \boldsymbol{n}_{v,2}^{\alpha_2}} f(v), \quad (7.193)$$

$\boldsymbol{n}_{v,1}$, $\boldsymbol{n}_{v,2}$ 是赋予 v 的互相垂直的单位向量,

$$\lambda_e(f) = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}_e} f(\boldsymbol{m}_e), \quad (7.194)$$

$\boldsymbol{n}_e$ 是 e 的单位法向量，$\boldsymbol{m}_e$ 是 e 的中点. $\Lambda^i (i \geqslant 1)$ 可取为

$$\Lambda^i = \{\lambda_v^\alpha,\ \lambda_e;\ v \in V_i,\ e \in E_i,\ |\alpha| \leqslant 1\}, \quad (7.195)$$

其中

$$\lambda_v^\alpha(f) = 2^{m(1-|\alpha|)} \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial \boldsymbol{n}_{v,1}^{\alpha_1}} \cdot \frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial \boldsymbol{n}_{v,2}^{\alpha_2}} f(v), \quad (7.196)$$

这里当 $v \in V_{i-1}$ 时，$\boldsymbol{n}_{v,1}$ 和 $\boldsymbol{n}_{v,2}$ 如前所取，而当 v 是 $e \in E_{i-1}$ 的中点时，则取单位向量 $\boldsymbol{n}_{v,2} = \boldsymbol{n}_e$ 和 $\boldsymbol{n}_{v,1} \perp \boldsymbol{n}_e$. Λ^i 中的 λ_e 仍由(7.194)式所定义. S_m 的谱基为

$$\mathscr{H}_m = \{B_\lambda^{(i)};\ \lambda \in \Lambda^i \backslash \Lambda^{i-1},\ 0 \leqslant i \leqslant m\}, \quad (7.197)$$

其中 $B_{\alpha,v}^{(i)}$（对应 $\lambda = \lambda_v^\alpha$）和 $B_e^{(i)}$（对应 $\lambda = \lambda_e$）分别是如下的结点基，

$$\begin{cases} \lambda_w^\beta(B_{\alpha,v}^{(i)}) = \delta_{\alpha,\beta}\delta_{v,w}, & \lambda_w^\beta \in \Lambda^i, \\ \lambda_e(B_{\alpha,v}^{(i)}) = 0, & \lambda_e \in \Lambda^i, \\ \lambda_w^\beta(B_e^{(i)}) = 0, & \lambda_w^\beta \in \Lambda^i, \\ \lambda_{e'}(B_e^{(i)}) = \delta_{e,e'}, & \lambda_e \in \Lambda^i. \end{cases} \quad (7.198)$$

3° 3 次 C^1 谱基

从以上的讨论中可以看出，2 次 C^1 谱基的形成需要将每个 T_i 中的三角形加细成 12 个子三角形，这显然分得太细了. 所以

有必要构造新的谱基.下面介绍的是 Dahmen-Oswald-Shi[189] 构造的 3 次 C^1 谱基.

设T_0是Ω的由三角形和凸四边形组成的剖分(见图 7.32,显然三角剖分和凸四边形剖分是其特殊情况). 分别连接 T_0 中三角形 τ 的重心与其三个顶点将 τ 加细成三个子三角形,再连接 T_0 中四边形 q 的两条对角线将 q 分解成四个子三角形. 即对 T_0 中的三角形做 HCT 加细,而对其中的四边形做 VS (Veubete-Sander) 加细. 如此得到的 T_0 的加细三角剖分记为 Δ_0.

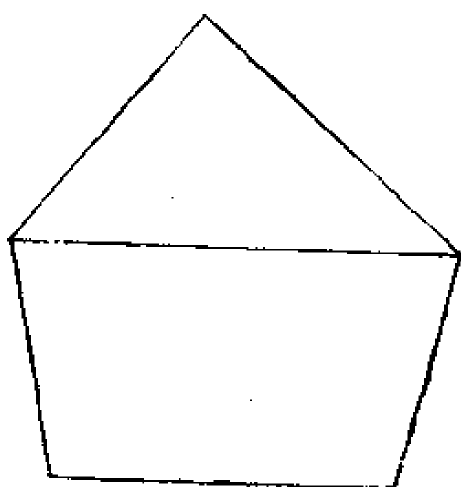


图 7.32

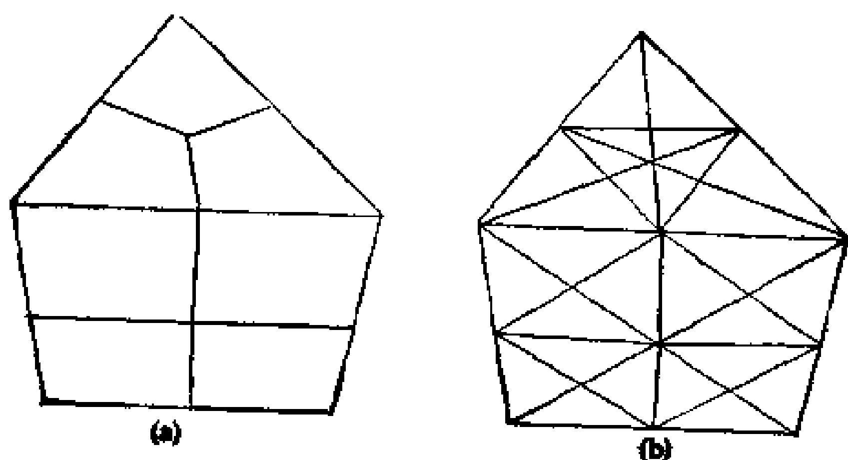


图 7.33

再连接 T_0 中三角形 τ 的重心与其三边的中点,将 τ 分成三个

子四边形（见图 7.33(a)），同时将 T_0 中四边形 q 的两对角线交点与其四边的中点相连接以形成四个子凸四边形，如此得到的 T_0 的加细剖分记做 T_1。由连接 T_1 中每个凸四边形的两条对角线所得的三角剖分记为 Δ_1（如图 7.33(b)）。

当 $i \geqslant 1$ 时，T_{i+1} 是 T_i 中的四边形由其对角线交点及其各边的中点连线分成四个子四边形而得到的只包含四边形的加细剖分．而 Δ_{i+1} 是连接 T_{i+1} 中各四边形的两对角线所成的三角剖分．不难证明 $\{\Delta_i\}_{i\geqslant 0}$ 是三角剖分串(参见 [189]，命题 5.2)．令 $S_i = S_3^1(\Delta_i)$，$i \geqslant 0$．由熟知的 HCT 元及 VS 元，$g \in S_i$ 由其在 T_i 中顶点处的函数值，1 阶偏导数值及其在 T_i 中三边中点处的法向导数值所唯一确定．与 2 次 C^1 谱基类似地，Λ^i 可取为

$$\Lambda^i = \{\lambda_v^\alpha,\ \lambda_e;\ v \in V_i,\ e \in E_i, |\alpha| \leqslant 1\}, \qquad (7.199)$$

4° 5 次 C^1 谱基

设 $\{T_i\}$ 是按图 7.31 形成的三角剖分串．构造 5 次 c^1 谱基的一个自然想法就是利用 Argyris 元．但是由于 Argyris 元的构造要用到剖分顶点处的 2 阶偏导数值，致使 T_i 上的有限元空间将不再是 T_{i+1} 上有限元空间的子空间（即所谓非相序性）．因而必须考虑全空间 $S_i = S_5^1(T_i)$，$i \geqslant 0$．采用 [140] 中给出的结点基，即可以构造出 S_m 的谱基，

$$\mathscr{H}_m := \{B_\lambda^{(i)};\ \lambda \in \Lambda^i \backslash \Lambda^{i-1},\ 0 \leqslant i \leqslant m\}. \qquad (7.200)$$

由于其构造过程较复杂，特别是这种 C^1 谱基的条件数为 $o(h^{-2})$ 而非 $O((\log h^{-1})^2)$，因而是不可取的．

三维以上的 C^0 谱基

三维以上谱基的构造是很困难的，它依赖于是否能构造出单纯形剖分串．$\mathbf{R}^n$ 中的单纯形剖分 $\{\Delta_i\}_{i\geqslant 0}$ 称为单纯形剖分串如果它满足前面提及的条件 1)，3) 及下面的 2)：Δ_i，$i \geqslant 0$ 中任一四面体都与有限四面体集合 A 中的某一个四面体相似．

Yserentent [188] 猜测在 $\mathbf{R}^n$ ($n \geqslant 3$) 中存在单纯形剖分串．这里将构造性地证明它的猜测．为简单起见，仅以 $\mathbf{R}^3$ 为例来说明构造的思想．不难看出，以下构造过程对 $\mathbf{R}^n (n \geqslant 3)$ 也是成

立的。

如图 7.34，设 $\sigma=[v_1,v_2,v_3,v_4]\subset\Delta_0$，$v_{i,j}=\dfrac{1}{2}(v_i+v_j)$，$a_{i,j}=\|v_i-v_j\|$。显然按图 7.34 所示的加细方法可得到 Δ_0 的一个加细单纯形剖分 Δ_1，即取 Δ_0 中每个四面体 σ 的边的中点将 σ 分为一个八面体和四个四面体，再连接某两对边的中点(图中为点 $v_{2,4}$ 和 $v_{3,4}$) 将八面体分为四个四面体。如此所得到的 σ 的八个子四面体中有四个与 σ 相似。在进一步的加细过程中，只需考虑如何加细其它的四面体。

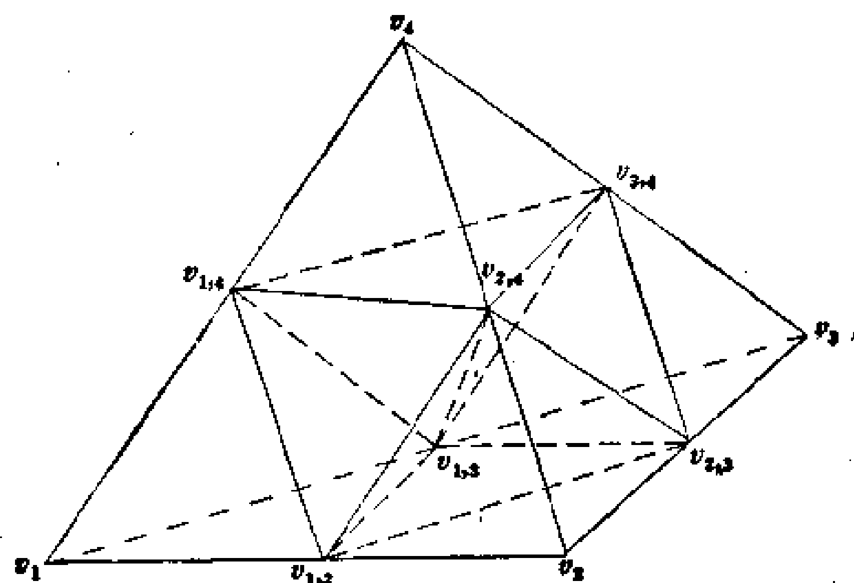


图 7.34

不难证明

$$\|v_{1,3}-v_{2,4}\|^2=\frac{1}{4}h_1^2, \tag{7.201}$$

其中 $h_1^2=a_{1,2}^2+a_{1,4}^2+a_{2,3}^2+a_{3,4}^2-a_{1,3}^2-a_{2,4}^2$。

在将 Δ_1 加细成 Δ_2 时，我们如下加细 Δ_1 中的四面体 σ：(i) 当 σ 与 Δ_0 中某四面体 $\bar{\sigma}$ 相似时，按加细 $\bar{\sigma}$ 的相同过程加细 σ；(ii) 若 σ 不与 Δ_0 中任何四面体相似，譬如 σ 是图 7.34 中的四面体 $[v_{2,3},v_{1,3},v_{1,2},v_{2,4}]$，则按图 7.35 所示方式加细 σ，即用 σ 边的

中点同时连接点 w_1 和 w_6 以将 σ 分为八个四面体。

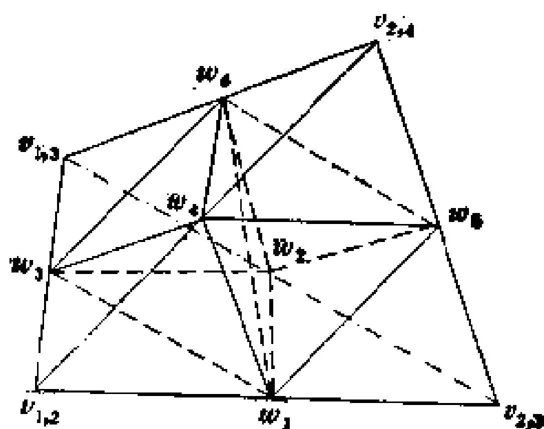


图 7.35

由(7.201),可知,

$$\|w_1 - w_6\| = \frac{1}{4} a_{2,4}. \tag{7.202}$$

显然以某 $v_{i,j}$ 为一顶点的四个四面体都与 σ 相似。同时不难验证四面体 $[w_1, w_2, w_3, w_6]$ 与图 7.34 中的四面体 $[v_1, v_2, v_3, v_4]$ 相似，而四面体 $[w_1, w_4, w_5, w_6]$ 与 $[v_1, v_2, v_3, v_4]$ "镜面"相似(即 $[w_1, w_4, w_5', w_6]$ 与 $[v_1, v_2, v_3, v_4]$ 相似，其中 w_5' 是 w_5 关于平面 $w_1w_4w_6$ 的对称点)。另一方面,四面体 $[w_1, w_2, w_5, w_6]$ 相似于 $[v_{1,2}, v_{1,3}, v_{1,4}, v_{2,4}]$，且 $[w_1, w_3, w_4, w_6]$ 相似于 $[v_{1,3}, v_{2,3}, v_{2,4}, v_{3,4}]$。从而 Δ_2 中任何一个四面体都相似或"镜面"相似于 Δ_1 中的某个四面体。若 $\sigma \in \Delta_2$ 与 $\bar{\sigma} \in \Delta_1$ 相似(或"镜面"相似)，则按加细 $\bar{\sigma}$ 的相同(或"镜面"相同)方式加细 σ 而得到 Δ_2 的加细剖分 Δ_3。由上面的讨论知 Δ_3 中的任一四面体都与 Δ_2 中的某四面体相似。当然这个过程可无限进行下去,而得到一串四面体剖分 Δ_i，$i \geqslant 0$，使得 Δ_i，$i \geqslant 3$ 中任一四面体都与 Δ_2 中某个四面体相似。显然 $\{\Delta_i\}_{i\geqslant 0}$ 是构成一个四面体剖分串。若令 $S_m = S_1^0(\Delta_m)$，则不难构造出 S_m 的谱基,

$$\mathscr{H}_m = \{B_v^{(i)};\ v \in V_i \backslash V_{i-1},\ 0 \leqslant i \leqslant m\}, \tag{7.203}$$

其中 $V_{-1} = \phi$，V_i，$i \geqslant 0$ 是 T_i 的顶点集合，$B_v^{(i)} \in S_1^0(T_i)$ 是

满足

$$B_v^{(i)}(w)=2^{-i}\delta_{v,w},\quad v,w\in V_i.$$

的结点基。

下面讨论结点基与谱基之间的关系。记 $\Lambda_{i,\lambda}^m$ 为 Λ^m 中支集位于 $\operatorname{supp}B_\lambda^{(i)}$, $i\leqslant m$, $\lambda\in\Lambda^i\backslash\Lambda^{i-1}$ 内部的所有线性泛函的集合，则

$$B_\lambda^{(i)}=\sum_{\mu\in\Lambda_{i,\lambda}^m}\mu(B_\lambda^{(i)})B_\mu^{(m)},\tag{7.204}$$

其中 $B_\mu^{(m)}$ 是对应 $\mu\in\Lambda^m$ 的结点基。故若记 $\mathscr{B}'=\mathscr{B}C$, $\mathscr{B}'$ 和 $\mathscr{B}$ 分别是由谱基和结点基中元素作为分量的向量。将 $\mathscr{B}$ 按 $\mathscr{B}_i:=\{B_\lambda^{(i)}|\lambda\in\Lambda^i\backslash\Lambda^{i-1}\}$ 分块，由 (7.204)，相应的 C 是分块下三角稀疏矩阵，其对角线上的矩阵块是单位矩阵的倍数。

谱基的条件数

以下仅就二维情况介绍 Oswald 分析谱条件数的技巧。为清楚起见，仅以双调和方程为例来讨论 C^1 谱基的条件数。

就有限元空间 S_m 而言，不难验证，对三角形 $\tau\in\Delta_m$（或 T_m），当 $g\in S_m$ 时，有

$$\|g\|_2^2(\tau)\cong 2^{-4m}\sum_{\lambda\in\Lambda^m(\tau)}|\lambda(g)|^2,\tag{7.205}$$

其中 $\Lambda^m(\tau)$ 是 Λ^m 中所有支集属于 τ 的元素的集合。由 Δ_m 的正规性，可知对所有 $g\in S_m$，有

$$\|g\|_2^2(\Omega)\cong 2^{-4m}\sum_{\lambda\in\Lambda^m}|\lambda(g)|^2,\quad m\geqslant 0.\tag{7.206}$$

设 $\mathscr{H}_m$ 是 S_m 的谱基，I_i 是按 (7.190) 定义的由 S_m 到 S_i 的投影算子，则 $g\in S_m$ 可表为

$$g=\sum_{j=0}^{m}\sum_{\lambda\in\Lambda^j\backslash\Lambda^{j-1}}y_{j,\lambda}B_\lambda^{(j)},$$

其中

$$y_{j,\lambda}=\lambda((I_j-I_{j-1})g),\quad\lambda\in\Lambda^j\backslash\Lambda^{j-1},\quad j\leqslant m.\tag{7.207}$$

注意到当 $g\in S_{j-1}$ 时，$\lambda((I_j-I_{j-1})g)=0$，从而由(7.206)和(7.207)可得

$$\sum_{j=0}^{m}\sum_{\lambda\in\Lambda^j\setminus\Lambda^{j-1}} y_{j,\lambda}^2\cong\|g\|_{(m)}^2, \tag{7.208}$$

其中

$$\|g\|_{(m)}^2:=\sum_{j=0}^{m}2^{sj}\|(I_j-I_{j-1})g\|_2^2(\Omega). \tag{7.209}$$

由命题 7.51 和(7.208)可得

命题 7.52 如果

$$\gamma_m\|g\|_{(m)}^2\leqslant\|g\|_{2,2}^2(\Omega)\leqslant\Gamma_m\|g\|_{(m)}^2, \tag{7.210}$$

则 $\mathscr{K}(H_m)=o\left(\frac{\Gamma_m}{\gamma_m}\right)$，$m\geqslant 0$。

为得到估计式(7.210)，针对空间串 $\{s_m\}_{m\geqslant 0}$ 和 $f\in L_p(\Omega)$，引入空间 $\Lambda_{p,q}^s\equiv\Lambda_{p,q}^s(\{S_m\})$。$f\in\Lambda_{p,q}^s$，$s>0$，$1\leqslant p$，$q\leqslant\infty$ 的充要条件是存在 $g_i\in S_i$，$i\geqslant 0$，使得在 L_p 意义下，

$$f=\sum_{i=0}^{\infty}g_i,\ \text{且}\ \{2^{is}\|g_i\|_{L_p}\}\in l_q, \tag{7.211}$$

这里 $\{a_i\}=(a_0,a_1,\cdots)$。将 $f\in\Lambda_{p,q}^s$ 赋予范数

$$\|f\|_{\Lambda_{p,q}^s}=\inf\|\{2^{is}\|g_i\|_{L_p}\}\|_{l_q}. \tag{7.212}$$

有关 $\Lambda_{p,q}^s$ 的详细研究，请见[192]，[193]和[194]。

命题 7.53 $f\in\Lambda_{p,q}^s$ 的充要条件是 $f\in E_{p,q}^s$，$s>0$，$1\leqslant p$，$q\leqslant\infty$，这里 $f\in E_{p,q}^s$ 是指 $f\in L_p$ 且 $\{2^{is}E_i(f)_p\}\in l_q$，其中

$$E_i(f)_p:=\inf_{g\in S_i}\|f-g\|_{L_p}.$$

而 $f\in E_{p,q}^s$ 的范数定义为

$$\|f\|_{E_{p,q}^s}:=\|f\|_{L_p}+\|\{2^{is}\|g_i\|_{L_p}\}\|_{l_q}. \tag{7.213}$$

证明 设 $f=\sum_{i\geqslant 0}g_i\in\Lambda_{p,q}^s$，并令 $g_m=\sum_{i=0}^{m}g_i$。则当 $0<t<1$ 且 $\bar{q}^{-1}+q^{-1}=1$ 时，有

$$\|f-g_m\|_{L_p}=\left\|\sum_{i\geqslant m+1}g_i\right\|_{L_p}\leqslant\sum_{i\geqslant m+1}\|g_i\|_p$$

$$\leqslant \left(\sum_{i\geqslant m+1} 2^{-\varepsilon s q' i}\right)^{q'^{-1}} \left(\sum_{i\geqslant m+1} 2^{\varepsilon s i q}\|g_i\|_{L_p}^q\right)^{q^{-1}}$$

$$\leqslant C_{\varepsilon,s,q} 2^{-\varepsilon s m} \left(\sum_{i\geqslant m+1} 2^{\varepsilon s q i}\|g_i\|_{L_p}^q\right)^{q^{-1}},$$

其中 $C_{\varepsilon,s,q} = 2^{-\varepsilon s}(1-2^{-\varepsilon s q'})^{-q'^{-1}}$ $(C_{\varepsilon,s,1} = \lim\limits_{q\to 1} C_{\varepsilon,s,q} = 2^{-\varepsilon s})$. 是故

$$\sum_{m\geqslant 0} (2^{ms}\|f-g_m\|_{L_p})^q \leqslant C \sum_{m\geqslant 0} 2^{(1-\varepsilon)sqm} \sum_{i\geqslant m+1} 2^{\varepsilon s i q}\|g_i\|_{L_p}^q$$

$$\leqslant C \sum_{i=1}^{\infty} 2^{\varepsilon s q i}\|g_i\|_{L_p}^q \sum_{m=0}^{i-1} 2^{(1-\varepsilon)sqm}$$

$$\leqslant C \sum_{i\geqslant 1} 2^{siq}\|g_i\|_{L_p}^q, \tag{2.214}$$

其中C是与ε有关的正常数，它在不同的地方可取不同的值．若特别取 $\varepsilon=\frac{1}{2}$，则有

$$\|f\|_{E^s_{p,q}} \leqslant C\|f\|_{\Lambda^s_{p,q}}, \tag{7.215}$$

其中C是仅依赖于s和q的正常数。

又设 $f\in E^s_{p,q}$，鉴于S_i是有限维的，因而存在 $g_i\in S_i$，使得 $\|f-g_i\|_{L_p} = E_i(f)_p$。令

$$\bar{g}_0 = g_0$$
$$\bar{g}_i = g_i - g_{i-1},\quad i\geqslant 1,$$

则易知 $f=\sum\limits_{i\geqslant 0}\bar{g}_i$，且

$$\sum_{i\geqslant 0} 2^{isq}\|\bar{g}_i\|_{L_p}^q \leqslant \|\bar{g}_0\|_{L_p}^q + \sum_{i\geqslant 1} 2^{isq}(2E_{i-1}(f)_p)^q$$
$$\leqslant 3^q\|f\|_{E^s_{p,q}}^q.$$

由上式和(7.215)知 $\Lambda^s_{p,q}\supseteq E^s_{p,q}$. □

为了建立空间 $\Lambda^s_{p,q}$ 与 Sobolev 空间 H^s 之间的关系，引入 Besov 空间 $B^s_{p,q}\equiv B^s_{p,q}(\Omega)$，$s>0$，$1\leqslant p$，$q\leqslant\infty$．设 $f\in L_p$，则 $f\in B^s_{p,q}$ 的充要条件是

$$\{2^{js}w_m(2^{-j},f)_p\}\in l_q,\tag{7.216}$$

其中 $m>s$，$w_m(t,f)_p=\sup_{|h|\leqslant t}\|\Delta_h^m f\|_{L_p}(\Omega_{m,t})$ 是 f 的 m 次连续模，$\Omega_{m,t}:=\{x\in\Omega|x+jh\in\Omega,\ 0\leqslant j\leqslant m,\ |h|\leqslant t\}$.此处 $h\neq 0$ 表示 $\mathbf{R}^2$ 中具有非负分量的向量，$|h|$ 是 h 的欧氏模．$f\in B^s_{p,q}$ 的范数定义为

$$\|f\|_{B^s_{p,q}}:=\|f\|_{L_p}+\|\{2^{js}w_m(2^{-j},f)_p\}\|_{l_q}.\tag{7.217}$$

由 Besov 空间的插值理论([193],[194])，当 $p\geqslant 1$ 时，

$$B^s_{p,\min(2,p)}\subset W^s_p\subset B^s_{p,\max(2,p)},\tag{7.218}$$

此处 $A\subset B$ 表示空间 A 可嵌入到 B 中，W^s_p 是 Sobolev 空间．由(7.218)及熟知的 Sobolev 空间理论，

$$B^s_{2,2}(\Omega)\cong W^s_2(\Omega)\cong H^s(\Omega).\tag{7.219}$$

引理 7.54 设 $s>0$，$1\leqslant p$，$q\leqslant\infty$，则有

$$B^s_{p,q}\subset\Lambda^s_{p,q},\quad 0<s<k+1,\tag{7.220}$$

$$\Lambda^s_{p,q}\subset B^s_{p,q},\quad 0<s<2+\frac{1}{p},\tag{7.221}$$

其中 k 是所论样条空间 $\{S_m\}$ 的次数（关于 PS 元，$k=2$；关于 HCT 及 VS 元，$k=3$；而关于 Argyris 元，$k=5$)．从而

$$\Lambda^s_{p,q}\cong B^s_{p,q},\quad 0<s<2+\frac{1}{p}.\tag{7.222}$$

证明 先证(7.220)式.首先建立 Jackson 型不等式

$$E_i(f)\leqslant C\cdot w_{k+1}(2^{-i},f)_p.\tag{7.223}$$

利用 Dahmen-DeVore-Scherer 的结果([195])，有

$$w_m(t,f)\cong\inf_{g\in W_p^m}(\|f-g\|_{L_p}+t^m\|D^m g\|_{L_p}),\quad t\to 0.\tag{7.224}$$

若我们还能证明

$$\|g-I_i g\|_{L_p}\leqslant C\cdot 2^{-i(k+1)}\|D^{k+1}g\|_{L_p},g\in W_p^{k+1},\tag{7.225}$$

则只要在(7.224)中令 $m=k+1$，即可由命题7.53证及(7.223)．

为证(7.225)，令 $p>1$，从而 $r+\frac{2}{p}<k+1$，其中 r 是

算子 I_i 中所用到的偏导数及方向导数中的最高次数. 由 Sobolev 嵌入定理, $W_p^{k+1}\subset C^r(\Omega)$, 从而 I_i 对所有 $g\in W_p^{k+1}$ 都有定义.设 q 是 k 次多项式,注意到 $I_iq=q$, 从而对 $g\in W_p^{k+1}$ 及任一三角形 $\tau\in T_i$, 均有

$$\|g-I_ig\|_{L_p(\tau)}\leqslant\|g-q\|_{L_p(\tau)}+\|I_i(g-q)\|_{L_p(\tau)}.\quad(7.226)$$

由 I_i 的定义及其局部性质,不难验证下面的不等式

$$\|I_i(g-q)\|_{L_p(\tau)}^p\leqslant C2^{-2i}\sum_{j=0}^{r}2^{ijp}\|D^j(g-q)\|_{C(\tau)}^p.$$

将 Sobolev 不等式

$$\|D^j(g-q)\|_{C(\tau)}\leqslant C2^{i\left(\frac{2}{p}-1\right)}(\|g-q\|_{L_p(\tau)}+2^{-i(k+1)}\|D^{k+1}g\|_{L_p(\tau)}),$$

$0\leqslant j\leqslant r$ 代入(7.226), 即得

$$\|g-I_ig\|_{L_p(\tau)}^p\leqslant C\inf_q(\|g-q\|_{L_p(\tau)}^p+2^{-ip(k+1)}\|D^{k+1}g\|_{L_p(\tau)}^p)$$

$$\leqslant C2^{-ip(k+1)}\|D^{k+1}g\|_{L_p(\tau)}^p,$$

这里及以下 C 均表示常数, 但允许 C 表示不同的常数值. 这就证明了(7.220).

为证(7.221)式,首先要证明下面的 Bernstein 型不等式

$$w_{k+1}(t,g)\leqslant C_s(\min\{1,2^it\})^{s+\frac{1}{p}}\|g\|_{L_p},g\in S_i.\quad(7.227)$$

当 $t\geqslant 2^{-i}$ 时,(7.227) 是显然的. 故不妨设 $t<2^{-i}$. 因 $g\in S_i$, 故得

$$g=\sum_{\lambda\in\Lambda^i}\lambda(g)B_\lambda^{(i)},$$

$$\Delta_h^{k+1}g=\sum_{\lambda\in\Lambda^i}\lambda(g)\Delta_h^{k+1}B_\lambda^{(i)}.$$

因为 g 在 T_i 中的每个三角形上都是次数 $\leqslant k$ 的多项式,故有

$$\text{meas}(\text{supp}\,\Delta_h^{k+1}B_\lambda^{(i)})\leqslant C2^{-i}t,\quad |h|<t.$$

由此可得,当 $|h|<t$ 时

$$\|\Delta_h^{k+1}g\|_{L_p}^p\leqslant C\sum_{\lambda\in\Lambda^i}|\lambda(g)|^p\|\Delta_h^{k+1}B_\lambda^{(i)}\|_{L_p}^p$$

$$\leqslant C\sum_{\lambda\in\Lambda^i}|\lambda(g)|^p\text{meas}(\text{supp}\Delta_h^{k+1}B_\lambda^{(i)})(|h|^2\|D^2B_\lambda^{(i)}\|_{L_\infty})^p$$

$$\leqslant C\sum_{\lambda\in\Lambda^i}|\lambda(g)|^p t^{2p+1}2^{(p-1)i}$$

$$\leqslant C((2^i t)^{2+\frac{1}{p}}\|g\|_{L_p})^p.$$

最后一步我们用到了(7.206)在 L_p 情况下的公式

$$\|g\|_{L_p}^p\cong 2^{(p+2)i}\sum_{\lambda\in\Lambda^i}|\lambda(g)|^p,\ g\in S_i.$$

从而完成了(7.227)的证明．由此不难进一步证明(7.221)．□

由(7.219),(7.222)及命题7.52可知,为得到谱基条件数的估计,只需立 $\|\cdot\|_{(m)}$ 和 $\|\cdot\|_{\Lambda_{2,2}^2}$ 之间的关系．

设 $g=\sum\limits_{i=0}^m g_i\in S_m, g_i\in S_i$，则

$$\begin{aligned}\|g\|_{(m)}^2=&\left\|g_0+I_0\left(\sum_{j=1}^m g_j\right)\right\|_2^2(\Omega)\\&+\sum_{j=1}^m 2^{4j}\left\|g_j+I_j\left(\sum_{i=j+1}^m g_i\right)\right.\\&\left.-I_{j-1}\left(\sum_{i=j}^m g_i\right)\right\|_2^2(\Omega)\\\leqslant& C\left(\sum_{j=0}^m 2^{4j}\|g_j\|_2^2(\Omega)\right.\\&\left.+\sum_{j=0}^m 2^{4j}\left\|I_j\left(\sum_{i=j+1}^m g_i\right)\right\|_2^2(\Omega)\right)\\:=&C(\Sigma_1+\Sigma_2).\end{aligned}$$

由(7.206),有

$$\Sigma_2\leqslant C\sum_{i=0}^m\sum_{\lambda\in\Lambda^i}\left|\lambda\left(\sum_{j=i+1}^m g_j\right)\right|^2.$$

若记 Λ_d^i 为 Λ^i 中所有 d 次线性泛数的集合,则当 $\lambda\in\Lambda_d^i$ 时,

$$\begin{aligned}\left|\lambda\left(\sum_{j=i+1}^m g_j\right)\right|^2&=\left\|\sum_{j=i+1}^m 2^{-\alpha_d(j-i)}2^{\alpha_d(j-i)}\lambda(g_j)\right\|^2\\&\leqslant\left(\sum_{j=1}^{m-i}2^{-\alpha_d j}\right)\left(\sum_{j=i+1}^m 2^{2\alpha_d(j-i)}|\lambda(g_j)|^2\right).\end{aligned}$$

令 $\alpha_d = 1 - d$，$d \geqslant 1$ 及 $\alpha_0 = \frac{1}{2}$，则有

$$\left|\sum_{j=i+1}^{m} \lambda(g_j)\right|^2 \leqslant C \begin{cases} \sum\limits_{j=i+1}^{m} 2^{j-i} |\lambda(g_j)|^2, & d = 0, \\ (m-i) \sum\limits_{j=i+1}^{m} |\lambda(g_j)|^2, & d = 1, \\ 2^{2(d-1)(m-i)} \sum\limits_{j=i+1}^{m} 2^{2(1-d)(j-i)} |\lambda(g_j)|^2, & d \geqslant 2. \end{cases} \tag{7.228}$$

将上式代入 Σ_2 中得

$$\begin{aligned} \Sigma_2 \leqslant C \sum_{i=0}^{m} \Bigg[& \sum_{\lambda \in \Lambda_0^i} \sum_{j=i+1}^{m} 2^{(j-i)} |\lambda(g_j)|^2 + \sum_{\lambda \in \Lambda_1^i} (m-i) \\ & \times \sum_{j=i+1}^{m} |\lambda(g_j)|^2 + \sum_{d=2}^{r} \sum_{\lambda \in \Lambda_d^i} 2^{2(d-1)(m-i)} \\ & \times \sum_{j=i+1}^{m} 2^{2(1-d)(j-i)} |\lambda(g_j)|^2 \Bigg]. \end{aligned}$$

注意到当 $\lambda = 2^{i(1-d)} p(D) \in \Lambda_d^i$ 时，$\bar{\lambda} = 2^{j(1-d)} p(D) = 2^{(j-i)(1-d)} \lambda \in \Lambda_d^j (j \geqslant i)$，因而有

$$\begin{aligned} \Sigma_2 \leqslant C \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=i+1}^{m} \Bigg[& 2^{i-j} \sum_{\lambda \in \Lambda_0^j} |\lambda(g_j)|^2 + (m-i) \sum_{\lambda \in \Lambda_1^j} |\lambda(g_j)|^2 \\ & + \sum_{d=2}^{r} 2^{2(d-1)(m-i)} \sum_{\lambda \in \Lambda_d^j} |\lambda(g_j)|^2 \Bigg] \\ = C \sum_{j=1}^{m} 2^{4j} \Bigg[& \sum_{i=0}^{j-1} 2^{i-j} \sum_{\lambda \in \Lambda_0^j} 2^{-4j} |\lambda(g_j)|^2 + \sum_{i=0}^{j-1} (m-i) \\ & \times \sum_{\lambda \in \Lambda_1^j} 2^{-4j} |\lambda(g_j)|^2 + \sum_{d=2}^{r} \left(\sum_{i=0}^{j-1} 2^{2(d-1)(m-i)} \right) \\ & \times \sum_{\lambda \in \Lambda_d^j} 2^{-4j} |\lambda(g_j)|^2 \end{aligned}$$

$$\leqslant C\eta_m(r)\sum_{j=1}^{m}2^{4j}\|g_j\|_2^2(\Omega),$$

其中

$$\eta_m(r):=\begin{cases}m^2, & r=1,\\ 2^{2(r-1)m}, & r\geqslant 2,\end{cases}$$

且最后一步用到了(7.206)式。再回到(7.228)式,就得到了

$$\|g\|_{(m)}^2\leqslant C\eta_m(r)\|g\|_{A_{2,2}^2}^2. \tag{7.229}$$

另一方面,显然有

$$\|g\|_{A_{2,2}^2}^2\leqslant\|g\|_{(m)}. \tag{7.230}$$

结合(7.219),(7.222),(7.229)及命题7.52,我们有

定理 7.55 PS 元, HCT 元, VS 元及 HCT 元和 VS 元组成的混合元的谱条件数均为

$$\mathscr{K}(H_m)=O(m^2)=O((\log h^{-1})^2),$$

而 Argyis 元的谱条件数为

$$\mathscr{K}(H_m)=O(2^{2m})=O(h^{-2}).$$

由定理 7.55 不难看出，当投影算子 I_i 中包含次数高于空间 S_i 的光滑度的偏导数或方向导数时，其谱条件数将本质地增大。此外空间 $S_m=S_1^0(\Delta_m)$ 的谱条件数也是 $O((\log h^{-1})^2)$ 阶的。 Yserentant[188] 和 Oswald 分别举例说明上述谱条件数的阶是精确的,从而也是不可改进的。

BPX 谱条件数

Bramble-Pasiak-Xu 改进了 Yserentant 的结果 ([190]). 使用 BPX 技巧用谱基求解调和方程时,在某些情况下,其谱条件数的阶为 $\log h^{-1}$, 而且他们的方法对某些高维情形也是适用的。以下我们不加证明地介绍他们的主要结果。

设 $A(u,v)$ 是强椭圆型算子 L 定义的双线性形式，$\{\Delta_m\}_{m>0}$ 是一三角剖分串，$\{S_m\}_{m>0}$ 是 $\{\Delta_m\}_{m>0}$ 上的分片线性空间。又设 P_k,Q_k 和 A_k 分别是由下式定义的算子:

$$P_k:\ S_m\to S_k,\ \ k\leqslant m,$$

$$A(P_ku,v)=A(u,v),\ \ \forall u\in S_m,\forall v\in S_k;$$

$$Q_k:\ S_m \to S_k,\ k \leqslant m$$

$$(Q_k u, v) = (u, v),\ \forall u \in S_m,\ \forall v \in S_k;$$

$$A_k:\ S_k \to S_k$$

$$(A_k u, v) = A(u, v),\ \forall u,\ v \in S_k.$$

当 $k = m$ 时，记 $A_m = A$. 定义算子

$$B := \sum_{i=0}^{m} \lambda_i^{-1}(Q_i - Q_{i-1}),$$

其中 $Q_{-1} = 0$，λ_i 为 A_i 的谱半径. 若再设

(A1) $\|(I - Q_{i-1})v\|_2^2 \leqslant C_1 \lambda_i^{-1} A(v, v), v \in S_m$.

则有

$$C_1^{-1} m^{-1} A(v, v) \leqslant A(BAv, v) \leqslant mA(v, v).$$

从而

$$\mathscr{K}(BA) = O(m^2).$$

记 $\bar{B}$ 是由下式定义的矩阵

$$\bar{B} = \sum_{i=0}^{m} R_i Q_i,$$

其中假定 R_i 满足

(A2) $C_2 \lambda_i^{-1} \|v\|_2^2 \leqslant (R_i v, v) \leqslant C_3 (A_k^{-1} v, v)$， $\forall v \in S_k$，$k \leqslant m$.

进一步假设 A_k 和 P_k 对某 $\alpha \in (0, 1]$ 满足

(A3) $A((I - P_{k-1})v,\ v) \leqslant (C_4 \lambda_k^{-1} \|A_k v\|^2)^\alpha A(v,\ v)^{1-\alpha}$，$\forall v \in S_k$.

定理 7.56 若假定 (A2) 和 (A3) 成立，则 $\forall v \in S_m$ 成立

$$C_4^{-1} C_2 m^{1-\frac{1}{\alpha}} A(v, v) \leqslant A(\bar{B}Av, v) \leqslant C_3 m A(v, v).$$

从而

$$\mathscr{K}(\bar{B}A) = O(m^\beta),$$

其中 $\beta = \min\{2, \alpha^{-1}\}$.

特别地，当 $\alpha = 1$ 时，$\mathscr{K}(\bar{B}A) = O(m)$.

关上面的 (A1)—(A3)，假定 (A1) 是容易满足的. 只要适当地选取 R_k（例如取 $R_k = \lambda_k^{-1} I$），则 (A2) 也是容易满足的. 由 [196], [197] 中的结果知总存在 $\alpha \in (0, 1]$ 使 (A3) 成立. 当 Ω

凸且 L 中的系数光滑时，$\alpha=1$. 从而此时 $\mathscr{K}(\bar{B}A)=O(m)$.

今提出以下公开问题:

问题 7.57 如何构造三维以上的 c^1 光滑谱基，其谱条件数不劣于 $O((\log h^{-1})^d)$，其中 d 为某自然数? 或者退而言之，如何构造条件数不劣于 $O(h^{-1})$ 的谱基?

问题 7.58 如何寻求适当的矩阵 B(比如正定、稀疏等)，使得 $\mathscr{K}(BA)=o(1)$.

问题 7.59 如何将本节中的方法应用到求解其它类型的偏微分方程中去?

参 考 文 献

[1] 王仁宏，多元齿的结构与插值，数学学报，18(1975)，91—106.

[2] 王仁宏，任意剖分下的多元样条分析，中国科学，数学专辑 I，1979，215—226.

[3] 檀结庆，多元有理插值与逼近，吉林大学博士论文，1990.

[4] 王仁宏，任意剖分下的多元样条分析(II)-空间形式，高等学校计算数学学报，1(1980)，78—81.

[5] R. H. Wang, The dimension and basis of spaces of multivariate splines, J. Comp. Appl. Math., 12&13(1985), 163—177.

[6] C. K. Chui and R. H. Wang, Multivariate spline spaces, J. Math. Anal. Appl., 94(1983), 197—221.

[7] L. L. Schumaker, On the dimension of spaces of piecewise polynomials in two variables, in "Multivariate Approximation Theory", W. Schempp and K. Zeller (eds.), pp. 396—412, Birkhauser, Basel, 1979.

[8] 王毅沈，关于异度样条函数空间，东北数学，2(1986)，66—71.

[9] 王仁宏，何天晓，拟贯穿剖分下多元样条空间基，中国科学，A辑，1(1986)，19—25.

[10] C. K. Chui and R. H. Wang, On smooth multivariate spline functions, Math. Comp., 41(1983), 131—142.

[11] P. O. Fredrickson, Generalized triangular splines, Lakehead Universit Math. Report, No. 7—71, 1971.

[12] C. K. Chui and R. H. Wang, Bases of bivariate spline spaces with cross-cut grid partitions, 数学研究与评论，1(1982)，1—3.

[13] C. K. Chui and R. H. Wang, A generalization of univariate splines with equally spaced knots to multivariate splines, ibid, 2(1982), 99—104.

[14] C. K. Chui and R. H. Wang, Spaces of bivariate cubic and quartic splines on type-1 triangulations, J. Math. Anal. Appl., 101(1984), 540—554.

[15] C. K. Chui and R. H. Wang, Bivariate cubic B-splines relative to cross-cut triangulation, Chin. Ann. Math., 4B(4) (1983), 509—523.

[16] C. de Boor, Splines as linear combination of B-splines, in "Approximation Theory II", G. G. Lorentz, C. K. Chui and L. L. Schumaker (eds.), Acad. Press, New York, 1976, 1—47.

[17] C. de Boor and K. Höllig, Bivariate box splines and smooth pp function on a three direction mesh, J. Comp. Appl. Math., 9(1983), 13—28.

[18] 张绍良，$S_3^1(\Delta_{mn}^{(2)})$ 空间的拟插值，吉林大学学士论文，1983年。

[19] 孙家昶，可三向剖分上 S_3^1 空间的 B 样条对偶基与拟插值。应用数学学报，14(1991)，470—477.

[20] 王仁宏，崔锦泰，关于一个二元 B 样条基，中国科学，A 辑，9(1984)，784—795.

[21] P. Zwart, Multivariate splines with non-degenerate partitions, SIAM J. Numer. Anal., 10(1973), 665—673.

[22] C. K. Chui, T. X. He and R. H. Wang, The C^2 quartic splines spaces on

a four-directional mesh. Approx. Theory Appl., 3:4(1987), 32—36.

[23] C. K. Chui and R. H. Wang, Bivariate B-splines on triangulated rectangles, in "Approximation Theory IV", C. K. Chui, L. L. Schumaker and J. D Ward (eds.), Acad. Press, New York, 1983, 413—418.

[24] C. K. Chui and R. H. Wang, Concerning C^1 B-splines on triangulations of non-uniform rectangular partition, Approx. Theory Appl., 1:1(1984), 11—18.

[25] L. L. Schumaker, Bounds on the dimension of spaces of multivariate piecewise polynomials, Rocky Mount. J. Math., 14(1984), 251—264.

[26] 王仁宏,关于多元样条空间的维数,科学通报, 6 (1988),473—474.

[27] C. K. Chui and R. H. Wang, Multivariate B-splines on triangulated rectangles. J. Math. Anal. Appl., 92(1983), 533—551.

[28] 王绍铭,非均匀 2-型剖分上的二元 3 次样条函数空间, 吉林大学数学所硕士论文, 1987.

[29] Shao-Ming Wang, Spline interpolation over type-2 triangulations, Applied Mathematics and Computation, 49(1992), 299—313.

[30] Shao-Ming Wang and Chung-Lie Wang Smooth interpolations on some triangulations, Utilitas Mathematica, 41(1992), 309—317.

[31] P. Sablonnière Bases de Betustein et approximants splines, Diss. L. Univer-site' de Lille, 1982.

[32] C. K. Chui, T. X. He and R. H. Wang, The C^2 quartic spline space on a four-directional mesh. Approx. Theory Appl., 3:4(1987), 32—36.

[33] C. K. Chui, L. L. Schumaker and R. H. Wang, Onspaces of piecewise polynomials with boundary conditions II. Type-1 triangulations, Canadian Mathematical Society Conf. Proceedings, 3(1983), 51—66.

[34] C. K. Chui, L. L. Schumaker and R. H. Wang, On spaces of piecewise polynomials with boundary conditions III. Type-2 triangulations, Canadian Mathematical Society Conf. Proceedings, 3(1983), 67—80.

[35] 王仁宏,何天晓,不均匀第二型三角剖分下的带有边界条件的样条函数空间,科学通报,第 4 期(1985),249—251.

[36] 王仁宏,卢旭光,关于三角剖分下二元样条空间的维数,中国科学, A 辑, No. 1 (1988),585—594.

[37] P. Alfeld and L. L. Schumaker, The dimension of bivariate spline spaces of smoothness r and degree $d \geqslant 4r+1$, Constr. Approx., 3(1987), 189—197.

[38] P. Alfeld, B. Piper and L. L. Schumaker, Minimally supported bases for spaces of bivariate picewise polynomials of smoothness r and degree $d \geqslant 4r+1$, CAGD, 4(1987), 105—123.

[39] Y. S. Chou, L. Y. Su and R. H. Wang, The dimensions of bivariate spline spaces over triangulations, in "Multivariate Approximation Theory III", W. Schempp & K. Zeller (eds.), Birkhäuser, Basel, 1985, 71—83.

[40] P. Alfeld, B. Piper and L. L. Schumaker, An explicit basis for C^1 quartic bivariate splines, SIAM J. Numer. Anal., 24(1985), 891—911.

[41] G. G. Lorentz, K. Jetter and S. D. Riemenschneider, Birkhoff interpolation, Addison-Wesley, 1984.

[42] G. Nürnberger. Approximation by spline functions, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg 1989.

[43] W. Whiteley, The combinatorics of bivariate splines, DIMACS Series in Discrete Math. and Computer Science, 4(1991), 587—608.

[44] 王仁宏,梁学章,多元函数逼近,科学出版社,1988,北京.

[45] H. B. Curry and I. J. Schoenberg, On Pólya frequency functions and their limits, J. d'Analyse Math. 17(1966), 71—107.

[46] C. de Boor, Topics in multivariate approximation theorey, in "Topics in Numerical Analysis", P. R. Turner (ed.), Lecture Notes Mathematics, Springer-Verlag, 965(1982), 39—78.

[47] W. Dahmen and C. A. Micchelli, Recent progress in multivariate splines, interpolating *cardinal splines as their degree rends* to infinity, Israel J. Ward (eds.), Academic Press, 1983, 27—121.

[48] 贾荣庆,箱样条研究的新进展,高校应用数学学报,2(1987)330—343.

[49] C. A. Micchelli, A constructive approach to Kergin interpolation in R^k: Multivariate B-splines and Lagange interpolation, Rocky Mountain J. Math., 10(1980), 485—497.

[50] C. de Boor and R. DeVore, Approximation by smooth multivariate splines, Trans. Amer. *Math. Soc., 276(1983), 775—788.*

[51] W. Dahmen, On multivariate B-splines, SIAM J. Numer. Anal., 17(1980), 179—191.

[52] K. Höllig, Box splines, in "Approximation Theorey", V. C. K. Chui, L. L. Schumaker and J. Ward (eds.), Academic Press, New York, 1986, 71—95.

[53] C. de Boor and K. Höllig, B-splines from parallelepipeds, J. d'Anal. Math., 42(1982/1983), 99—115.

[54] C. A. Micchelli, On a numerically efficient method for computing multivariate B-splines, in "Multivariate Approximation Theory", W. Schempp and K. Zeller (eds.), *Birkhäuser*, Basel, 1979, 211—248.

[55] W. Dahmen and C. A. Micchelli, Subdivision algorithms for the generation of box spline surfaces, CAGD, 1(1984), 115—129.

[56] E. Cohen, T. Lyche and R. Riesenfeld, Discrete box splines and refinement algorithms, CAGD, 1(1984), 131—148.

[57] W. Dahmen and C. A. Micchelli, Line averaging algorithm: A method for the computer generation of smooth surfaces, CAGD, 2(1985), 77—85.

[58] W. Dahmen and C. A. Micchelli, Algebraic properties of discrete box splines, Constr. Approx., 3(1987), 209—221.

[59] R. Q. Jia, Linear independence of translates of multivariate splines, Linear Algebra Appl., 52/53(1983), 217—234.

[60] I. J. Schoenberg, Notes on *spline functions* III, On the convergence of the interpolating cardinal splines as their degree tends to infinity, Israel J. Math., 16(1973), 87—93.

[61] C. de Boor, K. Höllig and S. D. Riemannschneider, Convergence of cardinal series, Proc. Amer. Math. Soc., 98(1986), 457—460.

[62] C. de Boor and K. Höllig, Approximation order from bivariate C^1-cubics A counterexample, Proc. Amer. Math. Soc., 87(1983), 649—655.
[63] C. de Boor and K. Höllig, Bivariate box splines and smooth functions on a three-direction mesh, in "Approximation Theorey IV", 1983, 539—546.
[64] R. Q. Jia, Approximation by smooth bivariate splines on a three-direction mesh, in "Approximation Theory IV", 1983, 539—546.
[65] R. Q. Jia, Approximation order from certain spaces of smooth bivariate splines on a three-direction mesh, Trans. AMS, 295(1986), 199—212.
[66] W. Dahmen and C. A. Micchelli, On the optimal approximation rates for criss-cross finite element spaces, J. Comp. Appl. Math., 10(1984), 255—273.
[67] L. Bamberger, Zweidimensionale splines auf regularen triangulationen, Dissertation, Univ. of München, 1985.
[68] W. Dahmen and C. A. Micchelli, On multivariate B-splines, IBM Research Report, 1987.
[69] G. G. Lorentz, Bernstein Polynommials, Torento, 1953.
[70] C. de Boor, B-form basics, in "Geometric Modelling", G. Farin (ed.) SIAM Philadelphia, 131—148.
[71] G. Farin, Triangular Bernstein-Bézier patches, CAGD, 3(1986), 83—127.
[72] 郭竹瑞，贾荣庆，多元样条研究中的 B-网方法，数学进展，19(1990)，189—198。
[73] 周建伟，三角域上 Bernstein 多项式的正性和凸性，计算数学，8(1986)，185—190。
[74] G. Farin, Bézier polynomials over triangles and the construction of piecewise C^r polynomials, TR/91, Dept. of Math., Brunel Univ., Uxbridge, Middlesex, U. K., 1980.
[75] E. Stärk, Mehrfach differenzierbare Bézierkurven und Bézierflächen, Dissertation, Technical Univ. Braunschweg, FRG, 1976.
[76] G. Chang and P. J. Davis, The convexity of Bernstein polynomials over triangles, J. Approx. Th., 40(1984), 11—28.
[77] G. Chang and Y. Feng, An improved condition for the convexity of Bernstein-Bézier surfaces over triangles, CAGD, 1(1984), 279—283.
[78] G. Chang and Y. Feng, A new proof for the convexity of the Bernstein-Bézier surfaces over triangles, Chinese Ann. Math., 6B(1985), 173—176.
[79] 罗笑南，计算机辅助几何设计中的曲线曲面，大连理工大学博士论文，1992。
[80] R. H. Wang, T. X. He, X. Y. Liu and S. C. Wang, An integral method for constructing bivariate spline functions, J. Comp. Math., 7(1989), 244—261.
[81] 施锡泉，高维样条，吉林大学博士论文，1988。
[82] 施锡泉，一种多元样条插值方法，高等学校计算数学学报，2(1990)，142—149。
[83] P. Alfeld, The Multivariate Spline Newsletter, No. 1, 1987.
[84] X. Q. Shi, The singularity of Morgan-Scott triangulation, CAGD, 8(1991), 201—206.
[85] X. Q. Shi, The dimensions of spline spaces and their singularity, J. Comp. Math., 10(1992), 224—230.
[86] D. Hong, Spaces of bivariate spline functions over triangulation, Approx

Theory Appl., 7(1991), 56—75.

[87] X. Q. Shi, The dimension of the spline space $S_k^\mu(\Delta_n)(k\geq 2^{n-1}(3\mu+1)+1)$ Chinese Science Bulletin, 37(1992), 436—437.

[88] R. H. Wang and X. Q. Shi, A kind of cubic C^1 interpolations in the n-dimensional finite element method. J. Math. Res. and Exp., 9(1989), 171—179.

[89] X. Q. Shi and R. H. Wang, The existence conditions of space $S_2^1(\Delta_n)$, Chinese Science Bullutein, 34(1989), 2015.

[90] A. J. Worsey and G. Farin, An n-dimensional Clough-Tocher interpolant, Constr. Approx., 3(1987), 99—110.

[91] P. Alfeld, B. Piper and L. L. Schumaker, Spaces of bivariate splines on triangulations with holes, Approx. Theory Appl., 3(1987), 1—10.

[92] 罗钟铉，非线性样条函数研究，大连理工大学博士论文，1991.

[93] E. L. Wachspress, A bational basis for function approximation, J. Inst. Maths. Applics., 8(1971), 57—68.

[94] E. L. Wachspress, A rational basis for function approximation II. curved sides, J. Inst. Maths. Applics., 11(1973), 83—104.

[95] E. L. Wachspress, Algebraic-fundation for finite element computation, in "Lecture Notes in Mathematics", 363(1974), 177—188.

[96] E. L. Wachspress, A rational basis for finite elements, Academic Press, 1975.

[97] G. Birkhoff and L. Mansfield, Compatible triangular finite elements, Numer. Math., 47(1974), 531—553.

[98] L. Mansfield, Higher order compatible triangular finite elements, Numer. Math., 22(1974), 89—94.

[99] E. L. Wachspress, Polynomials bases for algebraic elements, Comp. Math. Applics., 22(1991), 1—9.

[100] E. L. Wachspress, C^1-rational finite elements, Comp. Math. Applics., 22 (1991), 11—16.

[101] P. L. Powar and R. Rao, A counterexample of the construction of C^1-rational finite element due to Wachspress, Comp. Math. Applics., 22(1991), 17—22.

[102] H. P. Dirkshit and A. Ojha, Dimensions of spaces of Wachspress type C^1-rational finite elements, Comp. Math. Applics., 22(1991), 23—26.

[103] J. L. Gout, Construction of a Hermite rational "Wachspress type" finite element, Comp. Math. Applics., 5(1979), 337—347.

[104] B. L. 范德瓦尔登，代数学，丁石孙等译，科学出版社，1978.

[105] R. Hartshorne, Algebraic Geometry, Springer-Verlag, New York, 1977.

[106] R. J. Walker, Algebraic Curves, Princeton University Press, Pronceton, NJ, 1950.

[107] O. Zariski, and P. Samuel, Commutative Algebra (Vol. II), Springer-Verlag, 1985.

[108] W. N. Waggenspack and D. C. Anderson, Piecewise parametric approximations for algebraic curves, CAGD, 6(1989), 33—53.

[109] C. L. Bajaj, Surface fitting using implicit algebraic surface patches, Curve and Surface Modeling (ed.), H. Hagon, SIAM Publications, 1991.
[110] C. L. Bajaj, Geometric modelling with algebraic surfaces, The Mathematics of Surfaces III, D. C. Handscomb (ed.), Clarendon Press Oxford, 1989.
[111] D. Manocha and J. F. Canny, Algorithm for implicitizing rational parametric surfaces. CAGD. 9(1992), 25—50.
[112] S. S. Abhyankar and C. L. Bajaj, Automatic parameterization of rational curves and surfaces I: Conics and conicoids. CAD. 19(1987), 11—14.
[113] S. S. Abhyankar and C. L. Bajaj, Automatic parameterization of rational curves and surfaces II: Cubics and cubicoids, Computer Aided Design, 19 (1987), 499—502.
[114] S. S. Abhyankar and C. L. Bajaj, Automatic parameterization of rational curves and surfaces III: Algebraic plane cueves, CAGD, 5(1988), 309—321.
[115] S. S. Abhyankar and C. L. Bajaj, Automatic parameteriation of rational curves and surfaces IV: Algebraic plane curves, ACM Transaction on Graphics, 8(1989), 325—334.
[116] T. W. Sederberg, Improper parameterization of rational curves, CAGD, 3 (1986), 67—75.
[117] T. W. Sederberg, Planar piecewise algebraic curves, CAGD, 1(1984), 241—255.
[118] T. W. Sederberg, D. C. Anderson and R. N. Goldman, Implicit representation of parametric curves and surfaces, Computer Vision Graphics and Image Processing 28(1984), 72—84.
[119] T. W. Sederberg, Piecewise algebraic surface patches, CAGD, 2(1985), 53—59.
[120] T. Garrity and J. Warren, Geometric continuity, CAGD, 8(1991), 51—65.
[121] Z. X. Luo and R. H. Wang, Structure and application of algebraic spline curve and surface, J. Math. Res. & Exp., 12(1992), 579—582.
[122] 苏志勋，分片代数曲线曲面及其在 CAGD 中的应用，大连理工大学博士论文 1993.
[123] J. Li, J. Hoschek and E. Hartmann, G^{n-1}-functional splines for interpolation and approximation of curves, surfaces and solids, CAGD, 7(1990), 209—220.
[124] J. Warren, Blending algebraic surfaces, ACM Transaction on Graphics, 8(1989), 263—278.
[125] R. E. Barnhill, G. Farin, M. Jordan and B. R. Piper, Surface/Surface intersection, CAGD, 4(1987), 3—16.
[126] T. W. Sederberg and T. Nishita, Geometric Hermite approximation of surface patch intersection curves, CAGD, 8(1991), 97—114.
[127] R. E. Barnhill, Surface in the computer aided geometric design: a survey with new results, CAGD, 2(1985), 1—17.
[128] W. Boehm, G. Farin and J. Kahmann, A survey of curves and surface methods in CAGD, CAGD, 1(1984), 1—60.
[129] 周蕴时，苏志勋等，计算机辅助几何设计中的曲线曲面，吉林大学出版社，1993.
[130] I. D. Faux and M. J. Pratt, Computational geometry for design and manu-

facture, Ellis Horwood, 1979.
[131] J. M. Hahn, Geometric continuous patch complexes, CAGD, 6(1989), 55—57.
[132] W. Boehm, On the definition of geometric continuous, CAD, 20(1988), 370—372.
[133] G. Nürnberger and T. Riessinger, Lagrange and Hermite interpolation by bivariate splines, Fakultat fur Methmatik und Informatic Universitat Mannheim, Nr. 109, 1990.
[134] 苏步青,刘鼎元,计算几何,上海科学技术出版社,1981.
[135] 冯康,基于变分原理的差分格式,应用数学与计算数学,第二卷 4 期 (1965), 238—262.
[136] A. Ženíšek, Interpolation polynomials on the triangle, Numer. Math., 15 (1970), 283—296.
[137] V. L. Smirnov, A course in higher mathematics, Vol. V, English translation, Oxford: Pergamon Press, 1964.
[138] A. Ženíšek, A general theorem on trangular finite C^m element, RAIRO Anal. Numer., 2(1974), 119—127.
[139] A. Le Mehaute, Taylor interpolation of order n at the vartices of a triangle, Application for Hermite Interpolation and Finite Elements, in "Approximation Theory and Application", Z. Ziegler (ed.), Acad. Press, New York, 1981, 171—185.
[140] J. Morgan and R. Scott, A nodal basis for C^1-piecewise polynomials of degree $n \geqslant 5$, Math. Comp., 29(1975), 736—740.
[141] J. M. Carnicer and M. Gasca, On finite element interpolation problems, Math. Methods in CAGD, T. Lyche and L. L. Schumaker (eds.), North-Holland, 1989, 105—113.
[142] P. G. 西阿莱著,有限元素法的数值分析,蒋尔雄等译,上海科学出版社,1984.
[143] R. W. Clough and J. L. Tocher, Finite element stiffness matrics for analysis of plates in bending, Proc. Conf. on Matrics Methods in Structural Mechanics, Wright-Patterson, A. F. B., Ohio, 1965.
[144] P. Percell, On cubic and quartic Clough-Tocher finite elements, SIAM J. Numer. Anal., 13(1976), 100—103.
[145] P. Sablonnière, Composite finite elements of class C^k, in "Topics in Multivariate Approximation", C. K. Chui, L. L. Schumaker and F. I. Ucreras (eds.), Academic Press, New York, 1987, 207—217.
[146] P. Sablonnière, Composite finite elements of class C^k, J. Comp. Appl. Math., 12&13(1985), 541—550.
[147] M. J. D. Powell and M. A. Sabin, Piecewise quadratic approximations on triangles, ACM Translations on Mathematical Software, 3(1977), 316—325.
[148] R. H. Wang, W. B. Wang, S. M. Wang and X. Q. Shi, The C^1-Quadratic spline spaces on triangulations, 应用数学,第 1, 2 期(1988),123—132.
[149] P. Dierckx, S. Van Leemput and T. Vermeire, Algorithms for surface fitting using Powell-Sabin splines, IMA J. Numer. Anal., 12(1992), 271—299.
[150] R. H. Wang and X. Q. Shi, $S^{\mu}_{\mu+1}$ surface interpolations over triangulations

in Approx. Optim. Comp.: Theory and Applications, A. G. Law and C. L. Wang (eds.), North-Holland, IMACS, 1990, 205—208.

[151] O. C. Zienkiewicz, The finite element method (third edition), McGraw-Hill, 1977.

[152] M. Laghchim-Lahlou and P. Sablonnière, Composite quadrilateral finite elements of class C^r, Mathematical Methods in CAGD, T. Lyche and L. L. Schumaker (eds.), 1989, 413—418.

[153] 战荫伟，多元样条局部插值问题研究，大连理工大学博士论文，1992.

[154] P. Alfeld, A bivariate C^2 Clough-Tocher scheme, CAGD, 1(1984), 257—267.

[155] D. Liu and J. Hoschek, GC^1 continuity conditions bewteen adajcent rectangular and triangular Bézier surface patches, CAD, 21(1989), 194—200.

[156] D. Liu, GC^1 continuity conditions between two adajcent rational Bézier surface patches, CAGD, 7(1990), 209—220.

[157] 刘鼎元，Bézier 曲面片光滑连接的几何条件，应用数学学报，9(1986)，432-442.

[158] T. D. DeRose, Necessary and sufficient conditions for tangent plant continuity of Bézier surfaces, CAGD, 7(1990), 165—179.

[159] E. H. Michael and A. B. Arian, Rational continuity: Parametric, geometric, and Frenet frame continuity of rational curves, ACM Transactions on Graphics, 8(1989), 335—359.

[160] H. Pottmann, Projectively invariant classes of geometric continuity for CAGD, CAGD, 6(1989), 307—321.

[161] X. Q. Shi and R. H. Wang, Geometric continuity on curves and surfaces, in: Approx. Optim. Comp.: Theory and Applications, A. G. Law and C. L. Wang (eds.), North-Holland, IMACS, 1990, 163—164.

[162] J. A. Gregory and J. M. Hahn, Geometric continuity and convex combination patches, CAGD, 4(1987), 79—89.

[163] 马利庄，曲面几何连续及其应用，博士论文，浙江大学，1991.

[164] X. Q. Shi and T. J. Wang, A GC^1 cubic interpolation on a space mesh, Chiense Science Bulletin, 36(1991), 1755.

[165] S. A. Coons, Surface for computer aided design of space form, Massachusetts Institute of Technology, 1964 (revised in 1967 as MAC-TR 41).

[166] B. Sarkar and C. H. Meng, Parameter optimization in approximating curves and surfaces to measurement data, CAGD, 8(1991), 267—299.

[167] M. J. Pratt, Smooth parametric surface approximations to discrete data, CAGD, 2(1985), 165—171.

[168] J. Hoschek, Spline approximation of offset curves, CAGD, 5(1988), 33—40.

[169] J. Hoschek, F. J. Schneider and P. Wassum, Optimal approximation conversion of spline surface, CAGD, 6(1989), 293—306.

[170] D. F. Rogers and N. G. Fog, Constrained B-spline curve and surface fitting, CAD, 21(1989), 641—648.

[171] G. L. Naber, Topological methods in euclidean space, Combridge University Press, 1980.

[172] N. Sapids and R. Perucchio. Delaunay triangulation for arbitrarily shaped planar domains, CAGD. 8(1991), 421—437.

[173] X. P. Liu, Z. X. Su and Y. S. Zhou, Algorithms for triangulation on Connected domain, A friendly collection of mathematical papers I, R. H. Wang and Y. S. Zhou (eds.), Jilin University Press, 1990, 52—56.

[174] B. Joe, Construction of three-dimensional Delaunay triangulations using locall transformation, GAGD, 8(1991), 123—142.

[175] H. Pottmann, Interpolation on surfaces using minimum norm networks, CAGD, 9(1992), 51—67.

[176] H. Akima, A method of bivariate interpolation and smooth surface fitting for values given at irregularly distributed points, Trans. Math. Software, 4(1978), 148—159.

[177] D. Shepard, A two-dimensional interpolation function for irregularly spaced data, Proc. 23rd Nat. and ACM., 1968, 517—523.

[178] C. L. Lawson, Software for C^1 surface interpolation, Math. Software IV, Academic Press, New York, 1977, 161—194.

[179] G. M. Nielson, Minimum norm interpolation in triangles. SIAM J. Number., Anal., 17(1980), 44—62.

[180] G. M. Nielson, A method for intetpolating scattered data based upon a minimum norm network, Math. Comp., 40(1983), 253—271.

[181] L. L. Schumaker, Fitting surface to scattered data in Approximation theory II, Academic Press, New York, 1976, 263—268.

[182] 张作泉,三角剖分下曲面的数值表示和逼近,大连理工大学硕士论文,1990.

[183] 吴文俊,数学机械化的理论和方法,数学机械化研究中心刊印,1990.

[184] B. Buchberger, Gröbner Bases An algonithmic method in polynomial ideal theory, in "Recent Trends in Multidimensional Systems Theory", N. K. Bose (ed.), D. Reidel Publ. Comp., 1985.

[185] A. J. Worsey and B. Piper, A trivariate Powell-Sabin interpolant, CAGD, 5(1988), 177—186.

[186] 王建忠,小波理论及其在物理和工程中的应用,数学进展,21(1992),289—316.

[187] O. C. Zienkiewicz and R. L. Taylor, The finite element method, Fourth edition, London, 1988.

[188] H. Yserentent, On the multi-level splitting of finite element spaces, Numer, Math., 49(1986), 379—412.

[189] W. Dahmen, P. Oswald and X. Q. Shi, C^1-Hierarchical bases, FU Berlin Preprint, 1991.

[190] J. Bramble, J. Pasiak and J. Xu, Parallel multilevel preconditioners, Math. Comp., 55(1990), 1—22.

[191] P. G. Ciarlet, Interpolation error estimates for the reduced Hsieh-Clough-Tocher triangle, Math. Comp., 32(1978), 335—344.

[192] S. M. Nikol'skij, Approximation of functions of several variables and imbending theorems, Nauka, Moskow, 1969, English Transl., Springer-Verlag, 1974.

[193] O. V. Besov, V. P. Il'in and S. M. Nikol'skij, Intergral representations of functions and imbedding theorems, Nauka, Moskva, 1975 (in Russian).

[194] H. Triebel, Interpolation theory, function spaces, differential operators, Dt. Verl. Wiss., Berlin, 1978.

[195] W. Dahmen, R. DeVore and K. Scherer, Multidimensional spline approximation, SIAM J. Numer. Anal., 17(1980), 380—402.

[196] R. Bank and T. Dupont, An optimal order process for solving finite element equations, Math. Comp., 36(1981), 35—51.

[197] J. Bramble and J. Pasciak, New convergence estimates for mulgrid algorithms, Math. Comp., 49(1987), 311—329.

[198] 邓东皋,彭立中,小波分析,数学进展,3(1991),294—310.

[199] Y. Meyer, Ondelettes, Heremann, Paris, 1990.

[200] J. H. Bramble and J. E. Pasiak, The analysis of smoothness for multigrid algorithms, Math. Comp., 58(1992), 467—488.